



Pontificia Universidad  
**JAVERIANA**  
Cali

**Facultad de Ingeniería**  
**Secretaría de la Facultad**

**Acta de Correcciones al Proyecto de Grado**  
**Matemáticas Aplicadas**

**Fecha:** 6 de Agosto de 2014

**Autores:** Mauricio Narváez Paredes

**Nombre del Proyecto de Grado:** PREDICTOR Y CORRECTOR GENERALIZADO DEL MÉTODO DE ADAMS BASFORTH MOULTON PARA EL CÁLCULO DE LA REACTIVIDAD Y LA POTENCIA NUCLEAR

**Director:**

Como indica el artículo 2.27 de las Directrices de Trabajo de Grado, he verificado que los estudiantes indicados arriba han implementado todas las correcciones que los Jurados del Proyecto de Grado definieron que se efectuaran, como consta en el Acta de Calificación correspondiente.

Daniel Suescún Díaz

Daniel Suescún Díaz  
Director del Proyecto de Grado

Nota de Aceptación

Aprobado por el Comité de Trabajo de Grado  
en cumplimiento de los requisitos exigidos por la  
Pontificia Universidad Javeriana para optar el  
título de profesional en Matemáticas Aplicadas.



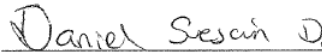
---

**Dr. JAIME AGUILAR ZAMBRANO**  
Decano de la Facultad de Ingeniería



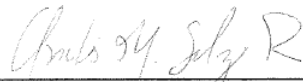
---

**Dr. Daniel Elias Núñez López**  
Director(a) Carrera Matemáticas Aplicadas



---

**Ph.D Daniel Suescún Díaz**  
Director(a) Trabajo



---

**Andrés Mauricio Salazar Rojas**  
Jurado 1



---

**Andrés Felipe Amador Rodríguez**  
Jurado 2


Santiago de Cali, 28 de Julio de 2014.

Señor.  
Ph.D. DANIEL ELIAS NÚÑEZ LÓPEZ  
Director  
Plan de estudio de Matemáticas Aplicadas  
Facultad de ingeniería  
Pontificia Universidad Javeriana Cali

Cordial Saludo

Por medio de la presente hago constar que en calidad de director del trabajo de grado titulado "PREDICTOR Y CORRECTOR GENERALIZADO DEL MÉTODO DE ADAMS BASFORTH MOULTON PARA EL CÁLCULO DE LA REACTIVIDAD Y LA POTENCIA NUCLEAR", realizado por el estudiante de Matemáticas Aplicadas, MAURICIO NARVAEZ PAREDES con código 3000055231, ha sido revisado y considero cumple con los requisitos para ser sometido a consideración del jurado.

Atentamente,

  
Ph.D. Daniel Suescún Díaz  
Director del proyecto de grado en referencia

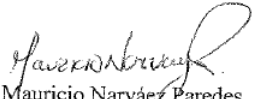
Santiago de Cali, 28 de Julio de 2014.

Señor.  
Ph.D. DANIEL ELIAS NÚÑEZ LÓPEZ  
Director  
Plan de estudio de Matemáticas Aplicadas  
Facultad de ingeniería  
Pontificia Universidad Javeriana Cali

Cordial Saludo

Me permito presentar a su consideración el proyecto de grado denominado "PREDICTOR Y CORRECTOR GENERALIZADO DEL MÉTODO DE ADAMS BASFORTH MOULTON PARA EL CÁLCULO DE LA REACTIVIDAD Y LA POTENCIA NUCLEAR". Con el fin de cumplir con los requisitos exigidos por la Pontificia Universidad Javeriana Cali para optar por el título de Profesional en Matemáticas Aplicadas.

Atentamente,

  
Mauricio Narváz Paredes  
C.C. 1.085.265.181 de Pasto, Nariño.  
Cód. 3000055231.

PREDICTOR Y CORRECTOR GENERALIZADO DEL MÉTODO DE ADAMS  
BASFORTH MOULTON PARA EL CÁLCULO DE LA REACTIVIDAD Y LA  
POTENCIA NUCLEAR.

MAURICIO NARVÁEZ PAREDES

Ph.D. DANIEL SUESCÚN DÍAZ  
Director Proyecto de grado

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA CALI  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
SANTIAGO DE CALI  
JULIO, 2014

# Índice

<b>1. Introducción al problema de investigación</b>	<b>11</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	11
1.2. Objetivos . . . . .	13
1.2.1. Objetivo general . . . . .	13
1.2.2. Objetivos específicos . . . . .	13
1.3. Organización del documento . . . . .	13
<b>2. Antecedentes</b>	<b>14</b>
<b>3. Consideraciones teóricas de las ecuaciones de la cinética puntual</b>	<b>16</b>
<b>4. Consideración teórica matemática</b>	<b>18</b>
4.1. Problema de valor inicial y nomenclatura . . . . .	18
4.2. Expansión de la serie de Taylor . . . . .	19
4.3. Polinomio interpolador de Lagrange . . . . .	20
<b>5. Métodos numéricos</b>	<b>22</b>
5.1. Método de Euler . . . . .	22
5.2. Métodos para la serie de Taylor de orden superior . . . . .	24
5.3. Método de Heun . . . . .	25
5.4. Método de Runge-Kutta . . . . .	26
5.5. Metodo de Milne-Simpson . . . . .	28
5.6. Método de Hamming . . . . .	29
<b>6. Método propuesto: Adams-Bashforth-Moulton</b>	<b>31</b>
6.1. Predictor del método Adams-Bashforth . . . . .	32
6.2. Corrector del método Adams-Moulton . . . . .	34
6.3. Estimación del error de truncamiento del predictor . . . . .	35
6.4. Estimación del error de truncamiento del corrector . . . . .	37
6.5. Modificador del predictor . . . . .	38
6.6. Modificador de corrector . . . . .	39
6.7. Criterio de convergencia . . . . .	40
6.8. Estabilidad . . . . .	42
6.9. Generalización del predictor . . . . .	45

6.10. Generalización del corrector . . . . .	48
6.11. Combinación de las nuevas formulas predictoras y correctoras . . . . .	50
6.11.1. Caso I . . . . .	51
6.11.2. Caso II . . . . .	51
6.11.3. Caso III . . . . .	52
6.11.4. Caso IV . . . . .	52
6.11.5. Caso V . . . . .	53
6.11.6. Caso VI . . . . .	53
<b>7. Análisis de resultados</b>	<b>54</b>
7.1. Resultados para la Potencia Nuclear . . . . .	54
7.2. Resultados para la Reactividad . . . . .	56

## Índice de figuras

1.	Ilustración gráfica del método de un paso. . . . .	22
2.	Ilustración gráfica del métodos de pasos multiples. . . . .	23
3.	Método de Euler. . . . .	23
4.	Método de Heun. a) Predictor y b) Corrector. . . . .	25
5.	Pendientes estimadas empleadas en el método de RK de cuarto orden. . .	27
6.	Representación gráfica de las fórmulas de integración. a) Forma explícita (Milne) b) Forma implícita (Simpson). . . . .	28
7.	Representación gráfica de las fórmulas de integración. a) Forma explícita (Bashforth) b) Forma implícita (Moulton). . . . .	31
8.	Potencia nuclear con reactividad en función del tiempo. . . . .	57
9.	Máxima diferencia en pcm, casos III y VI, $P(t) = \exp(wt)$ con $w = 2.345$ . .	61
10.	Máxima diferencia en pcm, casos I, IV y VI, $P(t) = \exp(wt)$ con $w = 11.6442$	62
11.	Máxima diferencia en pcm, casos II, V y VI, $P(t) = \exp(wt)$ con $w = 52.80532$	63
12.	Región de estabilidad del predictor P1. . . . .	73
13.	Región de estabilidad del predictor P3. . . . .	74
14.	Región de estabilidad del predictor P5. . . . .	76
15.	Región de estabilidad del predictor P6. . . . .	77
16.	Región de estabilidad del corrector C1. . . . .	78
17.	Región de estabilidad del corrector C4. . . . .	79
18.	Región de estabilidad del corrector C5. . . . .	80
19.	Región de estabilidad del corrector C6. . . . .	81
20.	Comparación entre región de estabilidad de los diferentes correctores. . . . .	82



## Índice de tablas

1.	Coefficientes de la ecuación explícita o predictora. . . . .	50
2.	Coefficientes de la ecuación implícita o correctora. . . . .	51
3.	Predictor $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ , Corrector $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . . . . .	51
4.	Predictor $\alpha_3 = 1$ , $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ , Corrector $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . . . . .	52
5.	Predictor $\alpha_2 = 1/3$ , $\alpha_3 = 1/3$ y $\alpha_4 = 1/3$ , Corrector $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . . . . .	52
6.	Predictor $\alpha_3 = 1$ , $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ , Corrector $\alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$ . . . . .	53
7.	Predictor $\alpha_3 = 1$ , $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ , Corrector $\alpha_2 = 1/2$ , $\alpha_3 = 0$ . . . . .	53
8.	Predictor $\alpha_2 = 1/2$ , $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ , Corrector $\alpha_2 = 1$ , $\alpha_3 = 0$ . . . . .	53
9.	Error máximo para diferentes valores de reactividad. . . . .	54
10.	Potencia encontrada con una reactividad de 300 pcm. . . . .	55
11.	Potencia encontrada con una reactividad de 550 pcm . . . . .	55
12.	Potencia encontrada con una reactividad de 700 pcm. . . . .	56
13.	Potencia encontrada con una reactividad de 800 pcm . . . . .	56
14.	Máxima diferencia en pcm, $P(t) = \exp(wt)$ con $w = 0.00243$ . . . . .	57
15.	Máxima diferencia en pcm, $P(t) = \exp(wt)$ con $w = 0.01046$ . . . . .	58
16.	Máxima diferencia en pcm, $P(t) = \exp(wt)$ con $w = 0.02817$ . . . . .	58
17.	Máxima diferencia en pcm, $P(t) = \exp(wt)$ con $w = 0.12353$ . . . . .	58
19.	Máxima diferencia en pcm, $P(t) = \exp(wt)$ con $w = 1.023$ . . . . .	59
18.	Máxima diferencia en pcm, $P(t) = \exp(wt)$ con $w = 1.00847$ . . . . .	59
20.	Máxima diferencia en pcm, $P(t) = \exp(wt)$ con $w = 2.345$ . . . . .	59
21.	Máxima diferencia en pcm, $P(t) = \exp(wt)$ con $w = 11.6442$ . . . . .	60
22.	Máxima diferencia en pcm, $P(t) = \exp(wt)$ con $w = 52.80532$ . . . . .	60
23.	Diferencia entre el corrector generalizado de Hamming y el predictor- corrector generalizado de Adams Basforth Moulton, $P(t) = \exp(wt)$ . . . . .	64
24.	Máxima diferencia en PCM, $P(t) = a + b * t^n$ , con $n = 3$ . . . . .	64
25.	Máxima diferencia en PCM, $P(t) = a + b * t^n$ , con $n = 4$ . . . . .	64
26.	Máxima diferencia en PCM, $P(t) = a + b * t^n$ , con $n = 5$ . . . . .	64
27.	Máxima diferencia en pcm, $P(t) = a + b * t^n$ ; $a = 1$ ; $b = (0.0127)^5/9$ ; $h = 0.1s$ . . . . .	65

## Resumen

En el presente trabajo se calcula la potencia y la reactividad usando las ecuaciones de la cinética puntual por medio del predictor y corrector generalizado del método de Adams Bashforth Moulton de orden  $h^5$ . Para aumentar la precisión en la aproximación, el método utiliza los modificadores derivados del error de truncamiento, propios de todo método numérico que sigue el esquema de predicción y corrección.

Se calcula la potencia nuclear para distintos valores de reactividad; 300 pcm, 550 pcm, 700 pcm y 800 pcm, con tamaños de paso de  $h = 1 \times 10^{-2}s$  y  $h = 1 \times 10^{-3}s$ , los resultados encontrados muestran una mejor aproximación en comparación a los trabajos reportados en la literatura [8], asimismo, los resultados obtenidos usando la reactividad de forma sinusoidal, son idénticos a los resultados publicados [7, 8].

Sin usar el histórico de la potencia y la transformada de Laplace [9, 10], se calcula la reactividad con diferentes formas de la potencia; exponencial y polinómica, los resultados obtenidos con diferentes tamaños de paso son de mejor aproximación que los métodos encontrados en la literatura [14, 28].

# 1. Introducción al problema de investigación

## 1.1. Planteamiento del problema

Las centrales nucleares son las instalaciones encargadas principalmente de la generación de energía eléctrica, el funcionamiento de una central nuclear es idéntico al de una central térmica que funcione con carbón, petróleo o gas, excepto en la forma de proporcionar calor al agua para convertirla en vapor. En el caso de los reactores nucleares este calor se obtiene mediante las reacciones de fisión de los átomos del combustible.

De manera general hay dos tipos de reactores, los primeros son los reactores de investigación, estos son de potencia baja e intermedia y su función es proveer neutrones para el estudio de características de la cadena de fisión, conocer más acerca de la interacción de la radiación con los materiales, producir radioisótopos de uso medicinal e industrial, entre otras.

El segundo tipo son los reactores potencia, estos conforman el 90% de los reactores a nivel mundial y están destinados a la producción de energía eléctrica, el funcionamiento se basa en la obtención de energía calorífica mediante la fisión nuclear del núcleo de los átomos del combustible. La energía calorífica, en forma de vapor de agua, se convierte en energía mecánica que produce el movimiento de una turbina que acoplada a un generador produce energía eléctrica.

Un reactor nuclear es un dispositivo que permite iniciar, controlar y mantener las reacciones de fisión nuclear. A partir del proceso de fisión resulta el especial interés por el estudio de la potencia y de la concentración de neutrones retrasados, los cuales se encuentran modelados y relacionados a través de las ecuaciones de la cinética puntual. Dichas ecuaciones forman un sistema de siete ecuaciones diferenciales fuertemente acopladas no lineales, donde el parámetro dependiente del tiempo en este sistema es la reactividad [1].

Gran parte de los trabajos encontrados en la literatura [2-8], centran su estudio en la teoría matemática de las ecuaciones de la cinética puntual, el conjunto de ecuaciones diferenciales se resuelve mediante técnicas semi-analíticas y numéricas enfocadas en eliminar el confinamiento de Stiffness a causa de las constantes de decaimiento  $\lambda_i$  del  $i$  –ésimo grupo de neutrones retardados.

Por otro lado, se estudia la aplicación de las ecuaciones en la operación de un reactor para el funcionamiento de una planta de energía nuclear. Las ecuaciones de la cinética puntual inversa permiten comprender el comportamiento dependiente del tiempo de la distribución de neutrones en respuesta a un cambio en el núcleo del reactor. Durante pruebas de análisis,

diseño y control de reactores nucleares es necesario un sistema de medición que permita determinar la reactividad, en consecuencia, el seguimiento continuo de este parámetro se hace con el fin de no solo alcanzar el nivel de potencia de operación segura y eficiente, si no también garantizar la seguridad de la planta [9-14].

En la presente investigación se propone el método multipaso de Adams Bashforth Moulton (ABM) de orden  $h^5$  ( $h$  tamaño del paso del tiempo) para calcular, no solo la potencia nuclear, sino también la reactividad, abarcando la teoría y la aplicación de este problema.

## **1.2. Objetivos**

### **1.2.1. Objetivo general**

Calcular la potencia y la reactividad empleando la generalización del predictor y corrector del método de Adams Bashforth Moulton.

### **1.2.2. Objetivos específicos**

- Deducir la generalización del predictor y del corrector de método de Adams Bashforth Moulton.
- Estudiar la convergencia y la estabilidad del método de Adams Bashforth Moulton.
- Realizar experimentos numéricos de la potencia y la reactividad para distintos predictores y correctores con sus respectivos modificadores.

## **1.3. Organización del documento**

Este trabajo se encuentra estructurado de la siguiente manera:

En la sección 2, se exponen los artículos que describen los diferentes métodos para encontrar la solución a las ecuaciones de la cinética puntual y cinética puntual inversa.

En seguida, en la sección 3, se describen las ecuaciones de la cinética puntual.

En la sección 4, se considera la teoría matemática necesaria para el desarrollo de la investigación.

Luego, en la sección 5, se hace una breve descripción de los métodos numéricos de un solo paso y de pasos múltiples.

En la sección 6, se profundiza en el método de Adams Bashforth Moulton, al respecto, se presenta la deducción, convergencia, estabilidad y generalización del mismo. Al final, se muestran las diferentes fórmulas predictoras y correctoras obtenidas a partir de la generalización.

En la sección 7, se muestra el análisis de los resultados, primero para el cálculo de la potencia, y segundo para el cálculo de la reactividad.

Finalmente, las conclusiones, referencias y anexos de la investigación.

## 2. Antecedentes

En 1988 se describe un método para determinar la intensidad de una fuente eficaz de neutrones en un reactor nuclear [15], en el que se calcula la reactividad variable del reactor en el tiempo a partir de la cinética inversa. El autor realiza experimentos con un simulador de reactor con la intensidad de la fuente conocida, los resultados obtenidos de la aplicación a las señales del reactor son satisfactorios.

En el documento[9], se propone un método basado en la integración por partes de la ecuación de la cinética puntual inversa, resulta una serie de potencia en términos de la potencia nuclear dependiente del tiempo. La reactividad, bajo ciertas condiciones puede ser calculada con la primera y segunda derivada de la potencia nuclear.

De igual forma en [10], se presenta una forma diferente de resolver las ecuaciones de la cinética puntual, su desarrollo se basa en la transformada de Laplace. La reactividad puede ser escrita en términos de la suma de convolución con la respuesta al impulso, características de un sistema lineal. Se destaca de este método que la parte lineal se caracteriza por un filtro de impulso finito (FIR). El filtro FIR será estable y no varía en el tiempo. Esta aplicación permite el cálculo de la reactividad de forma continua.

Sin utilizar la transformada de Laplace y la transformada Z [11], se desarrolla otra forma más sencilla para el cálculo de la reactividad. Además se hace un tratamiento para reducir la intensidad de ruido presente en la señal de la potencia nuclear. Se escribe la reactividad empleando la regla compuesta de Simpson, el resultado es una suma de dos términos de convolución con respuesta al impulso. La parte lineal se calcula utilizando un filtro FIR y la no lineal un filtro exponencial por el método de mínimos cuadrados.

Posteriormente, se aplica el método de diferencias finitas para calcular la reactividad, se reduce la intensidad de ruido en la señal de la potencia nuclear usando un filtro exponencial ajustado con el método de mínimos cuadrados [16].

En 2013, se desarrolla un método de aproximación basado en la fórmula de Euler Maclaurin para resolver numéricamente la integral de la ecuación de la cinética puntual inversa [13], se obtienen mejores aproximaciones que en el método en donde se emplea el histórico de la potencia.

Continuando con la revisión bibliográfica, en 2012 [12], se propone un nuevo método para resolver las ecuaciones de la cinética puntual inversa. El método de predicción-corrección de Hamming empleado no requiere ni el histórico de la potencia nuclear ni de la transformada

de Laplace. Las pruebas numéricas se realizaron con diferentes tamaños de paso  $h$  disminuyendo el costo computacional comparado con otros métodos convencionales que requieren el histórico de la potencia.

Se plantea un nuevo método para resolver numéricamente las ecuaciones de la cinética puntual en un reactor nuclear usando el método de Hamming [8], el cual converge con precisión del orden  $h^5$  donde  $h$  es el paso en el tiempo de cálculo. El procedimiento es validado para diferentes formas de reactividad y con diferentes pasos de tiempo. Los resultados computacionales son satisfactorios, pues indican que el método es bastante aproximado y tiene bajo esfuerzo computacional comparado con otros métodos convencionales.

Para terminar, en un trabajo reciente [14], se calcula la reactividad usando la generalización del corrector del método de Hamming sin requerir el histórico de la potencia nuclear. Este artículo presenta la solución para diferentes correctores y sus respectivos modificadores. Los resultados encontrados tienen una buena precisión y es válido para diferentes formas de potencia.

### 3. Consideraciones teóricas de las ecuaciones de la cinética puntual

Cuando se genera una reacción en cadena por fisión nuclear, se puede categorizar a los neutrones producidos en tres tipos según su origen: Neutrones prontos, nacidos en fracciones de microsegundos inmediatamente del evento de fisión, neutrones retardados, los cuales nacen con un tiempo de retardo de milisegundos en la desintegración radiactiva de la fisión y los últimos, los neutrones de origen externo. Las ecuaciones de la cinética puntual describen el comportamiento en el tiempo del reactor, el flujo total de neutrones y la concentración de precursores de neutrones retardados. Es gracias a los neutrones retardados que un reactor nuclear es controlable. Las ecuaciones de la cinética puntual con seis grupos de neutrones retardados vienen dadas por [1]:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \left[ \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} \right] P(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \quad (3.1)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} P(t) - \lambda_i C_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.2)$$

Con las las condiciones iniciales:

$$P(t = 0) = P_0 \quad (3.3)$$

$$C_i(t = 0) = \frac{\beta_i}{\Lambda \lambda_i} P_0 \quad (3.4)$$

Donde  $P(t)$  es la potencia nuclear,  $C_i(t)$  es la concentración del  $i$ -ésimo grupo de precursores de neutrones retardados,  $\rho(t)$  es la reactividad,  $\Lambda$  es el tiempo de generación de neutrones,  $\beta_i$  es la fracción del  $i$ -ésimo grupo de neutros retardados,  $\beta$  es la fracción total de neutros retardados, ( $\beta = \sum_i \beta_i$ ),  $\lambda_i$  es la constante de decaimiento del  $i$ -ésimo grupo de precursores de neutrones retardados, teniendo en cuenta los siguientes valores, para  $\beta = 0.007$ ,  $\lambda_i(0.0127, 0.0317, 0.115, 0.311, 1.4, 3.87s^{-1})$ ,  $\beta_i(0.000266, 0.001491, 0.001316, 0.002849, 0.000896, 0.000182)$  y  $\Lambda = 2 \times 10^{-5}s$ .

Estas ecuaciones son un sistema de siete ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, las cuales describen la evolución en el tiempo de la distribución y concentración de neutrones retardados en el reactor nuclear, donde el parámetro dependiente del tiempo en este sistema es la reactividad.

Resolviendo el sistema de ecuaciones (3.1) y (3.2), se puede encontrar el valor de la



potencia nuclear, dando solución al estudio en la teoría matemática de las ecuaciones de la cinética puntual [2, 3, 5, 6, 7, 8, 25].

Por otro lado, integrando la ecuación (3.2) es posible llegar a la ecuación de la reactividad, conocido como el método inverso, su ecuación viene dada por:

$$\rho(t) = \beta + \frac{\Lambda}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} - \frac{1}{P(t)} \sum_{i=1}^6 \lambda_i \beta_i \left[ \frac{\langle P_0 \rangle}{\lambda_i} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t e^{-\lambda_i(t-t')} P(t') dt' \right] \quad (3.5)$$

La integral de la ecuación (3.5), representa el histórico de la potencia nuclear y es utilizada para encontrar la solución exacta dadas diferentes formas de la potencia nuclear, sin embargo, no es conveniente aplicarla directamente para el cálculo de la reactividad en tiempo real.

Para calcular la reactividad y evitar la dependencia del histórico de la potencia, se despeja  $\rho(t)$  de la ecuación (3.1);

$$\rho(t) = \beta + \frac{\Lambda}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} - \frac{\Lambda}{P(t)} \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \quad (3.6)$$

Se resuelve la ecuación (3.2) para encontrar y luego reemplazar  $C_i(t)$  en la ecuación (3.6), esta última ecuación permite determinar  $\rho(t)$ , el parámetro más importante en la aplicación de las ecuaciones en la seguridad de un reactor nuclear [9-16].

Al discretizar la ecuación (3.6) se tiene que:

$$\rho[nT] = \beta + \frac{\Lambda}{P[nT]} \frac{P[nT] - P[(n-1)T]}{T} - \frac{\Lambda}{P[nT]} \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i[nT] \quad (3.7)$$

Donde T es el paso en tiempo para el cálculo de la reactividad.

## 4. Consideración teórica matemática

### 4.1. Problema de valor inicial y nomenclatura

Las ecuaciones diferenciales se usan para construir modelos matemáticos de problemas de la ciencia e ingeniería. El presente trabajo centra la atención a la solución de la ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden de la forma:

$$dy/dt = y' = f(t, y) \quad (4.1)$$

con la condición inicial dada por

$$y(t_0) = y_0 \quad (4.2)$$

1.  $f(t, y)$  está definida y es continua en  $t_0 \leq t \leq b$ ,  $-\infty \leq y \leq \infty$  con  $t_0$  y  $b$  finitas.
2. Existe ahí una constante  $L$  tal, que para cualquier  $t \in [t_0, b]$  y dos números  $u$  y  $v$  cualesquiera,

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v| \quad (4.3)$$

Estas condiciones son suficientes para demostrar que existe una función  $y(t)$  en  $[t_0, b]$ , única, continua y diferenciable que satisface la ecuación (4.1) y (4.2).

En sentido numérico se obtienen los valores discretos de  $y$  y  $t$ , denotados por  $y_k$  y  $t_k$  respectivamente, siendo aproximaciones de la curva continua  $y(t)$  contra  $t$ . Como se ha señalado antes, se desarrollaran métodos numéricos que producen, para una secuencia  $t_k$  ( $t_k > x_0$ ) una secuencia  $y_k$ , que aproxima la solución exacta. Para obtener éstas secuencias discretas, se considera el intervalo  $[t_0, b]$  con un conjunto finito de puntos de  $t_k$  que forma una red, cuadrícula o malla a lo largo de la coordenada  $t$ . Cada punto en la secuencia se refiere a un punto anterior por la relación

$$t_{k+1} = t_k + h; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n; \quad t_n = b \quad (4.4)$$

Donde  $h$  es el tamaño de paso o incremento entre los puntos de la secuencia  $t_k$ . Para nuestro caso  $h$  será constante, luego los puntos  $t_0, t_1, \dots, t_n$  estarán equiespaciados.

## 4.2. Expansión de la serie de Taylor

El teorema de Taylor y su fórmula, la serie de Taylor es de gran valor en el estudio de métodos numéricos. En esencia, la serie de Taylor proporciona un método para predecir el valor de una función en un punto en términos del valor de la función y sus derivadas en otro punto. En particular, el teorema establece que cualquier función suave puede aproximarse por un polinomio.

*Teorema de Taylor.* Si una función  $f$  y sus primeras  $n + 1$  derivadas son continuas en el intervalo que contiene  $a$  y  $x$ , entonces el valor de la función en  $x$  está dado por

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + E_n \quad (4.5)$$

donde

$$E_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \quad (4.6)$$

es el error.

La ecuación (4.5) se llama serie de Taylor, por otro lado, la ecuación (4.6), expresada usualmente  $E_n = O(h^{n+1})$  donde la nomenclatura  $O(h^{n+1})$  significa que el error de truncamiento es de orden  $h^{n+1}$ . Es decir, el error es proporcional al incremento  $h$  elevado a la  $(n + 1)$  -ésima potencia.

El primer término de la serie de Taylor

$$f(t_{k+1}) \cong f(t_k) \quad (4.7)$$

llamada aproximación de orden cero, indica que el valor de  $f$  en el nuevo punto es el mismo que el valor en el punto anterior. Sin embargo, la función cambia en el intervalo, entonces se requieren los términos adicionales, para obtener una mejor aproximación. Por ejemplo, la aproximación de segundo orden

$$f(t_{k+1}) \cong f(t_k) + f'(t_k)(t_{k+1} - t_k) + \frac{f''(t_k)}{2!}(t_{k+1} - t_k)^2 \quad (4.8)$$

Los dos primeros términos de la ecuación (4.8) coinciden con la recta tangente a la curva. De manera similar se agregan términos adicionales para desarrollar la expansión completa de la serie de Taylor:

$$f(t_{k+1}) = f(t_k) + f'(t_k)h + \frac{f''(t_k)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t_k)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad (4.9)$$

donde el subíndice  $n$  indica que éste es el residuo de la aproximación de  $n - \text{ésimo}$  orden y  $\xi \in [t_k, t_{k+1}]$ .

### 4.3. Polinomio interpolador de Lagrange

El método más común para este propósito es la interpolación polinomial. Aunque hay uno y sólo un polinomio de  $n - \text{ésimo}$  grado que se ajusta a  $n + 1$  puntos, existe una gran variedad de formas matemáticas en las cuales puede expresarse este polinomio. El matemático francés Joseph Louis Lagrange descubrió la siguiente fórmula [19].

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n y_k L_{n,k}(t) \quad (4.10)$$

donde  $L_{n,k}$  es el polinomio coeficiente de Lagrange para los nodos  $t_0, t_1, \dots, t_n$  definido por:

$$L_{n,k}(t) = \frac{(t - t_0) \dots (t - t_{k-1})(t - t_{k+1}) \dots (t - t_n)}{(t_k - t_0) \dots (t_k - t_{k-1})(t_k - t_{k+1}) \dots (t_k - t_n)} \quad (4.11)$$

o de forma compacta

$$L_{n,k}(t) = \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^n (t - t_j)}{\prod_{j=0, j \neq k}^n (t_k - t_j)} \quad (4.12)$$

un cálculo directo prueba, que para cada  $k$  fijo, el polinomio coeficiente de Lagrange  $L_{n,k}(t)$  cumple que si  $j = k$ , entonces  $L_{n,k}(t) = 1$  y que si  $j \neq k$  entonces  $L_{n,k}(t) = 0$ .

Ahora es importante entender la naturaleza del término del error que se comete cuando se utiliza un polinomio interpolador de Lagrange para aproximar una función  $f(t)$ .

*Teorema polinomio interpolador de Lagrange.* Supongamos que  $f \in C^{n+1}[a, b]$  y que  $t_0, t_1, \dots, t_n \in [a, b]$  son  $n + 1$  nodos de interpolación, si  $t \in [a, b]$ , entonces

$$f(t) = P_n(t) + E_n(t) \quad (4.13)$$

donde  $P_n(t)$  es un polinomio que se puede usar para aproximar  $f(t)$ :

$$f(t) \approx P_n(t) = \sum_{k=0}^n f(t_k) L_{n,k}(t) \quad (4.14)$$

llamado polinomio interpolador de Lagrange de  $f$  para los nodos dados y el término de error  $E_n(t)$  se puede escribir como:

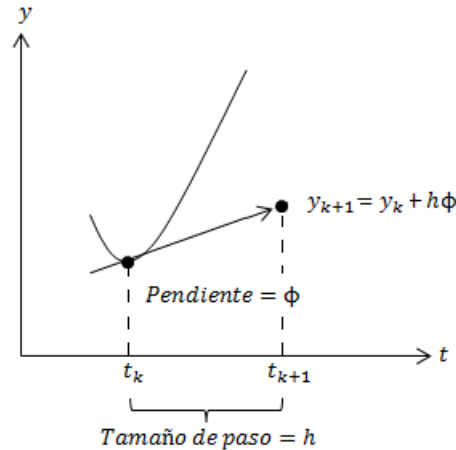
$$E_n(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_n)f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \quad (4.15)$$

para algún valor  $c = c(t)$  del intervalo  $[a, b]$ .

## 5. Métodos numéricos

En esta parte se analizarán dos categorías amplias de métodos numéricos para problemas de valor inicial. Por un lado los métodos numéricos de un paso los cuales permiten el cálculo de  $y_{i+1}$ , dada la ecuación diferencial y la condición inicial  $y_i$  [20].

Figura 1: Ilustración gráfica del método de un paso.



Como se puede ver en la figura 1, la pendiente estimada  $\phi$  se usa para explorar un valor anterior  $y_i$  a un nuevo valor  $y_{i+1}$  en una distancia  $h$ .

$$y_{k+1} = y_k + h\phi \quad (5.1)$$

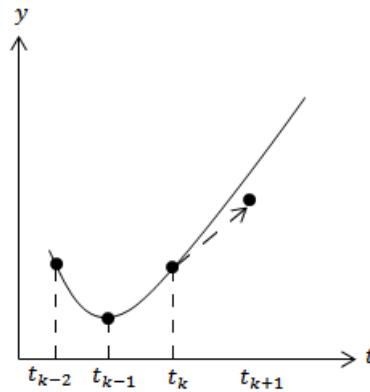
La ecuación (5.1) se usa paso a paso para calcular la trayectoria de la solución. Los métodos de un solo paso se expresan de esta forma, solo varía en la manera en que estiman la pendiente.

Por otro lado los métodos de pasos múltiples, requieren valores adicionales de  $y$  además de los de  $y_i$ , una representación gráfica de los métodos de pasos múltiple se observa en la figura 2.

### 5.1. Método de Euler

La primera derivada,  $\phi = f(t_k, y_k)$  ofrece una estimación directa de la pendiente en  $t_k$ , en donde  $f(t_k, y_k)$  es la ecuación diferencial evaluada en  $t_k, y_k$ . La estimación se sustituye en la ecuación (5.1):

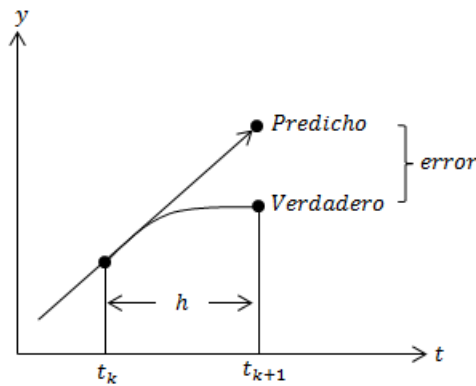
Figura 2: Ilustración gráfica del métodos de pasos multiples.



$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \tag{5.2}$$

La ecuación (5.2) se conoce como Método de Euler (o de Euler-Cauchy o de punto pendiente). Como se observa en la figura 3, se predice un nuevo valor de  $y$  usando la pendiente.

Figura 3: Método de Euler.



La solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) implica tener un error de truncamiento, originado por la naturaleza de las técnicas empleadas para aproximar los valores de  $y$ . Este error se compone de dos partes, la primera en un error de truncamiento local que resulta de la aplicación del método considerado, la segunda es un error de truncamiento propagado que resulta de las aproximaciones producidas durante los pasos previos. La suma de los dos es el error de truncamiento global o total.

El método de Euler puede desarrollarse directamente de la expansión de Taylor, para ello la ecuación diferencial que se va integrar es de la forma general:

$$y' = f(t, y) \quad (5.3)$$

donde  $y' = dy/dt$ ,  $t$  y  $y$  son las variables independiente y dependiente, respectivamente. Si la solución tiene derivadas continuas, se representa por una expansión de Taylor respecto a un valor inicial  $(t_i, y_i)$ , como sigue:

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2!} h^2 + \dots + \frac{y_k^{(n)}}{n!} h^n + \frac{y_k^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} \quad (5.4)$$

Donde  $h = t_{i+1} - t_i$  y  $\xi$  está en el intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ . De forma alternativa, sustituyendo la ecuación (5.3) en la ecuación (5.4) se obtiene:

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)h + \frac{f'(t_k, y_k)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(t_k, y_k)}{n!} h^n + O(h^{n+1}) \quad (5.5)$$

Donde  $O(h^{n+1})$  especifica que el error de truncamiento local es proporcional al tamaño de paso elevado a la potencia  $(n+1)$ . Luego, el error de truncamiento local del método de Euler es de orden 2, es decir  $O(h^2)$ .

## 5.2. Métodos para la serie de Taylor de orden superior

Una manera de reducir el error con el método de Euler sería incluir términos de orden superior en la expansión de la serie de Taylor para la solución. Al incluir el término de segundo orden en la ecuación (5.5) resulta:

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)h + \frac{f'(t_k, y_k)}{2!} h^2 \quad (5.6)$$

Con error de truncamiento local de:

$$E_t = \frac{f''(t_k, y_k)}{6} h^3 \quad (5.7)$$

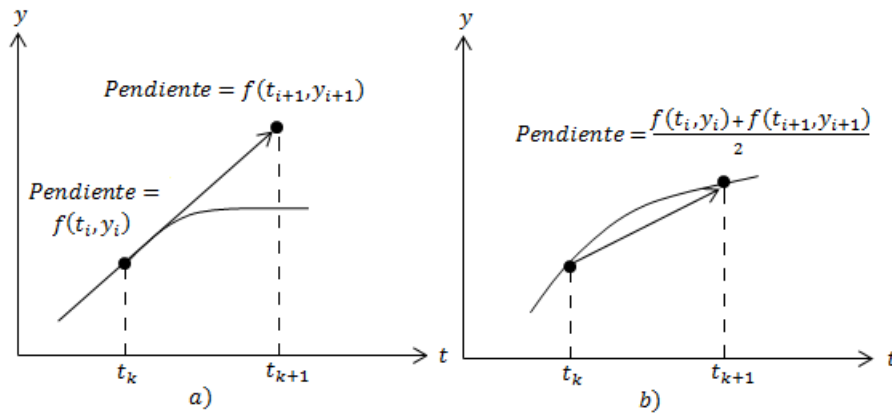
Aunque la incorporación de términos de orden superior es simple para implementarse en polinomios, su inclusión no es trivial cuando la EDO es más complicada. En consecuencia, existen métodos alternativos de un paso, estos esquemas son comparables en eficiencia con los procedimientos de la serie de Taylor de orden superior, aunque requieren sólo el cálculo de las primeras derivadas.



### 5.3. Método de Heun

En este método se hace una mejora en la estimación de la pendiente, emplea el promedio de dos derivadas en el intervalo, una en el punto inicial y otra en el punto final. El método de Heun es un procedimiento predictor-corrector de un solo paso, se representa en forma gráfica en la figura 4.

Figura 4: Método de Heun. a) Predictor y b) Corrector.



En el método de Euler, la pendiente al inicio del intervalo

$$y' = f(t_k, y_k) \quad (5.8)$$

se utiliza para extrapolar linealmente a  $y_{k+1}$ :

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)h \quad (5.9)$$

a diferencia del método de Euler la  $y_{k+1}$  calculada en la ecuación (5.9) no es la respuesta final, sino es una predicción intermedia. La ecuación (5.9) se llama ecuación predictora y da una estimación de  $y_{k+1}$  que permite el cálculo de una estimación de la pendiente al final del intervalo:

$$y'_{k+1} = f(t_{k+1}, y_{k+1}) \quad (5.10)$$

Así, se combinan las dos pendientes, ecuación (5.9) y (5.10) para obtener una pendiente promedio en el intervalo:

$$\bar{y}' = \frac{y'_k + y'_{k+1}}{2} = \frac{f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})}{2} \quad (5.11)$$

Esta pendiente se utiliza después para extrapolar linealmente desde  $y_k$  hasta  $y_{k+1}$  con el método de Euler:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})) \quad (5.12)$$

La ecuación (5.12) se conoce como el corrector del método. De forma concisa el método de Heun se escribe como:

$$p_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \quad (5.13)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, p_{k+1})) \quad (5.14)$$

Finalmente el método de Heun tiene un error de truncamiento local de orden 3, es decir  $O(h^3)$ . Al disminuir el tamaño de paso se disminuye el error más rápido que en el método de Euler [19].

#### 5.4. Método de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta (RK) logran la exactitud del procedimiento de la serie de Taylor sin necesitar el cálculo de derivadas de orden superior. Existen muchas variantes pero todas tienen la forma generalizada de la ecuación (5.1):

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(t_i, y_i, h) \quad (5.15)$$

donde  $\phi(t_i, y_i, h)$  se conoce como la función incremento, la cual puede interpretarse como una pendiente representativa en el intervalo. La función incremento se puede expresar de forma general como:

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n \quad (5.16)$$

donde las  $a$  son constantes y las  $k$  son:

$$k_1 = f(t_k, y_k)$$

$$k_2 = hf(t_k + p_1h, y_k + q_{11}k_1h)$$

$$k_3 = hf(t_k + p_2h, y_k + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h) \quad (5.17)$$

⋮

$$k_n = f(t_k + p_{n-1}h, y_k + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1})$$

donde las  $p$  y  $q$  son constantes, las cuales se encuentran igualando la ecuación (5.15) a los términos en la expansión de la serie de Taylor. Como se ve en la ecuación (5.17) las constantes  $k$  son de recurrencia, lo que vuelve eficiente a los métodos RK para cálculos en computadora. Es posible tener varios tipos de métodos de Runge-Kutta empleando diferentes números de términos en la función incremento especificada por  $n$ . Para el propósito de este trabajo se usa en la función de incremento  $n = 4$ . Se tiene así, el método de Runge-Kutta de cuarto orden:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{5.18}$$

donde,

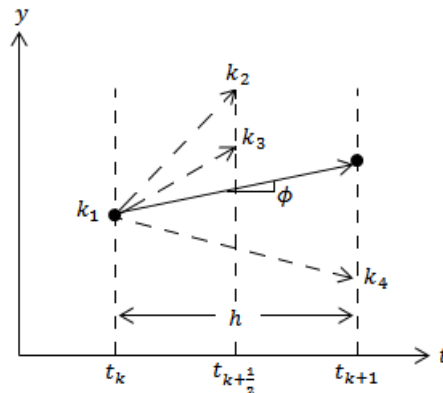
$$k_1 = f(t_k, y_k)$$

$$k_2 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_1h) \tag{5.19}$$

$$k_3 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_2h)$$

$$k_4 = f(t_k + h, y_k + k_3h)$$

Figura 5: Pendientes estimadas empleadas en el método de RK de cuarto orden.

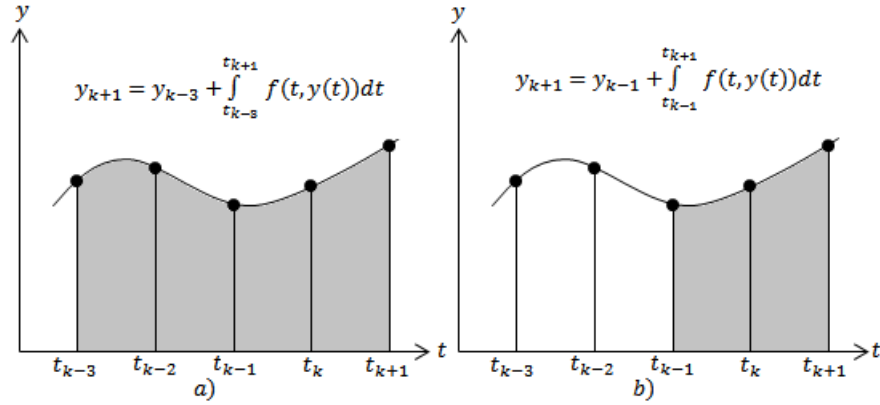


Como se muestra en la figura 5, cada una de las  $k$  representa una pendiente, la ecuación (5.18) representa un promedio ponderado de éstas para establecer la mejor pendiente. Finalmente el error de truncamiento local del método es de orden 5, es decir  $O(h^5)$  [19].

### 5.5. Metodo de Milne-Simpson

Este método de pasos múltiples o multipaso para calcular  $y_{k+1}$ , a diferencia de los nombrados anteriormente, requiere de valores previos  $y_k, y_{k-1}, y_{k-2}$  y  $y_{k-3}$ , los cuales ofrecen información respecto a la trayectoria de la solución. Para obtener los puntos previos se emplea el método de Runge-Kutta de orden cuatro y así poder aplicar el método de Milne-Simpson. El esquema emplea el método explícito (Milne) como predictor y el método implícito (Simpson) como corrector, para deducirlo se usan fórmulas de integración para resolver el problema  $y'(t) = f(t, y)$  con la condición inicial  $y(t_0) = y_0$  en el intervalo  $[t_{k-3}, t_{k+1}]$  [18]. La representación gráfica de la forma de integración para el predictor y el corrector del método se observan en la figura 6.

Figure 6: Representación gráfica de las fórmulas de integración. a) Forma explícita (Milne) b) Forma implícita (Simpson).



El predictor y corrector del método y sus respectivos errores de truncamiento vienen dadas por:

$$p_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4}{3}h(2f(t_{k-2}, y_{k-2}) - f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 2f(t_k, y_k)) \quad (5.20)$$

$$E_p \approx \frac{28}{90}y^{(5)}(\xi_1)h^5 \quad (5.21)$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{1}{3}h(f(t_{k-1}, y_{k-1}) - f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})) \quad (5.22)$$

$$E_c \approx -\frac{1}{90}y^{(5)}(\xi_2)h^5 \quad (5.23)$$

donde  $\xi_1$  y  $\xi_2$  pertenecen al intervalo  $[t_{k-3}, t_{k+1}]$  y  $[t_{k-1}, t_{k+1}]$  respectivamente. Estos métodos pueden volverse más exactos y eficientes calculando, a partir del error de truncamiento, ecuaciones (5.21) y (5.23), los modificadores del predictor y del corrector.

De forma compacta el método de Milne-Simpson se expresa como:

$$p_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4}{3}h(2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k) \quad (5.24)$$

$$mp_{k+1} = p_{k+1} + \frac{28}{29}(y_k - p_k) \quad (5.25)$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{1}{3}h(f_{k-1} + 4f_k + f(t_{k+1}, mp_{k+1})) \quad (5.26)$$

$$my_{k+1} = y_{k+1} - \frac{1}{29}(y_{k+1} - p_{k+1}) \quad (5.27)$$

las ecuaciones (5.24) y (5.26) son el predictor y el corrector del método y las ecuaciones (5.25) y (5.27) sus respectivos modificadores.

## 5.6. Método de Hamming

El método de Milne, anteriormente estudiado, en ocasiones se desempeña de forma inestable, esta condición se debe al corrector [18]. En consecuencia, se han realizado intentos para rectificar el defecto al desarrollar correctores estables, una alternativa usada comúnmente que emplea este procedimiento es el Método de Hamming, el cual utiliza el predictor de Milne y un corrector estable. Además del predictor dado por la ecuación (5.24), se muestra a continuación el corrector y los modificadores del método:

$$p_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4}{3}h(2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k) \quad (5.28)$$

$$mp_{k+1} = p_{k+1} + \frac{9}{121}(y_k - p_k) \quad (5.29)$$

$$y_{k+1} = \frac{9}{8}y_k - \frac{1}{8}y_{k-2} + \frac{3}{8}h(-f_{k-1} + 2f_k + f(t_{k+1}, mp_{k+1})) \quad (5.30)$$

$$my_{k+1} = y_{k+1} - \frac{112}{121}(y_{k+1} - p_{k+1}) \quad (5.31)$$

Este método fue usado para el cálculo de la reactividad [12], obteniendo los mejores

resultados hasta la fecha de su publicación, después, en 2014 se generalizó el corrector del método, lo que permitió mejorar considerablemente los resultados [14, 18].

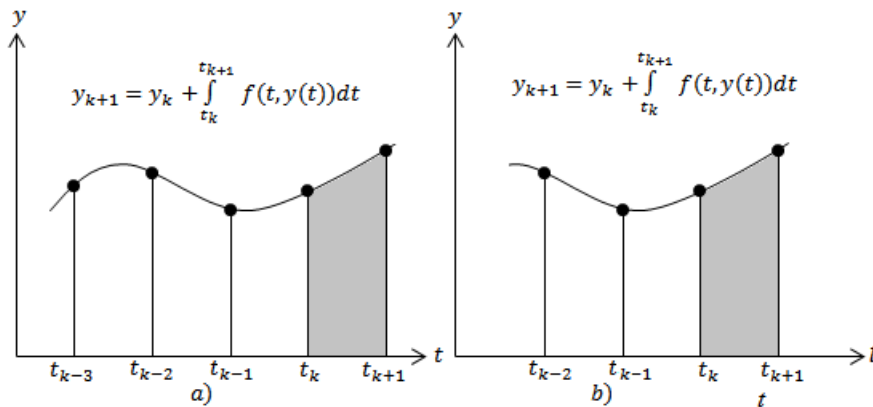
## 6. Método propuesto: Adams-Bashforth-Moulton

En este trabajo se estudia por primera vez el método de Adams-Bashforth-Moulton aplicado al cálculo de la potencia y la reactividad nuclear. Motivado por la precisión del corrector generalizado del método de Hamming, se propone generalizar tanto el predictor como el corrector del método, para intentar mejorar la aproximación y poder competir con el método de Hamming.

Los métodos de Adams son los métodos multipaso más antiguos, ya que datan del siglo XIX. John C. Adams (1819-1892), al analizar, en 1846, irregularidades en la órbita de Saturno hizo la conjetura de la existencia de otro planeta, por lo que cuando se observó Urano, que hasta entonces no se conocía, sus métodos adquieren fama, incluso fuera de la comunidad científica. Los métodos que se conocen como métodos de Adams, fueron publicados en 1885 los métodos que hoy se conocen como métodos de Adams-Bashforth o métodos explícitos, por Bashfort, en un trabajo relacionado con el tratamiento numérico de capilaridad, tensión superficial y sobre la forma de una gota, aunque dicho trabajo comentó que ya eran conocidos desde 1855 por Adams. Los métodos implícitos, o métodos de Adams- Moulton, aparecen en 1926, en un trabajo relacionado con problemas de balística [21].

A pesar de su antigüedad los métodos de Adams son métodos muy utilizados debido a sus buenas propiedades. Al igual que el método de Milne Simpson, el método requiere valores previos para calcular  $y_{k+1}$ ;  $y_k$ ,  $y_{k-1}$ ,  $y_{k-2}$  y  $y_{k-3}$  se calculan por Runge-Kutta de orden 4. La diferencia radica en la deducción, la interpretación gráfica se muestra a continuación:

Figure 7: Representación gráfica de las fórmulas de integración. a) Forma explícita (Bashforth) b) Forma implícita (Moulton).



Como se observa en la figura 7, el esquema emplea el método explícito (Bashforth) como

predicador y el método implícito (Moulton) como corrector. Empleado el concepto gráfico para deducir el método, se muestra a continuación la deducción matemática del predicador, corrector, errores de truncamiento, modificadores, estabilidad, convergencia y generalización del método.

## 6.1. Predicador del método Adams-Bashforth

La deducción se basa en resolver la EDO general  $y'(t) = f(t, y(t))$ , esta ecuación se resuelve integrando en ambos lados entre los límites  $t_k$  y  $t_{k+1}$ :

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt \quad (6.1)$$

el lado izquierdo se integra y evalúa mediante el teorema fundamental del cálculo:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt \quad (6.2)$$

La ecuación (6.2) representa una solución a la EDO si la integral puede evaluarse. Para esto se considera el polinomio interpolador de Lagrange de grado 3 para  $f(t, y(t))$  que pasa por los puntos  $(t_{k-3}, f(t_{k-3}))$ ,  $(t_{k-2}, f(t_{k-2}))$ ,  $(t_{k-1}, f(t_{k-1}))$ ,  $(t_k, f(t_k))$ :

$$\begin{aligned} f(t, y(t)) &= f_{k-3} \frac{(t-t_{k-2})(t-t_{k-1})(t-t_k)}{(t_{k-3}-t_{k-2})(t_{k-3}-t_{k-1})(t_{k-3}-t_k)} + \\ &+ f_{k-2} \frac{(t-t_{k-3})(t-t_{k-1})(t-t_k)}{(t_{k-2}-t_{k-3})(t_{k-2}-t_{k-1})(t_{k-2}-t_k)} + \\ &+ f_{k-1} \frac{(t-t_{k-3})(t-t_{k-2})(t-t_k)}{(t_{k-1}-t_{k-3})(t_{k-1}-t_{k-2})(t_{k-1}-t_k)} + \\ &+ f_k \frac{(t-t_{k-3})(t-t_{k-1})(t-t_k)}{(t_k-t_{k-3})(t_k-t_{k-2})(t_k-t_{k-1})} \end{aligned} \quad (6.3)$$

se reemplaza (6.3) en (6.2) e integrando se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &\approx f_{k-3} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t-t_{k-2})(t-t_{k-1})(t-t_k)}{(t_{k-3}-t_{k-2})(t_{k-3}-t_{k-1})(t_{k-3}-t_k)} dt + \\ &+ f_{k-2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t-t_{k-3})(t-t_{k-1})(t-t_k)}{(t_{k-2}-t_{k-3})(t_{k-2}-t_{k-1})(t_{k-2}-t_k)} dt + \\ &+ f_{k-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t-t_{k-3})(t-t_{k-2})(t-t_k)}{(t_{k-1}-t_{k-3})(t_{k-1}-t_{k-2})(t_{k-1}-t_k)} dt + \end{aligned} \quad (6.4)$$



$$+ f_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t-t_{k-3})(t-t_{k-2})(t-t_{k-1})}{(t_k-t_{k-3})(t_k-t_{k-2})(t_k-t_{k-1})} dt$$

Sea  $t = t_k + vh$  de manera que  $t - t_k = vh$ ,  $dt = h dv$  y  $t - t_{k+1} = t - (t_k + h)$ , luego  $t - t_{k+1} = t - t_k - h = vh - h = h(v - 1)$ , en general  $t - t_{k-i} = h(v + i)$ , además  $t_i - t_j = (i - j)h$ . Reemplazando en (6.4) se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &\approx f_{k-3} \int_0^1 \frac{h(v+2)h(v+1)hv}{-h(-2h)(3h)} h dv + \\ &+ f_{k-2} \int_0^1 \frac{h(v+3)h(v+1)hv}{h(-h)(-2h)} h dv + \\ &+ f_{k-1} \int_0^1 \frac{h(v+3)h(v+2)hv}{2h(h)(-h)} h dv + \\ &+ f_k \int_0^1 \frac{h(v+3)h(v+2)h(v+1)}{h(2h)(3h)} h dv \end{aligned} \quad (6.5)$$

simplificando, se obtiene,

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &\approx -\frac{hf_{k-3}}{6} \int_0^1 (v^3 + 3v^2 + 2v) dv + \\ &+ \frac{hf_{k-2}}{2} \int_0^1 (v^3 + 4v^2 + 3v) dv - \\ &- \frac{hf_{k-1}}{2} \int_0^1 (v^3 + 5v^2 + 6v) dv + \\ &+ \frac{hf_k}{6} \int_0^1 (v^3 + 6v^2 + 11v + 6) dv \end{aligned} \quad (6.6)$$

al evaluar resulta,

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &\approx -\frac{hf_{k-3}}{6} \left(\frac{9}{4}\right) + \frac{hf_{k-2}}{2} \left(\frac{37}{12}\right) - \\ &- \frac{hf_{k-1}}{2} \left(\frac{59}{12}\right) + \frac{hf_k}{6} \left(\frac{55}{4}\right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

factorizando el término  $h/24$  (don de  $h$  es el tamaño de paso) se obtiene:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt \approx \frac{h}{24} (-9f_{k-3} + 37f_{k-2} - 59f_{k-1} + 55f_k) \quad (6.8)$$

sustituyendo la ecuación (6.8) en la ecuación (6.2) se tiene:

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \frac{h}{24}(-9f_{k-3} + 37f_{k-2} - 59f_{k-1} + 55f_k) \quad (6.9)$$

La ecuación anterior es el predictor para el método de Adams-Bashforth. Por notación se cambia  $y_{k+1}$  por  $p_{k+1}$ , indicando que es el predictor:

$$p_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(-9f_{k-3} + 37f_{k-2} - 59f_{k-1} + 55f_k) + E_P \quad (6.10)$$

donde  $E_P$  denota que éste es el error de truncamiento del predictor y se analizará en la sección 6.3.

## 6.2. Corrector del método Adams-Moulton

Como se realizó en la sección (6.1), la deducción del corrector se basa en la en la integración numérica de la EDO general  $y'(t) = f(t, y(t))$ , entre los límites  $t_k$  y  $t_{k+1}$ . La función en la integral de la ecuación (6.2) se aproxima con un polinomio interpolador de Lagrange que pasa por los puntos  $(t_{k-2}, f_{k-2})$ ,  $(t_{k-1}, f_{k-1})$ ,  $(t_k, f_k)$  y el nuevo punto  $(t_{k+1}, f_{k+1}) = (t_{k+1}, f(t_{k+1}, p_{k+1}))$ . De esta forma se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &\approx f_{k-2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t-t_{k-1})(t-t_k)(t-t_{k+1})}{(t_{k-2}-t_{k-1})(t_{k-2}-t_k)(t_{k-2}-t_{k+1})} dt + \\ &+ f_{k-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t-t_{k-2})(t-t_k)(t-t_{k+1})}{(t_{k-1}-t_{k-2})(t_{k-1}-t_k)(t_{k-1}-t_{k+1})} dt + \\ &+ f_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t-t_{k-2})(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})}{(t_k-t_{k-2})(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})} dt + \\ &+ f_{k+1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t-t_{k-2})(t-t_{k-1})(t-t_k)}{(t_{k+1}-t_{k-2})(t_{k+1}-t_{k-1})(t_{k+1}-t_k)} dt \end{aligned} \quad (6.11)$$

Sea  $t = t_k + vh$  de manera que  $t - t_k = vh$ ,  $dt = h dv$  y  $t - t_{k+1} = t - (t_k + h)$ , luego  $t - t_{k+1} = t - t_k - h = vh - h = h(v - 1)$ , en general  $t - t_{k-i} = h(v + i)$ , además  $t_i - t_j = (i - j)h$ . Reemplazando en (6.11) se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt &\approx f_{k-2} \int_0^1 \frac{h(v+1)(vh)h(v-1)}{-h(-2h)(3h)} h dv + \\ &+ f_{k-1} \int_0^1 \frac{h(v+2)(hv)h(v-1)}{h(-h)(-2h)} h dv + \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned}
& + f_k \int_0^1 \frac{h(v+2)h(v+1)h(v-1)}{2h(h)(-h)} h dv + \\
& + f_{k+1} \int_0^1 \frac{h(v+2)h(v+1)(hv)}{h(2h)(3h)} h dv
\end{aligned}$$

Simplificando y evaluando las integrales resulta,

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt \approx \frac{h}{24} (f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1}) \quad (6.13)$$

al reemplazar el valor de la integral de la ecuación (6.13) en la ecuación (6.2) se obtiene:

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \frac{h}{24} (f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1}) \quad (6.14)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1}) + E_c \quad (6.15)$$

La ecuación anterior es el corrector de Adams-Moulton, donde  $E_c$  es el error de truncamiento del corrector.

### 6.3. Estimación del error de truncamiento del predictor

La deducción del error de truncamiento del predictor se puede desarrollar aplicando el polinomio interpolador de Lagrange (ver anexo 1), sin embargo, se deduce a continuación desarrollando la expansión de la serie de Taylor respecto a un valor inicial  $y_0$  como sigue:

$$y_k = y_0 + (kh)y_0^{(1)} + \frac{1}{2}(kh)^2 y_0^{(2)} + \frac{1}{6}(kh)^3 y_0^{(3)} + \frac{1}{24}(kh)^4 y_0^{(4)} + \frac{1}{120}(kh)^5 y_0^{(5)} + \dots \quad (6.16)$$

Reemplazando los valores de  $k = 1$ ,  $k = 2$  y derivando la ecuación (6.16) se obtiene:

$$y_1 = y_0 + hy_0^{(1)} + \frac{1}{2}h^2 y_0^{(2)} + \frac{1}{6}h^3 y_0^{(3)} + \frac{1}{24}h^4 y_0^{(4)} + \frac{1}{120}h^5 y_0^{(5)} + \dots \quad (6.17)$$

$$y_2 = y_0 + 2hy_0^{(1)} + 2h^2 y_0^{(2)} + \frac{4}{3}h^3 y_0^{(3)} + \frac{2}{3}h^4 y_0^{(4)} + \frac{4}{15}h^5 y_0^{(5)} + \dots \quad (6.18)$$

$$y_k^{(1)} = y_0^{(1)} + (kh)y_0^{(2)} + \frac{1}{2}(kh)^2 y_0^{(3)} + \frac{1}{6}(kh)^3 y_0^{(4)} + \frac{1}{24}(kh)^4 y_0^{(5)} + \dots \quad (6.19)$$

si se restan las ecuaciones (6.17) y (6.18) resulta:

$$y_2 - y_1 = hy_0^{(1)} + \frac{3}{2}h^2y_0^{(2)} + \frac{7}{6}h^3y_0^{(3)} + \frac{5}{8}h^4y_0^{(4)} + \frac{31}{120}h^5y_0^{(5)} + \dots \quad (6.20)$$

Por otro lado, para valores de  $k = -2$ ,  $k = 1$  y  $k = -1$  en la ecuación (6.19) se obtienen:

$$y_{-2}^{(1)} = y_0^{(1)} - 2hy_0^{(2)} + 2h^2y_0^{(3)} - \frac{4}{3}h^3y_0^{(4)} + \frac{2}{3}h^4y_0^{(5)} + \dots \quad (6.21)$$

$$y_1^{(1)} = y_0^{(1)} + hy_0^{(2)} + \frac{1}{2}h^2y_0^{(3)} + \frac{1}{6}h^3y_0^{(4)} + \frac{1}{24}h^4y_0^{(5)} + \dots \quad (6.22)$$

$$y_{-1}^{(1)} = y_0^{(1)} - hy_0^{(2)} + \frac{1}{2}h^2y_0^{(3)} - \frac{1}{6}h^3y_0^{(4)} + \frac{1}{24}h^4y_0^{(5)} + \dots \quad (6.23)$$

Para obtener los coeficientes de la ecuación del predictor (6.9), se multiplica a ambos lados de las ecuaciones (6.21), (6.22) y (6.23) por  $-9$ ,  $55$  y  $37$  respectivamente, se obtiene:

$$-9y_{-2}^{(1)} = -9y_0^{(1)} + 18hy_0^{(2)} - 18h^2y_0^{(3)} + 12h^3y_0^{(4)} - 6h^4y_0^{(5)} + \dots \quad (6.24)$$

$$55y_1^{(1)} = 55y_0^{(1)} + 55hy_0^{(2)} + \frac{55}{2}h^2y_0^{(3)} + \frac{55}{6}h^3y_0^{(4)} + \frac{55}{24}h^4y_0^{(5)} + \dots \quad (6.25)$$

$$37y_{-1}^{(1)} = 37y_0^{(1)} - 37hy_0^{(2)} + \frac{37}{2}h^2y_0^{(3)} - \frac{37}{6}h^3y_0^{(4)} + \frac{37}{24}h^4y_0^{(5)} + \dots \quad (6.26)$$

Al sumar y simplificar las ecuaciones (6.24), (6.25) y (6.26) se tiene:

$$-9y_{-2}^{(1)} + 55y_1^{(1)} - 59y_0^{(1)} + 37y_{-1}^{(1)} = 24y_0^{(1)} + 36hy_0^{(2)} + 28h^2y_0^{(3)} + 15h^3y_0^{(4)} - \frac{13}{6}h^4y_0^{(5)} + \dots \quad (6.27)$$

Adicionando a ambos lados  $-y_k$  de la ecuación (6.9) se tiene:

$$y_{k+1} - y_k = \frac{h}{24}(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}) + E_P \quad (6.28)$$

Ahora reemplazando  $k = 1$  de la ecuación (6.28) y teniendo en cuenta que  $y_i^{(1)} = f_i$  para  $i = -2, -1, 0, 1$  se llega a:

$$y_2 - y_1 = \frac{h}{24}(55y_1^{(1)} - 59y_0^{(1)} + 37y_{-1}^{(1)} - 9y_{-2}^{(1)}) + E_P \quad (6.29)$$

Sustituyendo los resultados obtenidos en las ecuaciones (6.20) y (6.27) en la ecuación

(6.29) y simplificando se tiene el error de truncamiento del predictor:

$$E_P \approx \frac{251}{720} h^5 y_0^{(5)} = \frac{251}{720} y^{(5)}(\xi_1) h^5 \quad (6.30)$$

donde  $\xi_1 \in [t_k, t_{k+1}]$

#### 6.4. Estimación del error de truncamiento del corrector

Como se realizó en la sección (6.3), la deducción del error de truncamiento del corrector se basa en el desarrollo de la expansión de la serie de Taylor alrededor de  $y_0$ , como sigue:

$$y_k = y_0 + (kh)y_0^{(1)} + \frac{1}{2}(kh)^2 y_0^{(2)} + \frac{1}{6}(kh)^3 y_0^{(3)} + \frac{1}{24}(kh)^4 y_0^{(4)} + \frac{1}{120}(kh)^5 y_0^{(5)} + \dots \quad (6.31)$$

Reemplazando los valores  $k = 1$ ,  $k = 2$  y sacando la primera derivada de la ecuación (6.31) se obtiene:

$$y_1 = y_0 + hy_0^{(1)} + \frac{1}{2}h^2 y_0^{(2)} + \frac{1}{6}h^3 y_0^{(3)} + \frac{1}{24}h^4 y_0^{(4)} + \frac{1}{120}h^5 y_0^{(5)} + \dots \quad (6.32)$$

$$y_2 = y_0 + 2hy_0^{(1)} + 2h^2 y_0^{(2)} + \frac{4}{3}h^3 y_0^{(3)} + \frac{2}{3}h^4 y_0^{(4)} + \frac{4}{15}h^5 y_0^{(5)} + \dots \quad (6.33)$$

$$y_k^{(1)} = y_0^{(1)} + (kh)y_0^{(2)} + \frac{1}{2}(kh)^2 y_0^{(3)} + \frac{1}{6}(kh)^3 y_0^{(4)} + \frac{1}{24}(kh)^4 y_0^{(5)} + \dots \quad (6.34)$$

Si se restan las ecuaciones (6.32) y (6.33) resulta:

$$y_2 - y_1 = hy_0^{(1)} + \frac{3}{2}h^2 y_0^{(2)} + \frac{7}{6}h^3 y_0^{(3)} + \frac{5}{8}h^4 y_0^{(4)} + \frac{31}{120}h^5 y_0^{(5)} + \dots \quad (6.35)$$

Reemplazando  $k = 2$ ,  $k = 1$  y  $k = -1$  en la ecuación (6.34) se llega a:

$$y_2^{(1)} = y_0^{(1)} + 2hy_0^{(2)} + 2h^2 y_0^{(3)} + \frac{4}{3}h^3 y_0^{(4)} + \frac{2}{3}h^4 y_0^{(5)} + \dots \quad (6.36)$$

$$y_1^{(1)} = y_0^{(1)} + hy_0^{(2)} + \frac{1}{2}h^2 y_0^{(3)} + \frac{1}{6}h^3 y_0^{(4)} + \frac{1}{24}h^4 y_0^{(5)} + \dots \quad (6.37)$$

$$y_{-1}^{(1)} = y_0^{(1)} - hy_0^{(2)} + \frac{1}{2}h^2 y_0^{(3)} - \frac{1}{6}h^3 y_0^{(4)} + \frac{1}{24}h^4 y_0^{(5)} + \dots \quad (6.38)$$

Si se multiplican las ecuaciones (6.36) y (6.37) por 9 y 19 respectivamente, luego se tiene que:

$$9y_2^{(1)} = 9y_0^{(1)} + 18hy_0^{(2)} + 18h^2y_0^{(3)} + 12h^3y_0^{(4)} + 6h^4y_0^{(5)} + \dots \quad (6.39)$$

$$19y_1 = 19y_0^{(1)} + 19hy_0^{(2)} + \frac{19}{2}h^2y_0^{(3)} + \frac{19}{6}h^3y_0^{(4)} + \frac{19}{24}h^4y_0^{(5)} + \dots \quad (6.40)$$

Sumando las ecuaciones (6.39), (6.40), (6.38) y simplificando se tiene:

$$9y_2^{(1)} + 19y_1^{(1)} - 5y_0^{(1)} + y_{-1}^{(1)} = 24y_0^{(1)} + 36hy_0^{(2)} + 28h^2y_0^{(3)} + 15h^3y_0^{(4)} + \frac{41}{6}h^4y_0^{(5)} + \dots \quad (6.41)$$

Por otro lado, adicionando a ambos lados  $-y_k$  de la ecuación (6.15) se tiene que:

$$y_{k+1} - y_k = \frac{h}{24}(f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1}) + E_C \quad (6.42)$$

Si se sustituye  $k = 1$  en la ecuación (6.42) y teniendo en cuenta que  $y_i^{(1)} = f_i$  para  $i = -2, -1, 0, 1, 2$  se llega a:

$$y_2 - y_1 = \frac{h}{24}(y_{-1}^{(1)} - 5y_0^{(1)} + 19y_1^{(1)} + 9y_2^{(1)}) + E_P(y, h) \quad (6.43)$$

Finalmente se reemplaza los resultados obtenidos en las ecuaciones (6.35) y (6.41) en la ecuación (6.43), se simplifica y se tiene el error de truncamiento del corrector:

$$E_C \approx -\frac{19}{720}h^5y_0^{(5)} = -\frac{19}{720}y^{(5)}(\xi_2)h^5 \quad (6.44)$$

donde  $\xi_2 \in [t_k, t_{k+1}]$ .

## 6.5. Modificador del predictor

En el error de truncamiento local se debe conocer la quinta derivada de la función, para obtener una expresión aproximada del error en el predictor  $p_{k+1}$  y el corrector  $y_{k+1}$  que no requiera conocer  $y^{(5)}$ , se escribe  $y(t_{k+1}) = p_{k+1} + E_P = y_{k+1} + E_C$ , suponiendo de que  $h$  es pequeña, que  $y^{(5)}$  es prácticamente constante en el intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$  y usando las expresiones de las ecuaciones (6.44) y (6.30) se tiene:

$$p_{k+1} - y_{k+1} = E_C - E_P = -\frac{19}{720}h^5y^{(5)}(\xi) - \frac{251}{720}h^5y^{(5)}(\xi) \quad (6.45)$$

$$p_{k+1} - y_{k+1} = -\frac{270}{720}h^5y^{(5)}(\xi) \quad (6.46)$$

$$\frac{720}{270}(p_{k+1} - y_{k+1}) = -h^5 y^{(5)}(\xi) \quad (6.47)$$

Si se multiplica a ambos lados de la ecuación (6.47) por  $\frac{19}{720}$  se obtiene:

$$\frac{19}{270}(p_{k+1} - y_{k+1}) = -\frac{19}{720}h^5 y^{(5)}(\xi) = E_c \quad (6.48)$$

Sea

$$y(t_{k+1}) = y_{k+1} + E_c = y_{k+1} + \frac{19}{270}(p_{k+1} - y_{k+1}) \quad (6.49)$$

Adicionando  $-p_{k+1}$  a ambos lados, se tiene:

$$y(t_{k+1}) - p_{k+1} \approx y_{k+1} + \frac{19}{270}p_{k+1} - \frac{19}{270}y_{k+1} - p_{k+1} \quad (6.50)$$

$$y(t_{k+1}) - p_{k+1} \approx -\frac{251}{270}p_{k+1} + \frac{251}{270}y_{k+1} \quad (6.51)$$

$$y(t_{k+1}) \approx p_{k+1} + \frac{251}{270}(y_{k+1} - p_{k+1}) \quad (6.52)$$

La fórmula (6.52) se puede usar para mejorar el valor del predictor, estima el error basada en el predictor y en el corrector y no requiere conocer la quinta derivada. Se supone un cambio lento entre la diferencia entre el predictor y el corrector de un paso a otro, entonces se reemplaza,  $p_k$  por  $p_{k+1}$  e  $y_k$  por  $y_{k+1}$  en la ecuación (6.52) para obtener la siguiente fórmula modificada:

$$mp_{k+1} = p_{k+1} + \frac{251}{270}(y_k - p_k) \quad (6.53)$$

La anterior ecuación se conoce como el modificador del predictor. Ahora se puede reemplazar la fórmula modificada en la ecuación (6.15) para obtener:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f(t_{k+1}, mp_{k+1})) \quad (6.54)$$

## 6.6. Modificador de corrector

De igual forma se adiciona  $-y_{k+1}$  a ambos lados de la ecuación (6.52) para obtener:

$$y(t_{k+1}) - y_{k+1} \approx p_{k+1} + \frac{251}{270}(y_{k+1} - p_{k+1}) - y_{k+1} \quad (6.55)$$

$$y(t_{k+1}) - y_{k+1} \approx -\frac{19}{270}(y_{k+1} - p_{k+1}) \quad (6.56)$$

$$y(t_{k+1}) \approx y_{k+1} - \frac{19}{270}(y_{k+1} - p_{k+1}) \quad (6.57)$$

Por lo tanto, el modificador del corrector de Adams-Moulton es:

$$my_{k+1} \approx y_{k+1} - \frac{19}{270}(y_{k+1} - p_{k+1}) \quad (6.58)$$

## 6.7. Criterio de convergencia

La convergencia de un método numérico garantiza que al realizar un “buen número” de iteraciones, las aproximaciones obtenidas terminan por acercarse cada vez más al valor verdadero. Las iteraciones están relacionadas con el tamaño de paso que utiliza un determinado algoritmo. Se desea saber que tan pequeño debe ser  $h$  en el método de Adams-Bashforth-Moulton para evitar correcciones sucesivas [17]:

- Sea  $y_p$  el valor del predictor
- Sea  $y_c$  el valor del corrector
- $y_{cc}, y_{ccc}, \dots$  el valor del corrector si se hace correcciones sucesivas.
- $y_\infty$  la convergencia de las correcciones sucesivas.

Sea

$$D = y_c - y_p \quad (6.59)$$

Los cambios de  $y_c$  mediante la corrección según la ecuación (6.15) son:

$$\begin{aligned} y_{cc} - y_c &= (y_k + \frac{h}{24}(9y'_c + 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2})) - \\ &\quad - (y_k + \frac{h}{24}(9y'_p + 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2})) = \\ &= \frac{9h}{24}(y'_c - y'_p) \end{aligned} \quad (6.60)$$

Si se aplica el teorema del valor medio a la ecuación (6.60), se tiene:



$$y'_c - y'_p \approx f(t_{k+1}, y_c) - f(t_{k+1}, y_p) = \frac{f(t_{k+1}, y_c) - f(t_{k+1}, y_p)}{(y_c - y_p)}(y_c - y_p) \approx f_y(\xi_1)D \quad (6.61)$$

donde  $y_c \leq \xi_1 \leq y_p$ , reemplazando (6.61) en (6.60) se puede ver que:

$$y_{cc} - y_c = \frac{9h}{24}(y'_c - y'_p) \approx \frac{9h}{24}f_y(\xi_1)D \quad (6.62)$$

Al realizar una nueva corrección de la ecuación del corrector (6.15) se obtiene:

$$\begin{aligned} y_{ccc} - y_{cc} &= (y_k + \frac{h}{24}(9y'_{cc} + 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2})) - (y_k + \frac{h}{24}(9y'_c + 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2})) \\ &= \frac{9h}{24}(y'_{cc} - y'_c) = \frac{9h}{24} \left[ \frac{f(t_{k+1}, y_{cc}) - f(t_{k+1}, y_c)}{(y_{cc} - y_c)}(y_{cc} - y_c) \right] \\ &\approx \frac{9h}{24}f_y(\xi_2)(y_{cc} - y_c) = \frac{9h}{24}f_y(\xi_2) \left[ \frac{9h}{24}f_y(\xi_1)D \right] \\ &\approx \left( \frac{9h}{24} \right)^2 [f_y(\xi)]^2 D \end{aligned} \quad (6.63)$$

donde  $y_c \leq \xi_2 \leq y_{cc}$ . En otras recurrencias el resultado será similar, se tendrá  $y_\infty$  sumando todas la correcciones de  $y_p$ :

$$\begin{aligned} y_\infty &= y_p + (y_c - y_p) + (y_{cc} - y_c) + (y_{ccc} - y_{cc}) + \dots \\ &\approx y_p + D + \frac{9h}{24}f_y(\xi)D + \left( \frac{9h}{24}f_y(\xi) \right)^2 D + \left( \frac{9h}{24}f_y(\xi) \right)^3 D + \dots \end{aligned} \quad (6.64)$$

Si se hace,

$$r = \frac{9h}{24}f_y(\xi) \quad (6.65)$$

Y se reemplaza la ecuación (6.65) en la ecuación (6.64) se obtiene:

$$y_\infty = y_p + D[1 + r + r^2 + r^3 + \dots] \quad (6.66)$$

$$y_\infty \approx y_p + \frac{D}{1-r} \quad (6.67)$$

La convergencia de la serie dada por la ecuación (6.64) se da sólo si cumple:

$$|r| = \frac{9h|f_y(\xi)|}{24} = \frac{9h|f_y(t_k, y_k)|}{24} < 1 \quad (6.68)$$

Luego, el primer criterio de convergencia está dado por:

$$h < \frac{24}{9|f_y(t_k, y_k)|} \quad (6.69)$$

Se requiere que  $y_c$  y  $y_\infty$  estén en el mismo  $N$  –ésimo decimal, por lo tanto se utiliza las ecuaciones (6.66) y (6.59) para llegar a:

$$y_\infty - y_c \approx \left( y_p + \frac{D}{1-r} \right) - (y_p + D) = \frac{rD}{1-r} < 10^{-N} \quad (6.70)$$

Si  $r \ll 1$ , se tiene la aproximación  $r/(1-r) \approx r$ , de esta forma se asegura que el primer criterio de convergencia es adecuado y se puede escribir el segundo criterio de convergencia:

$$D \cdot 10^N < \left| \frac{1}{r} \right| = \frac{24}{9h|f_y(t_k, y_k)|} \quad (6.71)$$

En donde  $f_y(t_k, y_k)$ , representa la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $y$ . Para las ecuaciones de la cinética puntual, se realiza la derivada de la ecuación (3.2) con respecto a  $C_i$ , de este modo se tiene que:  $f_y(t_k, y_k) = f_{c_i} = -\lambda_i$ , el valor de estas constantes se presentan en la sección (7.1).

## 6.8. Estabilidad

La estabilidad numérica de un método junto al criterio de convergencia define que tan buen resultado podemos obtener usando métodos aproximados para calcular cierto problema matemático. Los métodos de pasos múltiples pueden ser estables, en algunos casos, para todos los valores de  $h$  y en otros casos para una clase de valores de  $h$ . Para determinar que un método multipaso dado es estable se puede proceder de la siguiente manera: Si el método multipaso lleva a una ecuación de diferencia de orden  $n$ , se hallan las raíces de la ecuación característica correspondiente a la ecuación homogénea de diferencia [22].

Sea  $\varphi_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , la solución general de la ecuación homogénea de diferencia, entonces

$$y_k = c_1 \varphi_1^k + c_2 \varphi_2^k + \dots + c_n \varphi_n^k \quad (6.72)$$

Una de estas soluciones, tendrá solución exacta de la ecuación diferencial cuando  $h \rightarrow 0$ .

Todas las otras soluciones son extrañas. Un método multipaso se define estable si las raíces extrañas satisfacen, cuando  $h \rightarrow 0$ , la condición:

$$|\varphi_i| \leq 1, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (6.73)$$

Bajo estas condiciones cualquier error introducido en el cálculo desaparece cuando  $k$  crece, mientras que si alguna  $\varphi_i$  extraña es mayor que uno en longitud, los errores crecen exponencialmente.

Para la ecuación diferencial general  $y' = f(t, y)$ , será imposible obtener las raíces  $\varphi_i$  de la ecuación característica. Una consideración de la ecuación especial  $y' = Ay$ ,  $A$  constante, es generalmente suficiente. La estabilidad o inestabilidad del método puede depender del coeficiente  $A$ . La solución analítica de  $y' = Ay$  con condición inicial  $y(t_0) = y_0$  es:

$$y(t) = y_0 e^{A(t-t_0)} \quad (6.74)$$

Así, el signo de  $A$  determina si la solución verdadera decae o crece exponencialmente.

Para el predictor de método de Adams Bashforth, se tiene:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (-9f_{k-3} + 37f_{k-2} - 59f_{k-1} + 55f_k) \quad (6.75)$$

Si se toma

$$y' = f(t_k, y_k) = Ay \quad (6.76)$$

Reemplazando (6.76) en (6.75) se tiene:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (-9Ay_{k-3} + 37Ay_{k-2} - 59Ay_{k-1} + 55Ay_k) \quad (6.77)$$

Simplificando se obtiene la siguiente ecuación de diferencia de orden 4:

$$y_{k+1} - y_k - \frac{hA}{24} (-9y_{k-3} + 37y_{k-2} - 59y_{k-1} + 55y_k) = 0 \quad (6.78)$$

La ecuación característica para esta ecuación en diferencia es:

$$\varphi^4 - \varphi^3 - \frac{hA}{24} (55\varphi^3 - 59\varphi^2 + 37\varphi - 9) = 0 \quad (6.79)$$

Las raíces de esta ecuación son, desde luego, función de  $h$ . Sin embargo, cuando  $h \rightarrow 0$ , la ecuación (6.79) se reduce a:

$$\varphi^4 - \varphi^3 = 0 \quad (6.80)$$

Cuyas raíces son:  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ ,  $\varphi_4 = 1$ , sus magnitudes son menor o iguales que uno, por consiguiente, el predictor del método de Adams Bashforth es estable para  $h$  suficientemente pequeño.

Para el corrector del método de Adams Moulton se tiene:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1}) \quad (6.81)$$

Reemplazando (6.76) en (6.81) se obtiene:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(Ay_{k-2} - 5Ay_{k-1} + 19Ay_k + 9Ay_{k+1}) \quad (6.82)$$

Simplificando se obtiene la siguiente ecuación de diferencia de orden 3:

$$y_{k+1} - y_k - \frac{Ah}{24}(y_{k-2} - 5y_{k-1} + 19y_k + 9y_{k+1}) \quad (6.83)$$

La ecuación característica de la ecuación en diferencia (6.83) es:

$$\varphi^3 - \varphi^2 - \frac{hA}{24}(9\varphi^3 + 19\varphi^2 - 5\varphi + 1) = 0 \quad (6.84)$$

Las raíces de la ecuación (6.84) están en función de  $h$ . Sin embargo, cuando  $h \rightarrow 0$ , la ecuación anterior se reduce a:

$$\varphi^3 - \varphi^2 = 0 \quad (6.85)$$

Cuyas raíces son:  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ,  $\varphi_3 = 1$ , sus magnitudes son menor o iguales que uno, luego, el corrector del método de Adams Moulton es estable para  $h$  suficientemente pequeño.

Como se ve en las ecuaciones (6.80) y (6.85), cuando  $h \rightarrow 0$  la raíz dominante es 1 mientras que las demás raíces se encuentran en el origen.

La forma general de la ecuación característica de  $k - \text{pasos}$  del método de Adams Bashforth Moulton es equivalente a:

$$\varphi^{k-1}(\varphi - 1) = 0 \quad (6.86)$$

Por lo tanto, sin importar  $k$ , se tendrá una raíz en el círculo unitario y las demás en el origen, por consiguiente el método es estable.

## 6.9. Generalización del predictor

En anteriores secciones se realizó la deducción del predictor y el corrector del método de Adams Bashforth Moulton que relacionan  $y_{k+1}$  con  $y_k, y_{k-1}, \dots$  utilizando la definición del polinomio interpolador de Lagrange. En esta sección se va utilizar un método completamente diferente para deducir dichas formas, que a la vez nos permiten obtener otras fórmulas importantes.

Para este propósito, se define el generalizador lineal de  $n$ -pasos de la ecuación diferencial con coeficientes constantes o fórmula generalizada para la integración de una ED.

$$y_{k+1} = \alpha_1 y_k + \alpha_2 y_{k-1} + \dots + \alpha_n y_{k+1-n} + h[\beta_0 y'_{k+1} + \beta_1 y'_k + \dots + \beta_n y'_{k+1-n}] + E_{k+1} \frac{y^{(n+1)}(\xi) h^{(n+1)}}{(n+1)!} \quad (6.87)$$

Los resultados de la ecuación (6.87), para valores de  $\beta_0 = 0$  hace referencia a ecuaciones abiertas, explícitas o predictoras; para el caso en el que  $\beta_0 \neq 0$ , hace referencia a una ecuación cerrada, implícita o correctora.

La fórmula resultante de la ecuación (6.87) con  $n$  puntos previos, se puede desarrollar mediante el método de coeficientes indeterminados. La generalización del predictor en el caso explícito para  $n = 4$  es:

$$y_{k+1} = \alpha_1 y_k + \alpha_2 y_{k-1} + \alpha_3 y_{k-2} + \alpha_4 y_{k-3} + h[\beta_1 y'_k + \beta_2 y'_{k-1} + \beta_3 y'_{k-2} + \beta_4 y'_{k-3}] + E_{k+1} \frac{y^{(5)}(\xi) h^5}{5!} \quad (6.88)$$

Los coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  se encuentran al realizar la expansión de Taylor de  $y_{k-1}, y_{k-2}, y_{k-3}, y'_{k-1}, y'_{k-2}, y'_{k-3}$  alrededor de  $h$ , reemplazando estos valores en la ecuación (6.88), y teniendo en cuenta que  $y' = f$  se tiene:

$$\begin{aligned} y_{k+1} = & \alpha_1 y_k + \alpha_2 \left[ y_k + y'_k(-h) + \frac{1}{2!} y''_k(-h)^2 + \frac{1}{3!} y'''_k(-h)^3 + \frac{1}{4!} y^{(4)}_k(-h)^4 + \frac{1}{5!} y^{(5)}_k(\xi)(-h)^5 + \dots \right] + \\ & + \alpha_3 \left[ y_k + y'_k(-2h) + \frac{1}{2!} y''_k(-2h)^2 + \frac{1}{3!} y'''_k(-2h)^3 + \frac{1}{4!} y^{(4)}_k(-2h)^4 + \frac{1}{5!} y^{(5)}_k(\xi)(-2h)^5 + \dots \right] + \\ & + \alpha_4 \left[ y_k + y'_k(-3h) + \frac{1}{2!} y''_k(-3h)^2 + \frac{1}{3!} y'''_k(-3h)^3 + \frac{1}{4!} y^{(4)}_k(-3h)^4 + \frac{1}{5!} y^{(5)}_k(\xi)(-3h)^5 + \dots \right] + \end{aligned} \quad (6.89)$$

$$\begin{aligned}
& +h \left\{ \beta_1 y'_k + \beta_2 \left[ y'_k + y_k^{(2)}(-h) + \frac{1}{2!} y_k^{(3)}(-h)^2 + \frac{1}{3!} y_k^{(4)}(-h)^3 + \frac{1}{4!} y_k^{(5)}(\xi)(-h)^4 + \dots \right] \right. \\
& + \beta_3 \left[ y'_k + y_k^{(2)}(-2h) + \frac{1}{2!} y_k^{(3)}(-2h)^2 + \frac{1}{3!} y_k^{(4)}(-2h)^3 + \frac{1}{4!} y_k^{(5)}(\xi)(-2h)^4 + \dots \right] + \\
& \left. + \beta_4 \left[ y'_k + y_k^{(2)}(-3h) + \frac{1}{2!} y_k^{(3)}(-3h)^2 + \frac{1}{3!} y_k^{(4)}(-3h)^3 + \frac{1}{4!} y_k^{(5)}(\xi)(-3h)^4 + \dots \right] \right\} + E_5 \frac{y^{(5)}(\xi)h^5}{5!}
\end{aligned}$$

De otra forma, el desarrollo de Taylor de la función  $y_{k+1}$  es:

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{1}{2!} y_k^{(2)} h^2 + \frac{1}{3!} y_k^{(3)} h^3 + \frac{1}{4!} y_k^{(4)} h^4 + \frac{1}{5!} y_k^{(5)}(\xi) h^5 + \dots \quad (6.90)$$

Igualando los coeficientes semejantes de las ecuaciones (6.89) y (6.90) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 1 \\
-\alpha_2 - 2\alpha_3 - 3\alpha_4 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 &= 1 \\
\frac{1}{2}\alpha_2 + 2\alpha_3 + \frac{9}{2}\alpha_4 - \beta_2 - 2\beta_3 - 3\beta_4 &= \frac{1}{2} \\
-\frac{1}{6}\alpha_2 - \frac{4}{3}\alpha_3 - \frac{9}{2}\alpha_4 + \frac{1}{2}\beta_2 + 2\beta_3 + \frac{9}{2}\beta_4 &= \frac{1}{6} \\
\frac{1}{24}\alpha_2 + \frac{2}{3}\alpha_3 + \frac{27}{8}\alpha_4 - \frac{1}{6}\beta_2 - \frac{4}{3}\beta_3 - \frac{9}{2}\beta_4 &= \frac{1}{24}
\end{aligned} \quad (6.91)$$

Resolviendo el sistema de la ecuación (6.91) se obtienen los coeficientes del predictor generalizado de la ecuación (6.88),

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4, \quad \alpha_2 = \alpha_2, \quad \alpha_3 = \alpha_3, \quad \alpha_4 = \alpha_4 \\
\beta_1 &= \frac{55 + 9\alpha_2 + 8\alpha_3 + 9\alpha_4}{24}, \quad \beta_2 = \frac{-59 + 19\alpha_2 + 32\alpha_3 + 27\alpha_4}{24} \\
\beta_3 &= \frac{37 - 5\alpha_2 + 8\alpha_3 + 27\alpha_4}{24}, \quad \beta_4 = \frac{-9 + \alpha_2 + 9\alpha_4}{24}
\end{aligned} \quad (6.92)$$

El término del error se puede realizar de manera análoga, igualando términos semejantes de la ecuación (6.89) y (6.90) en donde se obtiene lo siguiente:

$$-\frac{\alpha_2}{5!} - \frac{32\alpha_3}{5!} - \frac{243\alpha_4}{5!} + \frac{\beta_2}{4!} + \frac{16\beta_3}{4!} + \frac{81\beta_4}{4!} + \frac{E_5}{5!} = \frac{1}{5!} \quad (6.93)$$

$$-\frac{\alpha_2}{5} - \frac{32\alpha_3}{5} - \frac{243\alpha_4}{5} + \beta_2 + 16\beta_3 + 81\beta_4 + \frac{E_5}{5} = \frac{1}{5} \quad (6.94)$$

Al reemplazar  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  y  $\beta_4$  de (6.92) en (6.94) y multiplicar por 5 se obtiene:

$$-\alpha_2 - 32\alpha_3 - 243\alpha_4 + 5 \left( \frac{-59 + 19\alpha_2 + 32\alpha_3 + 27\alpha_4}{24} \right) + \quad (6.95)$$

$$+ 80 \left( \frac{37 - 5\alpha_2 + 8\alpha_3 + 27\alpha_4}{24} \right) + 405 \left( \frac{-9 + \alpha_2 + 9\alpha_4}{24} \right) + E_5 = 1$$

$$\frac{19\alpha_2}{6} + \frac{4\alpha_3}{3} + \frac{9\alpha_4}{2} + E_5 - \frac{245}{6} = 1 \quad (6.96)$$

Si se despeja  $E_5$  de la ecuación (6.96) se tiene que:

$$E_5 = \frac{251 - 19\alpha_2 - 8\alpha_3 - 27\alpha_4}{6} \quad (6.97)$$

Multiplicando la ecuación (6.97) por  $h^5 y^{(5)}(\xi)/5!$  se obtiene el término del error del predictor generalizado del método de Adams Basforth Moulton.

Para el caso específico  $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ , se tiene

$$\beta_1 = \frac{55}{24}, \beta_2 = -\frac{59}{24}, \beta_3 = \frac{37}{24}, \beta_4 = -\frac{9}{24}, E_5 = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\xi), \quad (6.98)$$

reemplazando los valores de (6.98) en la ecuación (6.87) se tiene:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (-9y'_{k-3} + 37y'_{k-2} - 59y'_{k-1} + 55y'_k) + \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\xi), \quad (6.99)$$

que es el predictor del método de Adams-Bashforth-Moulton dado por la ecuación (6.10). El último término de la ecuación (6.99) es el error de truncamiento del corrector dado por la ecuación (6.44).

## 6.10. Generalización del corrector

Los resultados de la ecuación (6.88), haciendo  $\beta_0 \neq 0$  hace referencia a una ecuación implícita o correctora, la ecuación para  $n = 4$  puntos previos es

$$y_{k+1} = \alpha_1 y_k + \alpha_2 y_{k-1} + \alpha_3 y_{k-2} + h[\beta_0 y'_{k+1} + \beta_1 y'_k + \beta_2 y'_{k-1} + \beta_3 y'_{k-2}] + E_5 \frac{y^{(5)}(\xi)h^5}{5!} \quad (6.100)$$

Los coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  se pueden encontrar realizando la expansión de Taylor de cada  $y_{k-2}, y_{k-1}, y'_{k-1}, y'_{k-2}, y'_{k+1}$  alrededor de  $h$ , reemplazando estos valores en la ecuación (6.100), y teniendo en cuenta que  $y' = f$  se tiene que,

$$\begin{aligned} y_{k+1} = & \alpha_1 y_k + \alpha_2 \left[ y_k + y'_k(-h) + \frac{1}{2!} y_k^{(2)}(-h)^2 + \frac{1}{3!} y_k^{(3)}(-h)^3 + \frac{1}{4!} y_k^{(4)}(-h)^4 + \frac{1}{5!} y_k^{(5)}(\xi)(-h)^5 + \dots \right] + \\ & + \alpha_3 \left[ y_k + y'_k(-2h) + \frac{1}{2!} y_k^{(2)}(-2h)^2 + \frac{1}{3!} y_k^{(3)}(-2h)^3 + \frac{1}{4!} y_k^{(4)}(-2h)^4 + \frac{1}{5!} y_k^{(5)}(\xi)(-2h)^5 + \dots \right] + \\ & + h \left\{ \beta_0 \left[ y'_k + y_k^{(2)}h + \frac{1}{2!} y_k^{(3)}h^2 + \frac{1}{3!} y_k^{(4)}h^3 + \frac{1}{4!} y_k^{(5)}h^4 + \dots \right] + \beta_1 y'_k + \right. \\ & + \beta_2 \left[ y'_k + y_k^{(2)}(-h) + \frac{1}{2!} y_k^{(3)}(-h)^2 + \frac{1}{3!} y_k^{(4)}(-h)^3 + \frac{1}{4!} y_k^{(5)}(\xi)(-h)^4 + \dots \right] + \\ & \left. + \beta_3 \left[ y'_k + y_k^{(2)}(-2h) + \frac{1}{2!} y_k^{(3)}(-2h)^2 + \frac{1}{3!} y_k^{(4)}(-2h)^3 + \frac{1}{4!} y_k^{(5)}(\xi)(-2h)^4 + \dots \right] \right\} + E_5 \frac{y^{(5)}(\xi)h^5}{5!} \end{aligned} \quad (6.101)$$

De otra forma, el desarrollo de Taylor de la función  $y_{k+1}$  es:

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{1}{2!} y_k^{(2)} h^2 + \frac{1}{3!} y_k^{(3)} h^3 + \frac{1}{4!} y_k^{(4)} h^4 + \frac{1}{5!} y_k^{(5)}(\xi) h^5 + \dots \quad (6.102)$$

Igualando coeficientes semejantes de las ecuaciones (6.101) y (6.102) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

$$-\alpha_2 - 2\alpha_3 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$$



$$\frac{1}{2}\alpha_2 + 2\alpha_3 + \beta_0 - \beta_2 - 2\beta_3 = \frac{1}{2} \quad (6.103)$$

$$-\frac{1}{6}\alpha_2 - \frac{4}{3}\alpha_3 + \frac{1}{2}\beta_0 + \frac{1}{2}\beta_2 + 2\beta_3 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{24}\alpha_2 + \frac{2}{3}\alpha_3 + \frac{1}{6}\beta_0 - \frac{1}{6}\beta_2 - \frac{4}{3}\beta_3 = \frac{1}{24}$$

Resolviendo el sistema de la ecuación (6.103), se obtiene los coeficientes del corrector generalizado de la ecuación (6.100),

$$\alpha_1 = 1 - \alpha_2 - \alpha_3, \quad \alpha_2 = \alpha_2, \quad \alpha_3 = \alpha_3$$

$$\beta_0 = \frac{9 - \alpha_2}{24}, \quad \beta_1 = \frac{19 + 13\alpha_2 + 8\alpha_3}{24}, \quad \beta_2 = \frac{-5 + 13\alpha_2 + 32\alpha_3}{24}, \quad \beta_3 = \frac{1 - \alpha_2 + 8\alpha_3}{24} \quad (6.104)$$

El término del error se puede realizar de manera análoga, igualando términos semejantes de la ecuación (6.101) y (6.102) en donde se obtiene lo siguiente:

$$-\frac{\alpha_2}{5!} - \frac{32\alpha_3}{5!} + \frac{\beta_0}{4!} + \frac{\beta_2}{4!} + \frac{16\beta_3}{4!} + \frac{E_5}{5!} = \frac{1}{5!} \quad (6.105)$$

$$-\alpha_2 - 32\alpha_3 + 5\beta_0 + 5\beta_2 + 80\beta_3 + E_5 = 1 \quad (6.106)$$

Al reemplazar  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  de (6.104) en (6.106) se obtiene:

$$-\alpha_2 - 32\alpha_3 + 5\left(\frac{9 - \alpha_2}{24}\right) + 5\left(\frac{-5 + 13\alpha_2 + 32\alpha_3}{24}\right) + 80\left(\frac{1 - \alpha_2 + 8\alpha_3}{24}\right) + E_5 = 1 \quad (6.107)$$

$$-\frac{11\alpha_2}{6} + \frac{4\alpha_3}{3} + E_5 + \frac{25}{6} = 1 \quad (6.108)$$

Si se despeja  $E_5$  de la ecuación (6.108) se tiene que:

$$E_5 = \frac{-19 + 11\alpha_2 - 8\alpha_3}{6} \quad (6.109)$$

Multiplicando la ecuación (6.109) por  $h^5 y^{(5)}(\xi)/5!$  se obtiene el término del error del corrector generalizado del método de Adams Bashforth Moulton.

Para el caso específico  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ , se tiene:

$$\beta_0 = \frac{9}{24}, \beta_1 = \frac{19}{24}, \beta_2 = -\frac{5}{24}, \beta_3 = \frac{1}{24}, E_5 = -\frac{19}{720}h^5y^{(5)}(\xi) \quad (6.110)$$

Reemplazando los valores de (6.110) en la ecuación (6.100) se tiene:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(y'_{k-2} - 5y'_{k-1} + 19y'_k + 9y'_{k+1}) - \frac{19}{720}h^5y^{(5)}(\xi) \quad (6.111)$$

que es el corrector del método de Adams-Bashforth-Moulton dado por la ecuación (6.15). El último término de la ecuación (6.111) es el error de truncamiento del corrector dado por la ecuación (6.44).

A continuación se presentan algunas combinaciones entre predictores y correctores de la generalización del método que se tendrán en cuenta para realizar las simulaciones.

## 6.11. Combinación de las nuevas formulas predictoras y correctoras

La Tabla 1, muestra los valores que toma  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  y los valores de los coeficientes del predictor generalizado de la ecuación (6.88). Para obtener el error de truncamiento de los diferentes predictores se debe tener en cuenta que:  $E_p = \frac{E}{5!}y_k^{(5)}(\xi)h^5$ .

Table 1: Coeficientes de la ecuación explícita o predictora.

Coeficientes\Predictores	P1	P2	P3	P4	P5	P6
$\alpha_1 = 1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$	1	0	0	0	0	1/2
$\alpha_2 = \alpha_2$	0	1	0	0	1/3	1/2
$\alpha_3 = \alpha_3$	0	0	1	0	1/3	0
$\alpha_4 = \alpha_4$	0	0	0	1	1/3	0
$\beta_1 = (1/24)(55 + 9\alpha_2 + 8\alpha_3 + 9\alpha_4)$	55/24	8/3	21/8	8/3	191/72	119/48
$\beta_2 = (1/24)(-59 + 19\alpha_2 + 32\alpha_3 + 27\alpha_4)$	-59/24	-5/3	-9/8	-4/3	-11/8	-99/48
$\beta_3 = (1/24)(37 - 5\alpha_2 + 8\alpha_3 + 27\alpha_4)$	37/24	4/3	15/8	8/3	47/24	69/48
$\beta_4 = (1/24)(-9 + \alpha_2 + 9\alpha_4)$	-9/24	-1/3	-3/8	0	-17/72	-17/48
$E = (1/6)(251 - 19\alpha_2 - 8\alpha_3 - 27\alpha_4)$	251/6	116/3	243/6	224/6	233/6	116/4

La Tabla 2, muestra los valores que toma  $\alpha_2, \alpha_3$  y los valores de los coeficientes del corrector generalizado de la ecuación (6.100). Para obtener el error de truncamiento de los diferentes predictores se debe tener en cuenta que:  $E_c = \frac{E}{5!}y_k^{(5)}(\xi)h^5$ .

Table 2: Coeficientes de la ecuación implícita o correctora.

Coeficientes\Correctores	C1	C2	C3	C4	C5	C6
$\alpha_1 = 1 - \alpha_2 - \alpha_3$	1	0	0	1/3	1/2	0
$\alpha_2 = \alpha_2$	0	1	0	1/3	1/2	2/3
$\alpha_3 = \alpha_3$	0	0	1	1/3	0	1/3
$\beta_0 = (1/24)(9 - \alpha_2)$	9/24	1/3	3/8	13/36	17/48	25/72
$\beta_1 = (1/24)(19 + 13\alpha_2 + 8\alpha_3)$	19/24	4/3	9/8	13/12	17/16	91/72
$\beta_2 = (1/24)(-5 + 13\alpha_2 + 32\alpha_3)$	-5/24	1/3	9/8	5/12	1/16	43/72
$\beta_3 = (1/24)(1 - \alpha_2 + 8\alpha_3)$	1/24	0	3/8	5/36	1/48	1/8
$E = (1/6)(-19 + 11\alpha_2 - 8\alpha_3)$	-19/6	-4/3	-9/2	-3	-9/4	-43/18

A continuación se hace un resumen de las combinaciones entre predictores y correctores para las simulaciones, cada caso muestra las fórmulas de los predictores y correctores, errores, modificadores y máximo tamaño de paso.

### 6.11.1. Caso I

La Tabla 3 muestra el caso I, para el predictor se toman los coeficientes de la columna P1 de la Tabla 1 y para el corrector los coeficientes de la columna C1 de la Tabla 2, estos se reemplazan en las ecuaciones (6.88) y (6.100) respectivamente. La deducción de los modificadores se presentó en la sección 6.5 y 6.6, y el máximo tamaño de paso o criterio de convergencia en la sección 6.7.

Tabla 3: Predictor  $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ , Corrector  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Caso I. P1C1	Error
$p_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(-9f_{k-3} + 37f_{k-2} - 59f_{k-1} + 55f_k)$	$E_p = \frac{251}{720}y^{(5)}(\xi)h^5$
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1})$	$E_c = -\frac{19}{720}y^{(5)}(\xi)h^5$
$mp_{k+1} = p_{k+1} + \frac{251}{270}(y_k - p_k)$	
$my_{k+1} = y_{k+1} - \frac{19}{270}(y_{k+1} - p_{k+1})$	
$h < \frac{24}{9 f_y(t_k, y_k) }$	

### 6.11.2. Caso II

En el caso II se cambia el predictor mientras que el corrector es el mismo que en el caso I. Para obtener el nuevo predictor se reemplaza los coeficientes de la columna P3 de la Tabla 1 en la ecuación (6.88). Los modificadores se obtienen de manera análoga a la explicada en

la sección 6.5 y 6.6, el tamaño de paso máximo es el mismo, debido a que éstos tienen igual corrector. El resultado es muestra en la Tabla 4.

Tabla 4: Predictor $\alpha_3 = 1$ , $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ , Corrector $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .	
Caso II. P3C1	Error
$p_{k+1} = y_{k-2} + \frac{h}{8}(-3f_{k-3} + 15f_{k-2} - 9f_{k-1} + 21f_k)$	$E_p = \frac{243}{720}y^{(5)}(\xi)h^5$
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1})$	$E_c = -\frac{19}{720}y^{(5)}(\xi)h^5$
$mp_{k+1} = p_{k+1} + \frac{243}{262}(y_k - p_k)$	
$my_{k+1} = y_{k+1} - \frac{19}{262}(y_{k+1} - p_{k+1})$	
$h < \frac{24}{9 f_y(t_k, y_k) }$	

### 6.11.3. Caso III

En el caso III, al igual que en el caso II sólo se modifica el predictor y de igual forma se tiene el mismo criterio de convergencia, los modificadores se obtienen como se presentó en las secciones 6.5 y 6.5. Para obtener el nuevo predictor se reemplaza los coeficientes de la columna P5 de la Tabla 1, en la ecuación (6.88). Las nuevas fórmulas se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5: Predictor $\alpha_2 = 1/3$ , $\alpha_3 = 1/3$ y $\alpha_4 = 1/3$ , Corrector $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$	
Caso III. P5C1	Error
$p_{k+1} = \frac{1}{3}y_{k-1} + \frac{1}{3}y_{k-2} + \frac{1}{3}y_{k-3} + \frac{h}{72}(-17f_{k-3} + 141f_{k-2} - 99f_{k-1} + 191f_k)$	$E_p = \frac{233}{720}y^{(5)}(\xi)h^5$
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1})$	$E_c = -\frac{19}{720}y^{(5)}(\xi)h^5$
$mp_{k+1} = p_{k+1} + \frac{233}{252}(y_k - p_k)$	
$my_{k+1} = y_{k+1} - \frac{19}{252}(y_{k+1} - p_{k+1})$	
$h < \frac{24}{9 f_y(t_k, y_k) }$	

### 6.11.4. Caso IV

La Tabla 6, muestra el caso IV, se tienen nuevas fórmulas tanto del predictor como del corrector, para este y los dos últimos casos el criterio de convergencia es diferente, la deducción se realiza de igual forma que la presentada en la sección (6.7), y los modificadores se obtienen realizando el mismo procedimiento mostrado en la sección (6.5) y (6.6). Para obtener las nuevas fórmulas del predictor y corrector se reemplaza los coeficientes de la columna P3 de la Tabla 1 y los coeficientes de la columna C4 de la Tabla 2, en las ecuaciones (6.88) y (6.100).

Tabla 6: Predictor  $\alpha_3 = 1$ ,  $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ , Corrector  $\alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$

Caso IV. P3C4	Error
$p_{k+1} = y_{k-2} + \frac{h}{8}(-3f_{k-3} + 15f_{k-2} - 9f_{k-1} + 21f_k)$	$E_p = \frac{243}{720}y^{(5)}(\xi)h^5$
$y_{k+1} = \frac{1}{3}y_k + \frac{1}{3}y_{k-1} + \frac{1}{3}y_{k-2} + \frac{h}{36}(5f_{k-2} + 15f_{k-1} + 39f_k + 13f_{k+1})$	$E_c = -\frac{3}{120}y^{(5)}(\xi)h^5$
$mp_{k+1} = p_{k+1} + \frac{27}{29}(y_k - p_k)$	
$my_{k+1} = y_{k+1} - \frac{2}{29}(y_{k+1} - p_{k+1})$	
$h < \frac{36}{13 f_y(t_k, y_k) }$	

### 6.11.5. Caso V

La Tabla 7 muestra el caso V, este caso toma la columna P3 de la Tabla 1 para el predictor, y la columna C5 para el corrector, los coeficientes se reemplazan en las ecuaciones (6.88) y (6.100) respectivamente.

Tabla 7: Predictor  $\alpha_3 = 1$ ,  $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ , Corrector  $\alpha_2 = 1/2$ ,  $\alpha_3 = 0$

Caso V. P3C5	Error
$p_{k+1} = y_{k-2} + \frac{h}{8}(-3f_{k-3} + 15f_{k-2} - 9f_{k-1} + 21f_k)$	$E_p = \frac{243}{720}y^{(5)}(\xi)h^5$
$y_{k+1} = \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{2}y_{k-1} + \frac{h}{48}(f_{k-2} + 3f_{k-1} + 51f_k + 17f_{k+1})$	$E_c = -\frac{9}{480}y^{(5)}(\xi)h^5$
$mp_{k+1} = p_{k+1} + \frac{18}{19}(y_k - p_k)$	
$my_{k+1} = y_{k+1} - \frac{1}{19}(y_{k+1} - p_{k+1})$	
$h < \frac{48}{17 f_y(t_k, y_k) }$	

### 6.11.6. Caso VI

La Tabla 8, muestra el resumen del caso VI.

Tabla 8: Predictor  $\alpha_2 = 1/2$ ,  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ , Corrector  $\alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_3 = 0$

Caso VI. P6C2	Error
$p_{k+1} = \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{2}y_{k-1} + \frac{h}{48}(-17f_{k-3} + 69f_{k-2} - 99f_{k-1} + 191f_k)$	$E_p = \frac{116}{480}y^{(5)}(\xi)h^5$
$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1})$	$E_c = -\frac{4}{360}y^{(5)}(\xi)h^5$
$mp_{k+1} = p_{k+1} + \frac{87}{91}(y_k - p_k)$	
$my_{k+1} = y_{k+1} - \frac{4}{91}(y_{k+1} - p_{k+1})$	
$h < \frac{3}{ f_y(t_k, y_k) }$	

## 7. Análisis de resultados

Para los resultados de la investigación se hicieron pruebas numéricas de los diferentes casos expuestos en la sección anterior, la simulación se realizó un programa hecho en Matlab [23], exportando la información a un archivo .txt, para realizar las gráficas en Origin [24].

Los resultados se dividen en dos partes; la primera muestra las simulaciones el cálculo de la potencia nuclear ecuaciones (1) a (4), y la segunda para determinar la reactividad, ecuaciones (2) y (7).

### 7.1. Resultados para la Potencia Nuclear

Los primeros resultados, caso I del método de Adams Bashforth Moulton, se publicaron en la revista El Hombre y la Máquina [25], posteriormente, en IX CONGRESO COLOMBIANO DE MÉTODOS NUMÉRICOS: Simulación en ciencias y Aplicaciones Industriales [26], se presentó el predictor generalizado del método y en la International Conference on Applied Mathematics and Informatics ICAMI 2013 [27], la generalización del predictor-corrector. Los resultados se comparan empleando métodos como: diferencias finitas, Runge-Kuta y Hamming.

Se considera  $\lambda_i(0.0127, 0.0317, 0, 115, 0.311, 1.4, 3.87s^{-1})$ ,  $\beta_i(0.000266, 0.001491, 0.001316, 0.002849, 0.000896, 0.000182)$  y  $\Lambda = 2 \times 10^{-5}$ . Se realizó la simulación numérica de algunos casos de predictores y correctores mencionados en la sección (6.11). La Tabla 9 muestra el error máximo de la potencia calculada respecto a la solución exacta, tomada de [2], en donde se emplea el método de diferencias finitas con un paso de  $h = 10^{-8}s$ . Para valores de reactividad de 300, 550, 700 y 800 pcm (partes por cien mil) y tamaños de paso  $h = 10^{-3}s; 10^{-2}s; 10^{-2}s$  y  $10^{-3}s$  respectivamente, los casos II y III tienen mejor precisión para el cálculo de la potencia comparado con los demás.

Tabla 9: Error máximo para diferentes valores de reactividad.

Reactividad (pcm)	$h(s)$	Caso I	Caso II	Caso III	Caso IV
300	$10^{-3}$	$3.99 \times 10^{-4}$	$3.99 \times 10^{-4}$	$3.99 \times 10^{-4}$	$3.99 \times 10^{-4}$
550	$10^{-2}$	$1.84 \times 10^{-3}$	$8.17 \times 10^{-5}$	$1.96 \times 10^{-4}$	$1.49 \times 10^{-3}$
700	$10^{-2}$	$5.16 \times 10^{-5}$	$5.16 \times 10^{-5}$	$5.16 \times 10^{-5}$	$5.16 \times 10^{-5}$
800	$10^{-3}$	$4.62 \times 10^{-5}$	$4.62 \times 10^{-5}$	$4.62 \times 10^{-5}$	$4.63 \times 10^{-5}$

En la Tabla 10, se indica el cálculo de la potencia dada una reactividad de 300 pcm, se observa que la aproximación numérica de la potencia usando el caso II, es similar al resultado

obtenido usando el caso I, el método de Hamming y Runge Kutta de orden 4, los cuales tienen un error máximo de  $3.99 \times 10^{-4}$  para un tamaño de paso de  $h = 10^{-3}s$ , éstos tienen mejor precisión que el método de diferencias finitas con un tamaño de paso  $h = 10^{-6}s$  y error máximo de  $4 \times 10^{-4}$ .

Tabla 10: Potencia encontrada con una reactividad de 300 pcm.

Método	$t = 1s$	$t = 10s$	$t = 20s$	$h[s]$	$E_{max}$
Valor exacto	2.2098	8.0192	28.2970	-	0
Caso I	2.209840	8.019200	28.297400	$10^{-3}$	$3.99 \times 10^{-4}$
Caso II	2.209840	8.019200	28.297400	$10^{-3}$	$3.99 \times 10^{-4}$
Runge Kutta 4	2.209849	8.019221	28.297474	$10^{-4}$	$3.99 \times 10^{-4}$
Hamming	2.20984	8.019199	28.297399	$10^{-3}$	$3.99 \times 10^{-4}$
Dif. Finitas	2.2098	8.0192	28.2974	$10^{-6}$	$4 \times 10^{-4}$

En la Tabla 11, está el cálculo de la potencia con un valor de reactividad de 550 pcm, debido al caso II, el error mínimo es de  $8.17 \times 10^{-5}$ , con un tamaño de paso de  $h = 10^{-2}s$ , este resultado es mejor que los obtenidos para el caso I y los métodos Runge Kutta de orden 4, Hamming y Diferencias Finitas para sus respectivos tamaños de pasos.

Tabla 11: Potencia encontrada con una reactividad de 550 pcm

Método	$t = 0.1s$	$t = 2s$	$t = 10s$	$h[s]$	$E_{max}$
Valor exacto	5.2100	43.025	$1.3886 \times 10^{-5}$	-	0
Caso I	5.208165	43.025043	$1.388599 \times 10^{-5}$	$10^{-2}$	$1.84 \times 10^{-3}$
Caso II	5.210082	43.025023	$1.388598 \times 10^{-5}$	$10^{-2}$	$8.17 \times 10^{-5}$
Runge Kutta 4	5.210099	43.025561	$1.388617 \times 10^{-5}$	$10^{-4}$	$1.43 \times 10^{-4}$
Hamming	5.215306	43.025143	$1.38860 \times 10^{-5}$	$10^{-2}$	$5.30 \times 10^{-3}$
Dif. Finitas	5.2100	43.0251	$1.38860 \times 10^{-5}$	$10^{-6}$	$1 \times 10^{-4}$

En la Tabla 12, se muestra el cálculo de la potencia dada una reactividad de 700 pcm, se puede ver que con el mismo tamaño de paso  $h = 10^{-2}s$ , el error en el caso III es igual que el error del caso I y el método de Runge Kutta de orden 4, a su vez, son menores que los obtenidos con el método de Hamming con igual tamaño de paso y diferencias finitas con tamaño de paso  $h = 10^{-6}s$ .

Tabla 12: Potencia encontrada con una reactividad de 700 pcm.

Método	$t=0.01s$	$t=0.5s$	$t=2s$	$h[s]$	$E_{max}$
Valor exacto	4.5088	$5.3459 \times 10^{-3}$	$2.0591 \times 10^{-11}$	-	0
Caso I	4.508852	$5.345928 \times 10^{-3}$	$2.059226 \times 10^{-11}$	$10^{-2}$	$5.15 \times 10^{-5}$
Caso III	4.508852	$5.345925 \times 10^{-3}$	$2.059221 \times 10^{-11}$	$10^{-2}$	$5.15 \times 10^{-5}$
Runge Kutta 4	4.508858	$5.345905 \times 10^{-3}$	$2.059183 \times 10^{-11}$	$10^{-2}$	$5.15 \times 10^{-5}$
Hamming	4.508851	$5.34588 \times 10^{-3}$	$2.05916 \times 10^{-11}$	$10^{-2}$	$5.90 \times 10^{-5}$
Dif. Finitas	4.508855	$5.34571 \times 10^{-3}$	$2.05887 \times 10^{-11}$	$10^{-6}$	$2.30 \times 10^{-4}$

Al igual que en la Tabla 10, la Tabla 13 muestra resultados similares para el caso I y el caso III, con un error máximo de  $4.62 \times 10^{-5}$  para  $h = 10^{-3}s$  siendo éste es menor que el error máximo obtenido con el método de Hamming  $5 \times 10^{-5}$ , con un tamaño de paso de  $h = 10^{-3}s$ , asimismo, el error de los casos I y III es menor que  $9 \times 10^{-5}$  del método de Runge Kutta de orden 4 y que  $8.65 \times 10^{-3}$  del método de diferencias finitas, con tamaños de pasos de  $h = 10^{-3}s$  y  $h = 10^{-6}s$  respectivamente.

Tabla 13: Potencia encontrada con una reactividad de 800 pcm

Método	$t=0.01s$	$t=0.1s$	$t=1s$	$h[s]$	$E_{max}$
Valor exacto	6.2029	$1.4104 \times 10^{-3}$	$6.16336 \times 10^{-23}$	-	0
Caso I	6.202854	$1.410422 \times 10^{-3}$	$6.163356 \times 10^{-23}$	$10^{-3}$	$4.62 \times 10^{-5}$
Caso III	6.202854	$1.410422 \times 10^{-3}$	$6.163354 \times 10^{-23}$	$10^{-3}$	$4.62 \times 10^{-5}$
Runge Kutta 4	6.202904	$1.41044 \times 10^{-3}$	$6.16406 \times 10^{-23}$	$10^{-3}$	$9 \times 10^{-5}$
Hamming	6.20285	$1.41042 \times 10^{-3}$	$6.16335 \times 10^{-23}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-5}$
Dif. Finitas	6.202683	$1.410224 \times 10^{-3}$	$6.15475 \times 10^{-23}$	$10^{-6}$	$8.65 \times 10^{-3}$

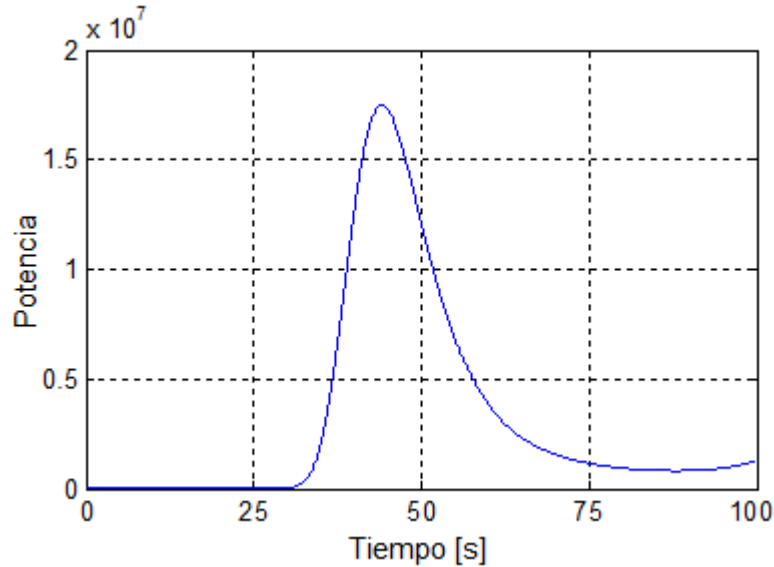
El último resultado para el cálculo de la potencia se muestra en la Figura 8, en este caso la reactividad está en función del tiempo, y es la forma  $\rho(t) = 0.005333 \sin(\frac{\pi}{T}t)$  con periodo  $T = 100s$ . Se implementó el programa con el caso II, y el resultado es idéntico al obtenido por el método de Kinard y Allen en 2004 empleando el método PCA [7] y por Suescún, Figueroa y Bonilla en 2013 con el método de Hamming [8].

## 7.2. Resultados para la Reactividad

Los primeros resultados obtenidos con el predictor y corrector generalizado del método de Adams Bashforth Moulton para el cálculo de la reactividad se expusieron en el coloquio dictado a estudiantes de la Escuela de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Sergio Arboleda con sede en Bogotá [29]. Enseguida, se encontraron nuevos resultados, para



Figura 8: Potencia nuclear con reactividad en función del tiempo.



determinados tamaños de pasos, los cuales tienen mejor precisión que los obtenidos en publicaciones recientes con el método de Hamming [13, 14].

Se considera  $\lambda_i(0.0127, 0.0317, 0, 115, 0.311, 1.4, 3.87s^{-1})$ ,  $\beta_i(0.000266, 0.001491, 0.001316, 0.002849, 0.000896, 0.000182)$  y  $\Lambda = 2 \times 10^{-5}$ . El método de referencia es la solución analítica de la ecuación (3.5) Se realizó la simulación numérica de los casos mencionados en la sección (6.11). La Tabla 14 muestra la diferencia máxima de la reactividad en pcm entre el método de referencia y la aproximación realizada por el método de Adams Bashforth Moulton, para la potencia nuclear de la forma  $P(t) = exp(wt)$  con  $w = 0.00243$ , en el intervalo de 0 a 1000s, se aplicó diferentes tamaños de paso;  $h = 1 \times 10^{-3}s$ ;  $1 \times 10^{-2}s$ ;  $5 \times 10^{-2}s$ ;  $1 \times 10^{-1}s$  y  $2 \times 10^{-1}s$ . En consecuencia, el caso II tiene mejor precisión para el cálculo de la reactividad para  $h \leq 1 \times 10^{-1}s$ , mientras que para  $h = 2 \times 10^{-1}s$ , el caso V obtiene mejor precisión que los demás.

Tabla 14: Máxima diferencia en pcm,  $P(t) = exp(wt)$  con  $w = 0.00243$

$h(s)$	Caso I	Caso II	Caso III	Caso V
$1 \times 10^{-3}$	$3.51 \times 10^{-12}$	$3.51 \times 10^{-12}$	$3.51 \times 10^{-12}$	$4.42 \times 10^{-12}$
$1 \times 10^{-2}$	$2.48 \times 10^{-11}$	$2.48 \times 10^{-11}$	$2.48 \times 10^{-11}$	$2.48 \times 10^{-11}$
$5 \times 10^{-2}$	$5.66 \times 10^{-8}$	$5.66 \times 10^{-8}$	$5.66 \times 10^{-8}$	$5.66 \times 10^{-8}$
$1 \times 10^{-1}$	$1.23 \times 10^{-6}$	$1.22 \times 10^{-6}$	$1.23 \times 10^{-6}$	$1.25 \times 10^{-6}$
$2 \times 10^{-1}$	$5.80 \times 10^{-5}$	$5.72 \times 10^{-5}$	$5.75 \times 10^{-5}$	$5.40 \times 10^{-5}$

Las Tablas 15 a 17, muestran la máxima diferencia en el cálculo de la reactividad dada la potencia  $P(t) = \exp(wt)$  con  $w = 0.01046$ ;  $0.02817$  y  $0.12353$  en el intervalo de tiempo 0 a  $800s$ , de 0 a  $600s$  y de 0 a  $300s$  respectivamente, para estos valores de  $w$  las aproximaciones con los casos I, II y III son muy similares, para  $h = 2 \times 10^{-1}s$  y  $h = 1 \times 10^{-3}s$  el mejor resultado lo presenta el caso V.

Tabla 15: Máxima diferencia en pcm,  $P(t) = \exp(wt)$  con  $w = 0.01046$

$h(s)$	Caso I	Caso II	Caso III	Caso V
$1 \times 10^{-3}$	$3.64 \times 10^{-12}$	$3.65 \times 10^{-12}$	$3.64 \times 10^{-12}$	$3.03 \times 10^{-12}$
$1 \times 10^{-2}$	$1.06 \times 10^{-10}$	$1.06 \times 10^{-10}$	$1.06 \times 10^{-10}$	$1.06 \times 10^{-10}$
$5 \times 10^{-2}$	$2.43 \times 10^{-7}$	$2.43 \times 10^{-7}$	$2.43 \times 10^{-7}$	$2.43 \times 10^{-7}$
$1 \times 10^{-1}$	$5.29 \times 10^{-6}$	$5.29 \times 10^{-6}$	$5.29 \times 10^{-6}$	$5.37 \times 10^{-6}$
$2 \times 10^{-1}$	$2.47 \times 10^{-4}$	$2.43 \times 10^{-4}$	$2.44 \times 10^{-4}$	$2.30 \times 10^{-4}$

Tabla 16: Máxima diferencia en pcm,  $P(t) = \exp(wt)$  con  $w = 0.02817$

$h(s)$	Caso I	Caso II	Caso III	Caso V
$1 \times 10^{-3}$	$2.01 \times 10^{-12}$	$2.01 \times 10^{-12}$	$2.04 \times 10^{-12}$	$1.70 \times 10^{-12}$
$1 \times 10^{-2}$	$2.88 \times 10^{-10}$	$2.88 \times 10^{-10}$	$2.88 \times 10^{-10}$	$2.88 \times 10^{-10}$
$5 \times 10^{-2}$	$6.56 \times 10^{-7}$	$6.56 \times 10^{-7}$	$6.56 \times 10^{-7}$	$6.56 \times 10^{-7}$
$1 \times 10^{-1}$	$1.42 \times 10^{-5}$	$1.42 \times 10^{-5}$	$1.42 \times 10^{-5}$	$1.43 \times 10^{-5}$
$2 \times 10^{-1}$	$6.49 \times 10^{-4}$	$6.38 \times 10^{-4}$	$6.41 \times 10^{-4}$	$6.06 \times 10^{-4}$

Tabla 17: Máxima diferencia en pcm,  $P(t) = \exp(wt)$  con  $w = 0.12353$

$h(s)$	Caso I	Caso II	Caso III	Caso V
$1 \times 10^{-3}$	$1.64 \times 10^{-12}$	$1.56 \times 10^{-12}$	$1.64 \times 10^{-12}$	$1.99 \times 10^{-12}$
$1 \times 10^{-2}$	$1.27 \times 10^{-9}$	$1.27 \times 10^{-9}$	$1.27 \times 10^{-9}$	$1.27 \times 10^{-9}$
$5 \times 10^{-2}$	$2.88 \times 10^{-6}$	$2.88 \times 10^{-6}$	$2.88 \times 10^{-6}$	$2.88 \times 10^{-6}$
$1 \times 10^{-1}$	$6.24 \times 10^{-5}$	$6.24 \times 10^{-5}$	$6.24 \times 10^{-5}$	$6.24 \times 10^{-5}$
$2 \times 10^{-1}$	$2.52 \times 10^{-3}$	$2.42 \times 10^{-3}$	$2.43 \times 10^{-3}$	$2.36 \times 10^{-3}$

Las Tablas 18 y 19 muestran que el caso V obtiene mejores aproximaciones para  $h = 1 \times 10^{-3}s$ , para tamaños de paso  $h = 1 \times 10^{-2}s$ ;  $5 \times 10^{-2}s$ ;  $1 \times 10^{-1}s$   $2 \times 10^{-1}s$  y  $3 \times 10^{-1}s$  se obtienen aproximaciones iguales para todos los casos.

Table 19: Máxima diferencia en pcm,  $P(t) = \exp(wt)$  con  $w = 1.023$

$h(s)$	Caso I	Caso II	Caso III	Caso V
$1 \times 10^{-3}$	$4.20 \times 10^{-12}$	$4.20 \times 10^{-12}$	$4.20 \times 10^{-12}$	$2.72 \times 10^{-12}$
$1 \times 10^{-2}$	$1.13 \times 10^{-8}$	$1.13 \times 10^{-8}$	$1.13 \times 10^{-8}$	$1.13 \times 10^{-8}$
$5 \times 10^{-2}$	$2.46 \times 10^{-5}$	$2.46 \times 10^{-5}$	$2.46 \times 10^{-5}$	$2.46 \times 10^{-5}$
$1 \times 10^{-1}$	$5.22 \times 10^{-4}$	$5.22 \times 10^{-4}$	$5.22 \times 10^{-4}$	$5.22 \times 10^{-4}$
$2 \times 10^{-1}$	$1.00 \times 10^{-2}$	$1.00 \times 10^{-2}$	$1.00 \times 10^{-2}$	$1.00 \times 10^{-2}$
$3 \times 10^{-1}$	$8.30 \times 10^{-2}$	$6.70 \times 10^{-2}$	$6.70 \times 10^{-2}$	$6.70 \times 10^{-2}$

Tabla 18: Máxima diferencia en pcm,  $P(t) = \exp(wt)$  con  $w = 1.00847$

$h(s)$	Caso I	Caso II	Caso III	Caso V
$1 \times 10^{-3}$	$4.09 \times 10^{-12}$	$4.09 \times 10^{-12}$	$4.09 \times 10^{-12}$	$2.72 \times 10^{-12}$
$1 \times 10^{-2}$	$1.11 \times 10^{-8}$	$1.11 \times 10^{-8}$	$1.11 \times 10^{-8}$	$1.11 \times 10^{-8}$
$5 \times 10^{-2}$	$2.43 \times 10^{-5}$	$2.43 \times 10^{-5}$	$2.43 \times 10^{-5}$	$2.43 \times 10^{-5}$
$1 \times 10^{-1}$	$5.15 \times 10^{-4}$	$5.15 \times 10^{-4}$	$5.15 \times 10^{-4}$	$5.15 \times 10^{-4}$
$2 \times 10^{-1}$	$9.94 \times 10^{-3}$	$9.94 \times 10^{-3}$	$9.94 \times 10^{-3}$	$9.94 \times 10^{-3}$
$3 \times 10^{-1}$	$1.56 \times 10^{-1}$	$6.61 \times 10^{-2}$	$6.61 \times 10^{-2}$	$6.61 \times 10^{-2}$

Las Tablas 20 a 22, muestran la máxima diferencia en el cálculo de la reactividad para  $P(t) = \exp(wt)$  con  $w = 2.345$ ; 11.6442 y 52.80352 en los intervalos de tiempo de 0 a 80s, de 0 a 60s y de 0 a 10s respectivamente, En la Tabla 20, el caso VI tiene mejores aproximaciones que los demás para un tamaño de paso de  $h = 1 \times 10^{-3}s$ ,  $h = 2 \times 10^{-1}s$  y  $h = 3 \times 10^{-1}s$ . En las Tablas 21 y 22 este mismo caso obtiene mejores resultados para todos los tamaños de paso, en especial, con  $w = 52.80352$ , y  $h = 1 \times 10^{-3}s$ .

Tabla 20: Máxima diferencia en pcm,  $P(t) = \exp(wt)$  con  $w = 2.345$

$h(s)$	Caso I	Caso II	Caso III	Caso V	Caso VI
$1 \times 10^{-3}$	$1.93 \times 10^{-12}$	$1.93 \times 10^{-12}$	$1.70 \times 10^{-12}$	$1.93 \times 10^{-12}$	$1.70 \times 10^{-12}$
$1 \times 10^{-2}$	$3.04 \times 10^{-8}$	$3.04 \times 10^{-8}$	$3.04 \times 10^{-8}$	$3.04 \times 10^{-8}$	$3.04 \times 10^{-8}$
$5 \times 10^{-2}$	$6.35 \times 10^{-5}$	$6.35 \times 10^{-5}$	$6.35 \times 10^{-5}$	$6.35 \times 10^{-5}$	$6.35 \times 10^{-5}$
$1 \times 10^{-1}$	$1.31 \times 10^{-3}$	$1.31 \times 10^{-3}$	$1.31 \times 10^{-3}$	$1.31 \times 10^{-3}$	$1.31 \times 10^{-3}$
$2 \times 10^{-1}$	$3.12 \times 10^{-2}$	$3.41 \times 10^{-2}$	$3.34 \times 10^{-2}$	$2.64 \times 10^{-2}$	$2.36 \times 10^{-2}$
$3 \times 10^{-1}$	0.23	0.25	0.25	0.21	0.14

Tabla 21: Máxima diferencia en pcm,  $P(t) = \exp(wt)$  con  $w = 11.6442$

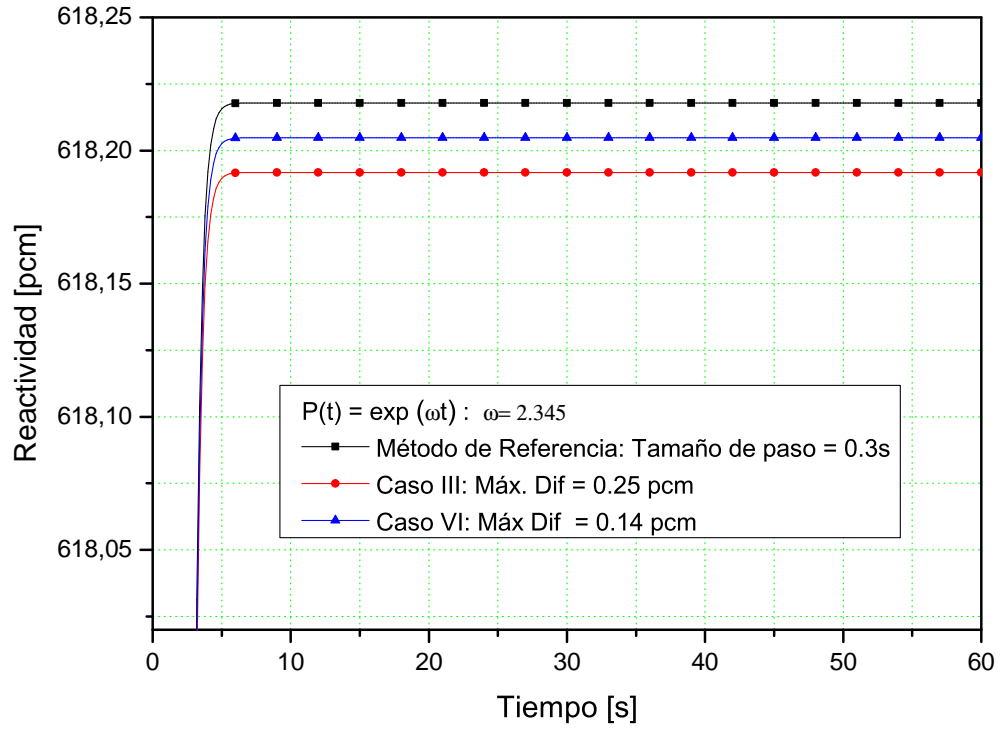
$h(s)$	Caso I	Caso II	Caso III	Caso V	Caso VI
$1 \times 10^{-3}$	$8.59 \times 10^{-11}$	$7.56 \times 10^{-11}$	$7.27 \times 10^{-11}$	$4.54 \times 10^{-11}$	$2.80 \times 10^{-11}$
$1 \times 10^{-2}$	$7.84 \times 10^{-6}$	$6.97 \times 10^{-6}$	$6.72 \times 10^{-6}$	$4.26 \times 10^{-6}$	$2.62 \times 10^{-6}$
$5 \times 10^{-2}$	$1.69 \times 10^{-2}$	$1.59 \times 10^{-2}$	$1.55 \times 10^{-2}$	$1.10 \times 10^{-2}$	$8.27 \times 10^{-3}$
$1 \times 10^{-1}$	$3.18 \times 10^{-1}$	$3.10 \times 10^{-1}$	$3.03 \times 10^{-1}$	$2.40 \times 10^{-1}$	$2.05 \times 10^{-1}$
$2 \times 10^{-1}$	3.57	3.55	3.50	3.10	2.74
$3 \times 10^{-1}$	10.6	10.6	10.5	9.64	8.74

Tabla 22: Máxima diferencia en pcm,  $P(t) = \exp(wt)$  con  $w = 52.80532$

$h(s)$	Caso I	Caso II	Caso III	Caso IV	Caso VI
$1 \times 10^{-3}$	$3.96 \times 10^{-8}$	$3.49 \times 10^{-8}$	$3.36 \times 10^{-8}$	$1.73 \times 10^{-8}$	$1.24 \times 10^{-8}$
$1 \times 10^{-2}$	$2.39 \times 10^{-3}$	$2.23 \times 10^{-3}$	$2.17 \times 10^{-3}$	$1.36 \times 10^{-3}$	$9.86 \times 10^{-4}$
$5 \times 10^{-2}$	1.01	1.00	0.98	0.86	0.74
$1 \times 10^{-1}$	5.17	5.15	5.12	4.80	4.41
$2 \times 10^{-1}$	15.6	15.5	15.5	14.8	14.0
$3 \times 10^{-1}$	26.2	26.1	26.0	25.1	23.8

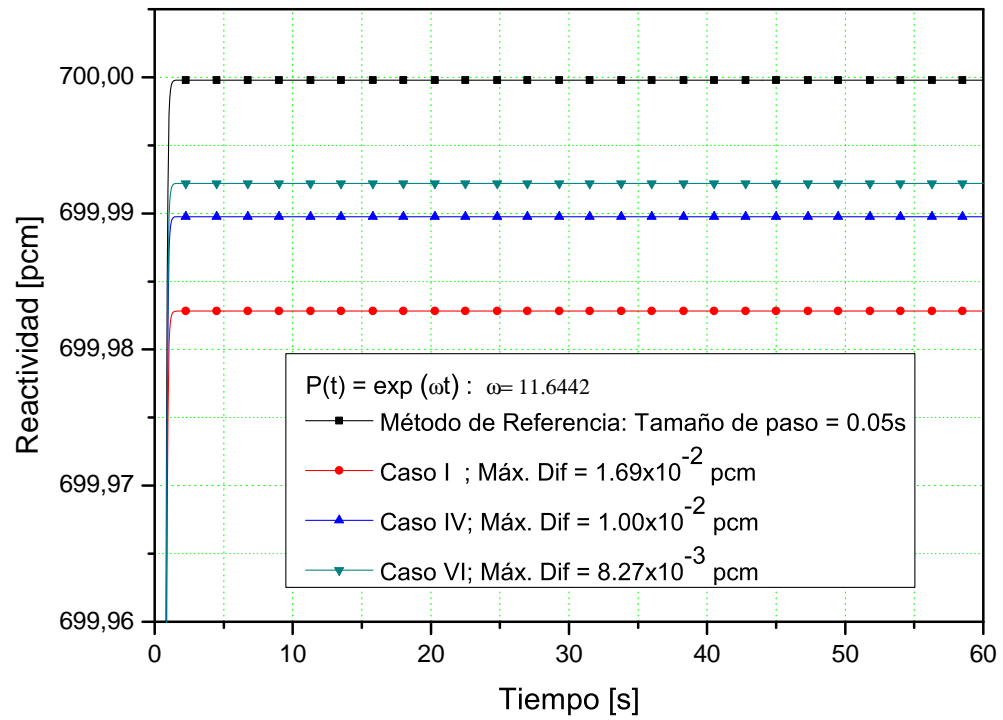
La Figura 9, muestran la máxima diferencia en el cálculo de la reactividad dada la potencia  $P(t) = \exp(wt)$  con  $w = 2.345$ , en un intervalo de tiempo de 0 a 80s, para un tamaño de paso de  $h = 0.3s$ , como se muestra en la Tabla 20 el caso VI tiene mejor aproximación que los demás casos.

Figura 9: Máxima diferencia en pcm, casos III y VI,  $P(t) = \exp(\omega t)$  con  $\omega = 2.345$



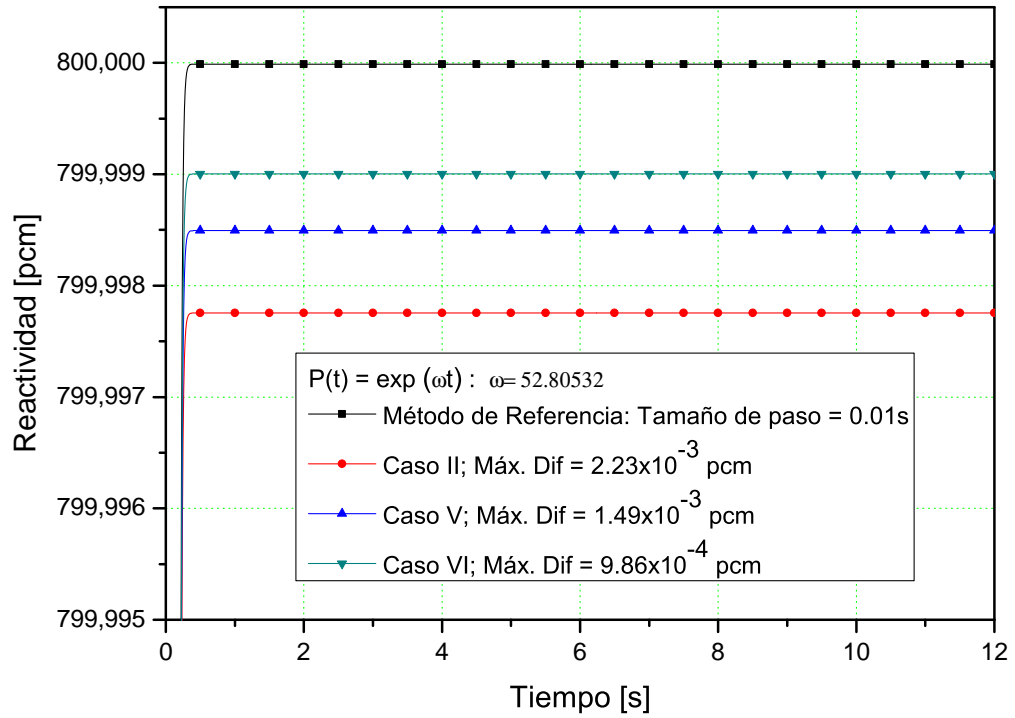
La Figura 10, muestra la simulación de los casos I, IV y VI, el tamaño de paso es de  $h = 0.05s$ , la mejor aproximación, en el cálculo de la reactividad, con  $P(t) = \exp(\omega t)$  y  $\omega = 11.6442$  se obtiene con el caso VI.

Figura 10: Máxima diferencia en pcm, casos I, IV y VI,  $P(t) = \exp(\omega t)$  con  $\omega = 11.6442$



Se hace la simulación de los casos II, V y VII, la potencia es forma exponencial con  $\omega = 52.6442$ , el tamaño de paso es de  $h = 0.01s$ , para reactividades mayores a 600 pcm, el caso VI es mas preciso que los demás.

Figura 11: Máxima diferencia en pcm, casos II, V y VI,  $P(t) = \exp(\omega t)$  con  $\omega = 52.80532$



Estos resultados fueron comparados con los obtenidos en la publicación realizada por Suescún, Ibarguen y Figueroa, en 2014 [14], donde exponen el corrector generalizado del método de Hamming. La Tabla 23 muestra la diferencia entre el mejor caso de la publicación [14] y los casos II y IV del predictor-corrector generalizado del método de Adams Bashforth Moulton. Se ve en esta Tabla como el método generalizado de Adams Bashforth Moulton es mejor que el corrector generalizado de Hamming.

Tabla 23: Diferencia entre el corrector generalizado de Hamming y el predictor- corrector generalizado de Adams Basforth Moulton,  $P(t) = exp(wt)$ .

$P(t) = exp(wt)$ $w$	$h(s)$	Hamming generalizado	Adams Caso II	Adams Caso IV
0.00243	$1 \times 10^{-3}$	$6.17 \times 10^{-12}$	$3.51 \times 10^{-12}$	$2.25 \times 10^{-12}$
0.01046	$1 \times 10^{-3}$	$6.66 \times 10^{-12}$	$3.65 \times 10^{-12}$	$2.45 \times 10^{-12}$
0.02817	$1 \times 10^{-3}$	$4.23 \times 10^{-12}$	$2.01 \times 10^{-12}$	$1.87 \times 10^{-12}$
0.12353	$1 \times 10^{-3}$	$4.71 \times 10^{-12}$	$1.56 \times 10^{-12}$	$1.53 \times 10^{-12}$
1.00847	$1 \times 10^{-3}$	$3.86 \times 10^{-12}$	$4.09 \times 10^{-12}$	$2.04 \times 10^{-12}$
1.023	$1 \times 10^{-3}$	$1.97 \times 10^{-11}$	$4.20 \times 10^{-12}$	$2.16 \times 10^{-12}$
2.345	$1 \times 10^{-3}$	$1.13 \times 10^{-11}$	$1.93 \times 10^{-12}$	$1.70 \times 10^{-12}$
11.6442	$1 \times 10^{-1}$	0.23	0.31	0.20
52.80352	$1 \times 10^{-2}$	$1.44 \times 10^{-3}$	$2.23 \times 10^{-3}$	$9.86 \times 10^{-4}$

Las Tabla 24, 25 y 26, muestran la máxima diferencia en el cálculo de la reactividad, la potencia usada es de la forma  $P(t) = a + b*t^n$ , con  $n=3,4$  y  $5$  respectivamente. La simulación se realizó para  $h=0.01, 0.02, 0.05$  y  $0.1$  con los casos II, IV y V expuestos en la sección 6.11.

Tabla 24: Máxima diferencia en PCM,  $P(t) = a + b*t^n$ , con  $n=3$

$h[s]$	Caso II	Caso IV	Caso V
0.01	$1.76 \times 10^{-12}$	$2.84 \times 10^{-11}$	$1.76 \times 10^{-12}$
0.02	$1.06 \times 10^{-12}$	$1.44 \times 10^{-11}$	$1.71 \times 10^{-12}$
0.05	$1.00 \times 10^{-12}$	$6.17 \times 10^{-12}$	$1.18 \times 10^{-12}$
0.1	$7.97 \times 10^{-13}$	$3.39 \times 10^{-12}$	$8.87 \times 10^{-13}$

Tabla 25: Máxima diferencia en PCM,  $P(t) = a + b*t^n$ , con  $n=4$

$h[s]$	Caso II	Caso IV	Caso V
0.01	$1.92 \times 10^{-12}$	$2.82 \times 10^{-11}$	$3.45 \times 10^{-12}$
0.02	$1.40 \times 10^{-12}$	$1.43 \times 10^{-11}$	$1.91 \times 10^{-12}$
0.05	$9.75 \times 10^{-13}$	$5.99 \times 10^{-12}$	$1.16 \times 10^{-12}$
0.1	$9.32 \times 10^{-13}$	$3.34 \times 10^{-12}$	$9.03 \times 10^{-13}$

Tabla 26: Máxima diferencia en PCM,  $P(t) = a + b*t^n$ , con  $n=5$

$h[s]$	Caso II	Caso IV	Caso V
0.01	$1.78 \times 10^{-12}$	$2.77 \times 10^{-12}$	$4.04 \times 10^{-12}$
0.02	$1.37 \times 10^{-12}$	$1.45 \times 10^{-11}$	$2.17 \times 10^{-12}$
0.05	$4.00 \times 10^{-12}$	$6.02 \times 10^{-12}$	$2.34 \times 10^{-12}$
0.1	$1.90 \times 10^{-12}$	$3.33 \times 10^{-12}$	$1.05 \times 10^{-12}$



Finalmente, se comparan los resultados mostrados anteriormente, con el mejor resultado obtenido en la generalización del corrector de Hamming [14], La Tabla 27, muestra máxima diferencia para  $P(t) = a + b * t^n$ ;  $n = 3, 4$  y  $5$ , tomando  $h = 0.1s$ . Se puede ver que para todos los valores de  $n$ , la mejor aproximación se obtiene con el caso V del predictor-corrector generalizado del método de Adams Bashforth Moulton, superando así la aproximación obtenida con la generalización del corrector del método de Hamming.

Tabla 27: Máxima diferencia en pcm,  $P(t) = a + b * t^n$ ;  $a = 1$ ;  $b = (0.0127)^5 / 9$ ;  $h = 0.1s$

$n$	ABM Caso II	ABM Caso IV	ABM Caso V	Hamming Generalizado
3	$7.97 \times 10^{-13}$	$3.39 \times 10^{-12}$	$8.87 \times 10^{-13}$	$1.03 \times 10^{-12}$
4	$9.32 \times 10^{-13}$	$3.34 \times 10^{-12}$	$9.03 \times 10^{-13}$	$1.12 \times 10^{-12}$
5	$1.90 \times 10^{-12}$	$3.33 \times 10^{-12}$	$1.05 \times 10^{-12}$	$1.28 \times 10^{-12}$

## Conclusiones

Se presentó por primera vez en la literatura el predictor-corrector generalizado del método de Adams-Bashfort-Moulton para encontrar la solución de la ecuación diferencial de la concentración de precursores de neutrones retardados. El error cometido por el método es de orden  $O(h^5)$ .

El método de Adams-Bashforth-Mouton fue usado para calcular la potencia nuclear y la reactividad, a partir de las ecuaciones de la cinética puntual y cinética puntual inversa. No solo se encontraron buenas aproximaciones para la potencia, bajo diferentes valores de reactividad, si no también para la reactividad, empleando distintas formas de potencia.

A causa de sus buenas propiedades de estabilidad, el método usado es eficaz para resolver problemas de valor inicial en los sistemas de ecuaciones de carácter fuertemente acoplado, como es el caso de reacciones nucleares. En general, el método ofrece una buena precisión, esto se debe en gran parte, al uso de los modificadores propios de un método predicción-corrección.

Para el cálculo de la potencia, la generalización del predictor y del corrector del método de Adams Bashforth Moulton, en especial el caso II, es más preciso que caso I y el método de Hamming. Con igual tamaño de paso ( $h = 10^{-2}s$ ) y una reactividad de 550 pcm, el error máximo con el caso II es de  $8.17 \times 10^{-5}$ , mientras que con el caso I y el método de Hamming son de  $1.84 \times 10^{-3}$  y  $5.30 \times 10^{-3}$  respectivamente. Para 800 pcm y  $h = 10^{-3}s$  el error máximo de las aproximaciones hechas por los casos I y II son similares ( $4.62 \times 10^{-5}$ ), sin embargo, es menor al error obtenido con el método de Hamming ( $5 \times 10^{-5}$ ).

Por otro lado, para el cálculo de la reactividad, con una potencia de tipo exponencial  $P(t) = \exp(wt)$  donde  $w \leq 0.12353$ , y para  $h = 0,001s$ , el caso II de la generalización del predictor y corrector del método de Adams Bashfort Moulton tiene mejores resultados que los obtenidos por el método de Hamming. En cuanto a valores más grandes de  $w$ : 1.00847, 1.023, 2.345, 11.6442 y 52.80352, el caso V con igual tamaño de paso tiene mejores aproximaciones que los demás casos.

Para la potencia de la forma  $P(t) = a + b * t^n$ ; con  $n = 3, 4$  y  $5$  y un tamaño de paso  $h = 0.1s$ , el caso V del predictor-corrector generalizado del método de Adams Bashforth Moulton, supera la aproximación obtenida con el mejor caso de la generalización del corrector del método de Hamming.

Es posible usar el método de Adams Bashforth Moulton para el cálculo de la potencia y

la reactividad nuclear, siendo de mejor aproximación que la obtenida recientemente usando el método de Hamming [14].

## Referencias

- [1] DUDERSTADT, J.J, HAMILTON, L.J. Nuclear Reactor Analysis. New York: John Wiley and Sons Inc, 1976.
- [2] CHAO, Y.A., ATTARD A., A resolution of the stiffness problem of reactor kinetics, Nuclear Science and Engineering ,vol. 90, p. 40–46, 1985.
- [3] SÁNCHEZ J., On the numerical solution of the point reactor kinetics equations by generalized Runge-Kutta methods, Nuclear Science and Engineering, vol. 103, p. 94–99, 1989.
- [4] BASKEN J., LEWINS J., Power series solution of the reactor kinetics equations, Nuclear Science and Engineering ,vol. 122, p. 40–416, 1996.
- [5] ABOANBER A., HAMADA Y., PWS: an efficient code system for solving space-independent nuclear reactor dynamics, Annals of Nuclear Energy, vol. 29, p. 2159–2172, 2002.
- [6] ABOANBER A., NAHLA A., Generalization of the analytical inversion method for the solution of the point kinetics equations, Journal of Physics A, vol. 35, p. 3245–3263, 2002.
- [7] KINARD M., ALLEN E., Efficient numerical solution of the point kinetics equations in nuclear reactor dynamics, Annals of Nuclear Energy, vol. 31, p. 1039–1051, 2004.
- [8] SUESCÚN D.D., FIGUEROA J.J., BONILLA H. Solución Numérica de la Potencia en un Reactor Nuclear Usando el Método de Hamming. Scientia Et Technica, vol. 18, p 381–386, 2013.
- [9] SUESCÚN D. D., SERNA M.A., CARVALHO DA SILVA F., Formulation for the calculation of reactivity without nuclear power history. Journal Of Nuclear Science And Technology, vol. 44, p 1149–1155, 2007.
- [10] SUESCÚN D.D., SERNA M., A., CARVALHO DA SILVA F., Calculation of reactivity using a finite impulse response filter. Annals Of Nuclear Energy, vol. 35, p 472–477, 2008.
- [11] SUESCÚN D.D., SERNA M.A., Reactivity calculation with reduction of the nuclear power fluctuations. Annals Of Nuclear Energy, vol. 36, p 676–679, 2009.

- [12] SUESCÚN D.D., FLORES O.J., RODRÍGUEZ S.J., Hamming method for solving the delayed neutron precursor concentration for reactivity calculation. *Annals of Nuclear Energy*, vol.42, p 47–49, 2012.
- [13] SUESCÚN D.D., FIGUEROA J.J., RODRÍGUEZ S.J., Reactivity calculation using the Euler Maclaurin formula. *Annals Of Nuclear Energy*, vol.53, p 104–108, 2013.
- [14] SUESCÚN D.D., IBARGUEN G.M., FIGUEROA J.J., Hamming generalized corrector for reactivity calculation. *Kerntechnik*, vol.79, p 1–7, 2014.
- [15] HOONGENBOOM J.E., VAN DER SLUIJS. Neutron source strength determination for on-line reactivity measurements. *Annals Of Nuclear Energy*, vol.15, p 553–559, 1988.
- [16] SUESCÚN D.D., SERNA M.A., Finite differences with exponential filtering in the calculation of reactivity. *Kerntechnik*, vol.75, p 210–213, 2010.
- [17] CURTIS F.G, PATRICK O.W., *Applied Numerical Analysis*, California polytechnic state university, 2001.
- [18] IBARGUEN G.M., Corrector generalizado del método de Hamming para el cálculo de la reactividad. Tesis pregrado. Colombia: Pontificia Universidad Javeriana Cali, 2012.
- [19] MATHEWS H. John. *Métodos numéricos con MATLAB*. Madrid: Prentice Hall, 1999.
- [20] CHAPRA C. Steven. *Métodos numéricos para ingenieros*. México: Mc Graw-Hill, 2010.
- [21] SALVADOR A. MOLERO M. *Análisis matemático para ingeniería*. Madrid. Prentice-Hall, 2007.
- [22] BURDEN. Richard L. *Análisis numérico*. México. International Thomson Editores, 2001.
- [23] Matlab 7.12.0 (R2011a).
- [24] Origin, 2003 Scientific Graphing and Analysis Software. Version 7.5.
- [25] SUESCÚN D.D., NARVÁEZ P.M., FIGUEROA J.J., AMADOR R.A., Método Adams-Basforth-Moulton para calcular la potencia nuclear. *El Hombre y la Máquina*, vol. 42, p 9–12, 2013.

- [26] SUESCÚN D.D., NARVÁEZ P.M., IBARGUEN G.M., Numerical solution of the point kinetics equation for nuclear power using Adams-Bashforth-Moulton method, IX CONGRESO COLOMBIANO DE MÉTODOS NUMÉRICOS: Simulación en ciencias y Aplicaciones Industriales. Universidad Autónoma de Occidente, Cali.
- [27] SUESCÚN D.D., NARVÁEZ P.M., AMADOR R.A., Nuclear power using ABM method, International Conference on Applied Mathematics and Informatics ICAMI 2013, Universidad del Valle, San Andres Islas.
- [28] MALMIR H., VOSOUGHI N., On-line reactivity calculation using Lagrange method. Ann. Nucl. Energy, vol 62, p 463–467, 2013.
- [29] NARVÁEZ P.M, Nuclear power calculation using ABM method, 2014, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá.

## Anexos

### Anexo 1. Estimación del error de truncamiento aplicando la definición del error del polinomio interpolador de Lagrange

#### Estimación del error de truncamiento del predictor

Se aplica la definición del error del polinomio interpolador de Lagrange para deducir el error de truncamiento del predictor, aplicando la ecuación (4.15) que pasa por los nodos;  $(t_{k-3}, f(t_{k-3}))$ ,  $(t_{k-2}, f(t_{k-2}))$ ,  $(t_{k-1}, f(t_{k-1}))$ ,  $(t_k, f(t_k))$  y se integra entre los límites  $t_k$  y  $t_{k+1}$ .

$$E_p = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t-t_{k-3})(t-t_{k-2})(t-t_{k-1})(t-t_k)f^{(4)}(\xi)}{4!} dt \quad (7.1)$$

Sea  $t = t_k + vh$  de manera que  $t - t_k = vh$ ,  $dt = h dv$  y  $t - t_{k+1} = t - (t_k + h)$ , luego  $t - t_{k+1} = t - t_k - h = vh - h = h(v - 1)$ , en general  $t - t_{k-i} = h(v + i)$ ,

Reemplazando en (7.1) se tiene:

$$E_p = \int_0^1 \frac{h(v+3)h(v+2)h(v+1)hvf^{(4)}(\xi)}{4!} h dv \quad (7.2)$$

Simplificando y asumiendo que  $f^{(4)}(\xi)$  es casi constante en el intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$  se obtiene:

$$E_p = \frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_0^1 (v^4 + 6v^3 + 11v^2 + 6v) dv \quad (7.3)$$

Al evaluar resulta,

$$E_p = \frac{251}{720} h^5 f^{(4)}(\xi) \quad (7.4)$$

Teniendo en cuenta que  $y' = f$ , se reemplaza en (7.4) y se obtiene:

$$E_p = \frac{251}{720} h^5 f^{(4)}(\xi) \quad (7.5)$$

La ecuación anterior es el error de truncamiento del predictor, donde  $\xi \in [t_k, t_{k+1}]$ . Que es igual a la ecuación (6.30).

## Estimación del error de truncamiento del corrector

De igual forma, se aplicará la definición del error del polinomio interpolador de Lagrange para deducir el error de truncamiento del predictor, se aplica la ecuación (4.15) que pasa por los nodos;  $(t_{k-2}, f(t_{k-2}))$ ,  $(t_{k-1}, f(t_{k-1}))$ ,  $(t_k, f(t_k))$  y el nuevo nodo encontrado  $(t_{k+1}, f(t_{k+1}))$  y se integra entre los límites  $t_k$  y  $t_{k+1}$ .

$$E_c = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t-t_{k-2})(t-t_{k-1})(t-t_k)(t-t_{k+1})f^{(4)}(\xi)}{4!} dt \quad (7.6)$$

Sea  $t = t_k + vh$  de manera que  $t - t_k = vh$ ,  $dt = h dv$  y  $t - t_{k+1} = t - (t_k + h)$ , luego  $t - t_{k+1} = t - t_k - h = vh - h = h(v - 1)$ , en general  $t - t_{k-i} = h(v + i)$ ,

Reemplazando en (7.6) se tiene:

$$E_c = \int_0^1 \frac{h(v+2)h(v+1)h(v)h(v-1)f^{(4)}(\xi)}{4!} h dv \quad (7.7)$$

Simplificando y asumiendo que  $f^{(4)}(\xi)$  es constante en el intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$  se obtiene:

$$E_c = \frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_0^1 (v^4 + 2v^3 - v^2 - 2v) dv \quad (7.8)$$

Evalutando la integral, resulta:

$$E_c = -\frac{19}{720} h^5 f^{(4)}(\xi) \quad (7.9)$$

Teniendo en cuenta que  $y' = f$ , se reemplaza en (7.9) y se obtiene:

$$E_c = -\frac{19}{720} h^5 f^{(4)}(\xi) \quad (7.10)$$

La ecuación (7.10) es el error de truncamiento del corrector, donde  $\xi \in [t_k, t_{k+1}]$ . Que es igual a la ecuación (6.44).



## Anexo 2. Estabilidad de algunos predictores y correctores

Se estudia la región de estabilidad en función del tamaño de paso  $h$ , para las fórmulas predictoras y correctoras expuestas en la sección 6.11.

### Estabilidad P1

La ecuación del predictor P1 de la Tabla 1, viene dado por:

$$p_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}) \quad (7.11)$$

Reemplazando  $y' = f(t_k, y_k) = Ay$  en la ecuación (7.11) se tiene:

$$p_{k+1} = y_k + \frac{Ah}{24}(55y_k - 59y_{k-1} + 37y_{k-2} - 9y_{k-3}) \quad (7.12)$$

La ecuación característica de esta ecuación viene dada por:

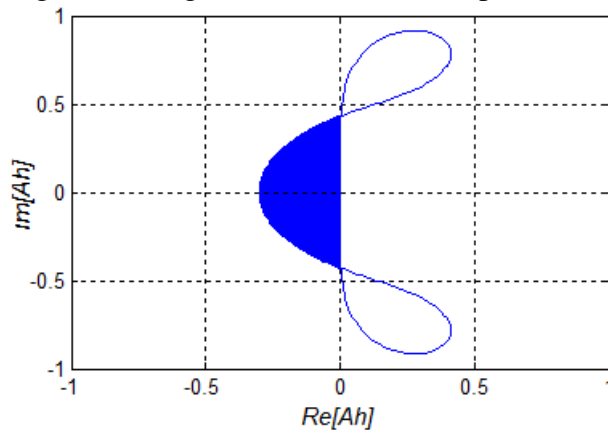
$$\varphi^4 - \varphi^3 - \frac{hA}{24}(55\varphi^3 - 59\varphi^2 + 37\varphi - 9) = 0 \quad (7.13)$$

Para encontrar la región de estabilidad, dada en  $|\varphi| \leq 1$ , se sustituye  $\varphi = e^{i\theta}$  y se resuelve para  $Ah$ ,

$$Ah = \frac{e^{4i\theta} - e^{3i\theta}}{\frac{55}{24}e^{3i\theta} - \frac{59}{24}e^{2i\theta} + \frac{37}{24}e^{i\theta} - \frac{9}{24}} \quad (7.14)$$

Variando  $\theta$  entre 0 y  $2\pi$  se tiene la región de estabilidad mostrada en la Figura 10.

Figura 12: Región de estabilidad del predictor P1.



Los límites de estabilidad en el eje real son  $-0.3 \leq Ah \leq 0$ .

Cuando  $h \rightarrow 0$ , la ecuación característica de la ecuación (7.12) en diferencias es:

$$\varphi^4 - \varphi^3 = 0 \quad (7.15)$$

Cuyas raíces son  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$  y  $\varphi_4 = 1$ , su magnitud es menor o igual a 1, luego la fórmula predictor es estable para tamaños de paso pequeños.

### Estabilidad P3

La ecuación del predictor P3 de la Tabla 1, viene dado por:

$$p_{k+1} = y_{k-2} + \frac{h}{8}(21f_k - 9f_{k-1} + 15f_{k-2} - 3f_{k-3}) \quad (7.16)$$

Reemplazando  $y' = f(t_k, y_k) = Ay$  en la ecuación (7.16) se obtiene:

$$p_{k+1} = y_{k-2} + \frac{Ah}{8}(21y_k - 9y_{k-1} + 15y_{k-2} - 3y_{k-3}) \quad (7.17)$$

La ecuación característica de esta ecuación viene dada por:

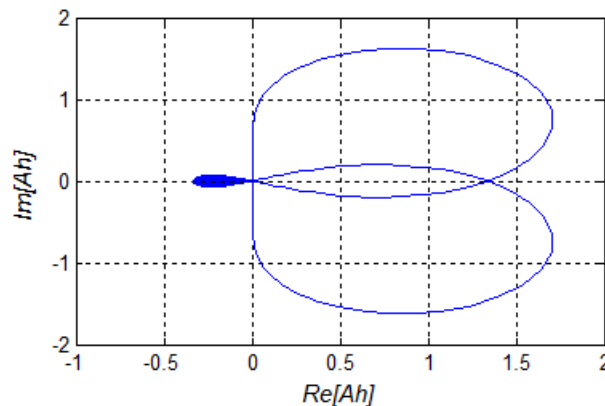
$$\varphi^4 - \varphi - \frac{hA}{8}(21\varphi^3 - 9\varphi^2 + 15\varphi - 3) = 0 \quad (7.18)$$

Para encontrar la región de estabilidad, dada en  $|\varphi| \leq 1$ , se sustituye  $\varphi = e^{i\theta}$  y se resuelve para  $Ah$ ,

$$Ah = \frac{e^{4i\theta} - e^{i\theta}}{\frac{21}{8}e^{3i\theta} - \frac{9}{8}e^{2i\theta} + \frac{15}{8}e^{i\theta} - \frac{3}{8}} \quad (7.19)$$

$\theta$  varía entre 0 y  $2\pi$ , se tiene la región de estabilidad mostrada en la Figura 11.

Figura 13: Región de estabilidad del predictor P3.



Los límites de estabilidad en el eje real negativo son  $-0.3333 \leq Ah \leq 0$ .

Cuando  $h \rightarrow 0$ , la ecuación característica de la ecuación (7.17) en diferencias es:

$$\varphi^4 - \varphi = 0 \quad (7.20)$$

Cuyas raíces son  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_{2,3} = -0.5 \pm i0.8660$  y  $\varphi_4 = 1$ , de igual forma su magnitud es menor o igual a 1, en consecuencia, P3 es estable para tamaños de paso pequeños.

## Estabilidad P5

La ecuación del predictor P5 de la Tabla 1, viene dado por:

$$p_{k+1} = \frac{1}{3}y_{k-1} + \frac{1}{3}y_{k-2} + \frac{1}{3}y_{k-3} + \frac{h}{72}(191f_k - 99f_{k-1} + 141f_{k-2} - 17f_{k-3}) \quad (7.21)$$

Al reemplazando  $y' = f(t_k, y_k) = Ay$  en la ecuación (7.21) se obtiene:

$$p_{k+1} = \frac{1}{3}y_{k-1} + \frac{1}{3}y_{k-2} + \frac{1}{3}y_{k-3} + \frac{Ah}{72}(191y_k - 99y_{k-1} + 141y_{k-2} - 17y_{k-3}) \quad (7.22)$$

La ecuación característica de esta ecuación viene dada por:

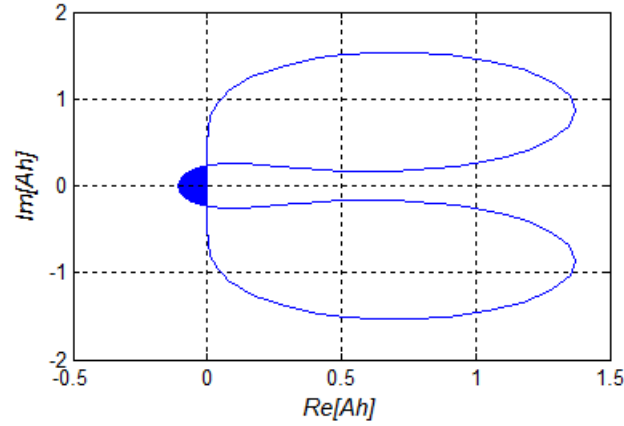
$$\varphi^4 - \frac{1}{3}\varphi^2 - \frac{1}{3}\varphi - \frac{1}{3} - \frac{hA}{72}(191\varphi^3 - 99\varphi^2 + 141\varphi - 17) = 0 \quad (7.23)$$

Para encontrar la región de estabilidad, dada en  $|\varphi| \leq 1$ , se sustituye  $\varphi = e^{i\theta}$  y se resuelve para  $Ah$ ,

$$Ah = \frac{e^{4i\theta} - \frac{1}{3}e^{2i\theta} - \frac{1}{3}e^{i\theta} - \frac{1}{3}}{\frac{191}{72}e^{3i\theta} - \frac{99}{72}e^{2i\theta} + \frac{141}{72}e^{i\theta} - \frac{17}{72}} \quad (7.24)$$

La Figura 12 muestra la región de estabilidad,  $\theta$  varía entre 0 y  $2\pi$ .

Figura 14: Región de estabilidad del predictor P5.



Los límites de estabilidad en el eje real son  $-0.1071 \leq Ah \leq 0$ .

Cuando  $h \rightarrow 0$ , la ecuación característica de la ecuación (7.22) en diferencias es:

$$\varphi^4 - \frac{1}{3}\varphi^2 - \frac{1}{3}\varphi - \frac{1}{3} = 0 \quad (7.25)$$

Luego sus raíces son  $\varphi_1 = 1$ ,  $\varphi_{2,3} = -0.1410 \pm i0.6666$  y  $\varphi_4 = -0.7181$ , la magnitud de las raíces es menor o igual a 1, así la ecuación (7.21) es estable para tamaños de paso pequeños.

## Estabilidad P6

La ecuación del predictor P6 de la Tabla 1, viene dado por:

$$p_{k+1} = \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{2}y_{k-1} + \frac{h}{48}(119f_k - 99f_{k-1} + 69f_{k-2} - 17f_{k-3}) \quad (7.26)$$

Al reemplazando  $y' = f(t_k, y_k) = Ay$  en la ecuación (7.26) se obtiene:

$$p_{k+1} = \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{2}y_{k-1} + \frac{Ah}{48}(119y_k - 99y_{k-1} + 69y_{k-2} - 17y_{k-3}) \quad (7.27)$$

La ecuación característica de la ecuación anterior es:

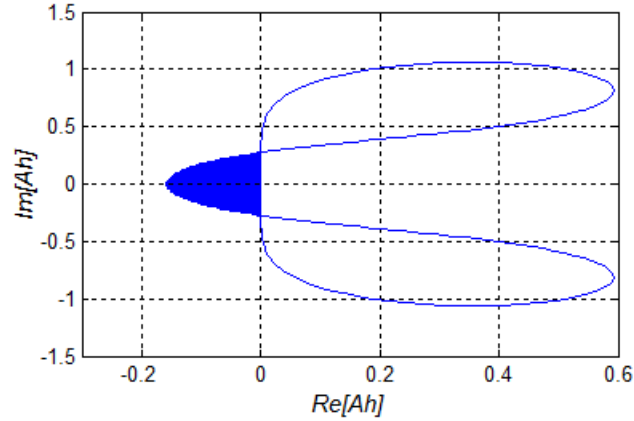
$$\varphi^4 - \frac{1}{2}\varphi^3 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{hA}{48}(119\varphi^3 - 99\varphi^2 + 69\varphi - 17) = 0 \quad (7.28)$$

Para encontrar la region de estabilidad, dada en  $|\varphi| \leq 1$ , se sustituye  $\varphi = e^{i\theta}$ , se varía  $\theta$  entre 0 y  $2\pi$  y se resuelve para  $Ah$ ,

$$Ah = \frac{e^{4i\theta} - \frac{1}{2}e^{3i\theta} - \frac{1}{2}e^{2i\theta}}{\frac{119}{48}e^{3i\theta} - \frac{99}{48}e^{2i\theta} + \frac{69}{48}e^{i\theta} - \frac{17}{48}} \quad (7.29)$$

En la Figura 13 se muestra la región de estabilidad para el predictor P6.

Figura 15: Región de estabilidad del predictor P6.



Los límites de estabilidad en el eje real son  $-0.1579 \leq Ah \leq 0$ .

Cuando  $h \rightarrow 0$ , la ecuación característica de la ecuación (7.27) en diferencias es:

$$\varphi^4 - \frac{1}{2}\varphi^3 - \frac{1}{2}\varphi^2 = 0 \quad (7.30)$$

Cuyas raíces son  $\varphi_1 = 1$ ,  $\varphi_{2,3} = 0$  y  $\varphi_4 = -0.5$ , la magnitud de las raíces es menor o igual a 1, luego la fórmula predictora es estable para tamaños de paso pequeños.

## Estabilidad C1

La ecuación del corrector C6 de la Tabla 2, viene dado por:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}) \quad (7.31)$$

Al reemplazar  $y' = f(t_k, y_k) = Ay$  en la ecuación (7.31) se obtiene:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{Ah}{24}(9y_{k+1} + 19y_k - 5y_{k-1} + y_{k-2}) \quad (7.32)$$

La ecuación característica de la ecuación anterior es:

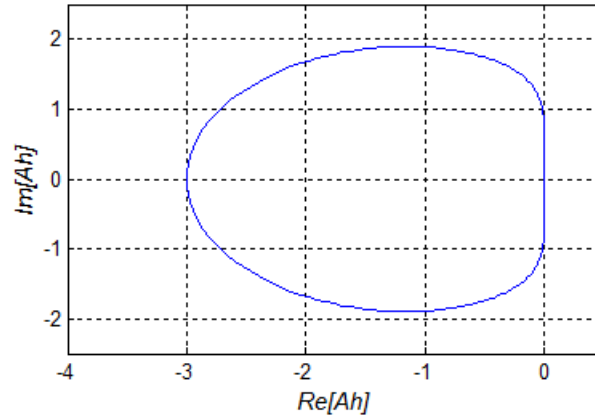
$$\varphi^3 - \varphi^2 - \frac{hA}{24}(9\varphi^3 + 19\varphi^2 - 5\varphi + 1) = 0 \quad (7.33)$$

Para encontrar la región de estabilidad, dada en  $|\varphi| \leq 1$ , se sustituye  $\varphi = e^{i\theta}$  y se resuelve para  $Ah$ ,

$$Ah = \frac{e^{3i\theta} - e^{2i\theta}}{\frac{9}{24}e^{3i\theta} + \frac{19}{24}e^{2i\theta} - \frac{5}{24}e^{i\theta} + \frac{1}{24}} \quad (7.34)$$

La figura 14, muestra la región de estabilidad, variando  $\theta$  entre 0 y  $2\pi$ .

Figura 16: Región de estabilidad del corrector C1.



Los límites de estabilidad en el eje real son  $-3 \leq Ah \leq 0$ .

Cuando  $h \rightarrow 0$ , la ecuación característica de la ecuación (7.32) en diferencias es:

$$\varphi^3 - \varphi^2 = 0 \quad (7.35)$$

Cuyas raíces son  $\varphi_1 = 1$ ,  $\varphi_{2,3} = 0$ , la magnitud de las raíces es menor o igual a 1, entonces el predictor P6 es estable.

## Estabilidad C4

La ecuación del corrector C4 de la Tabla 2, viene dado por:

$$y_{k+1} = \frac{1}{3}y_k + \frac{1}{3}y_{k-1} + \frac{1}{3}y_{k-2} + \frac{h}{36}(13f_{k+1} + 39f_k + 15f_{k-1} + 5f_{k-2}) \quad (7.36)$$

Al reemplazando  $y' = f(t_k, y_k) = Ay$  en la ecuación (7.36) se obtiene:

$$y_{k+1} = \frac{1}{3}y_k + \frac{1}{3}y_{k-1} + \frac{1}{3}y_{k-2} + \frac{Ah}{36}(13y_{k+1} + 39y_k + 15y_{k-1} + 5y_{k-2}) \quad (7.37)$$

La ecuación característica de la ecuación anterior es:

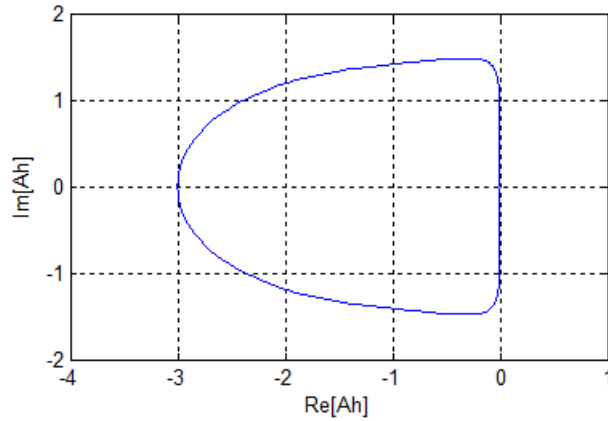
$$\varphi^3 - \frac{1}{3}\varphi^2 - \frac{1}{3}\varphi - \frac{1}{3} - \frac{hA}{36}(13\varphi^3 + 39\varphi^2 + 15\varphi + 5) = 0 \quad (7.38)$$

Para encontrar la región de estabilidad, dada en  $|\varphi| \leq 1$ , se sustituye  $\varphi = e^{i\theta}$  y se resuelve para  $Ah$ ,

$$Ah = \frac{e^{3i\theta} - \frac{1}{3}e^{2i\theta} - \frac{1}{3}e^{i\theta} - \frac{1}{3}}{\frac{13}{36}e^{3i\theta} + \frac{39}{36}e^{2i\theta} + \frac{15}{36}e^{i\theta} + \frac{5}{36}} \quad (7.39)$$

La Figura 15, muestra la región de estabilidad, variando  $\theta$  entre 0 y  $2\pi$ .

Figura 17: Región de estabilidad del corrector C4.



De igual forma, los límites de estabilidad en el eje real son  $-3 \leq Ah \leq 0$ .

Cuando  $h \rightarrow 0$ , la ecuación característica de la ecuación (7.37) en diferencias es:

$$\varphi^3 - \frac{1}{3}\varphi^2 - \frac{1}{3}\varphi - \frac{1}{3} = 0 \quad (7.40)$$

De ahí que las raíces sean  $\varphi_1 = 1$ ,  $\varphi_{2,3} = -0.333 \pm i0.4714$ , la magnitud de estas son menor o igual a 1, por consiguiente la fórmula correctora es estable.

## Estabilidad C5

La ecuación del corrector C5 de la Tabla 2, viene dado por:

$$y_{k+1} = \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{2}y_{k-1} + \frac{h}{48}(17f_k + 51f_{k-1} + 3f_{k-2} + 1f_{k-3}) \quad (7.41)$$

Al reemplazando  $y' = f(t_k, y_k) = Ay$  en la ecuación (7.41) se obtiene:

$$y_{k+1} = \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{2}y_{k-1} + \frac{Ah}{48}(17y_k + 51y_{k-1} + 3y_{k-2} + 1y_{k-3}) \quad (7.42)$$

La ecuación característica de esta ecuación viene dada por:

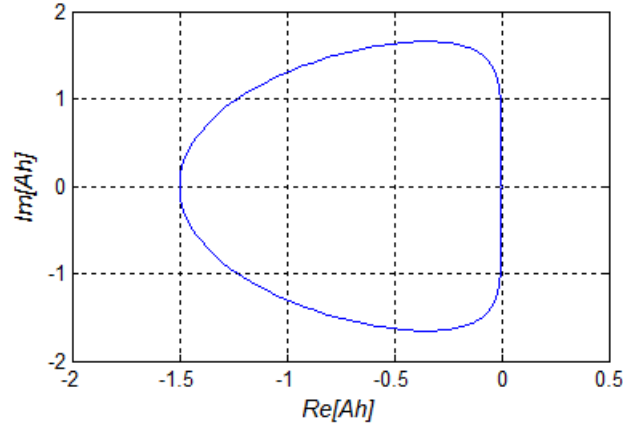
$$\varphi^3 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi - \frac{hA}{48}(17\varphi^3 + 51\varphi^2 + 3\varphi + 1) = 0 \quad (7.43)$$

Para encontrar la región de estabilidad, dada en  $|\varphi| \leq 1$ , se sustituye  $\varphi = e^{i\theta}$  y se resuelve para  $Ah$ ,

$$Ah = \frac{e^{3i\theta} - \frac{1}{2}e^{2i\theta} - \frac{1}{2}e^{i\theta}}{\frac{17}{48}e^{3i\theta} + \frac{51}{48}e^{2i\theta} + \frac{3}{48}e^{i\theta} + \frac{1}{48}} \quad (7.44)$$

Variando  $\theta$  entre 0 y  $2\pi$  se tiene la región de estabilidad, mostrada en la Figura 16.

Figura 18: Región de estabilidad del corrector C5.



Los límites de estabilidad en el eje real son  $-1,5 \leq Ah \leq 0$ .

Cuando  $h \rightarrow 0$ , la ecuación característica de la ecuación (7.42) en diferencias es:

$$\varphi^3 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi = 0 \quad (7.45)$$

Las raíces de la ecuación (7.45) son;  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = -0.5$  y  $\varphi_3 = 1$ , cuyas magnitudes son menor o igual a 1, por lo tanto, el corrector C5 es estable para tamaños de paso pequeños.

## Estabilidad C6

La ecuación del corrector C6 de la Tabla 2, viene dado por:

$$y_{k+1} = \frac{2}{3}y_{k-1} + \frac{1}{3}y_{k-2} + \frac{h}{72}(25f_k + 91f_{k-1} + 43f_{k-2} + 9f_{k-3}) \quad (7.46)$$

Al reemplazando  $y' = f(t_k, y_k) = Ay$  en la ecuación (7.46) se obtiene:



$$y_{k+1} = \frac{2}{3}y_{k-1} + \frac{1}{3}y_{k-2} + \frac{Ah}{72}(25y_k + 91y_{k-1} + 43y_{k-2} + 9y_{k-3}) \quad (7.47)$$

La ecuación característica de la ecuación anterior es:

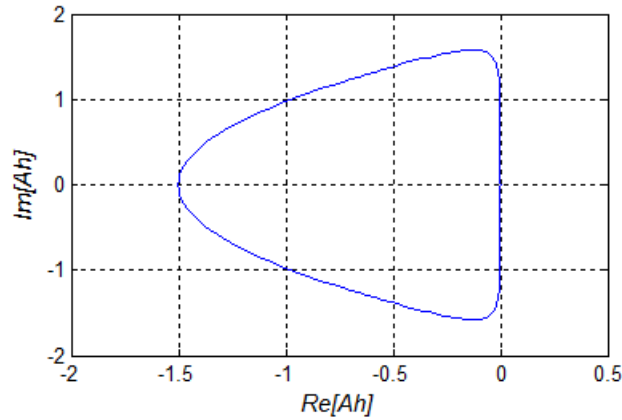
$$\varphi^3 - \frac{2}{3}\varphi - \frac{1}{3} - \frac{hA}{72}(25\varphi^3 + 91\varphi^2 + 43\varphi + 9) = 0 \quad (7.48)$$

Para encontrar la región de estabilidad, dada en  $|\varphi| \leq 1$ , se sustituye  $\varphi = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  y se resuelve para  $Ah$ ,

$$Ah = \frac{e^{3i\theta} - \frac{2}{3}e^{i\theta} - \frac{1}{3}}{\frac{25}{72}e^{3i\theta} + \frac{91}{72}e^{2i\theta} + \frac{43}{72}e^{i\theta} + \frac{9}{72}} \quad (7.49)$$

La Figura 18, muestra la región de estabilidad.

Figura 19: Región de estabilidad del corrector C6.



Los límites de estabilidad en el eje real son  $-1.5 \leq Ah \leq 0$ .

Cuando  $h \rightarrow 0$ , la ecuación característica de la ecuación (7.47) en diferencias es:

$$\varphi^3 - \frac{2}{3}\varphi - \frac{1}{3} = 0 \quad (7.50)$$

Cuyas raíces son  $\varphi_1 = 1$ ,  $\varphi_{2,3} = -0.5 \pm i0.2887$ , en magnitud son menor o igual a 1, por esta razón, la fórmula correctora es estable para tamaños de paso pequeños.

Finalmente, la figura 20 muestra una comparación entre la región de estabilidad de los correctores C1, C4, C5 y C6, como se puede ver, las regiones son diferentes, sin embargo la parte real de las raíces entre los correctores C1 y C4 coinciden, lo mismo ocurre con la parte real de los correctores C5 y C6.

Figura 20: Comparación entre región de estabilidad de los diferentes correctores.

