



Pontificia Universidad
JAVERIANA
Cali

Parametrización del diseño de ejes para agitadores radiales en función de sus condiciones de trabajo

Miguel Alejandro Bejarano Perdomo

Programa de Ingeniería Mecánica
Departamento de Ingeniería Civil e Industrial
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Pontificia Universidad Javeriana
Santiago de Cali, Colombia

2024

Parametrización del diseño de ejes para agitadores radiales en función de sus condiciones de trabajo

Miguel Alejandro Bejarano Perdomo

Directora:

Ph.D. Sofía Catalina Henao Aguirre

Programa de Ingeniería Mecánica
Departamento de Ingeniería Civil e Industrial
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Pontificia Universidad Javeriana
Santiago de Cali, Colombia
2024

Declaración de obra original

Yo declaro lo siguiente:

He leído el Acuerdo 535 de 2010 del Consejo Directivo de la Pontificia Universidad Javeriana. «Política de Propiedad Intelectual» y la Normatividad Nacional relacionada al respeto de los derechos de autor. Este anteproyecto representa mi trabajo original, excepto donde he reconocido las ideas, las palabras, o materiales de otros autores.

Cuando se han presentado ideas o palabras de otros autores en este anteproyecto, he realizado su respectivo reconocimiento aplicando correctamente los esquemas de citas y referencias bibliográficas en el estilo requerido.

He obtenido el permiso del autor o editor para incluir cualquier material con derechos de autor (por ejemplo, tablas, figuras, instrumentos de encuesta o grandes porciones de texto).

Por último, he sometido esta disertación a la herramienta de integridad académica, definida por la universidad.



Miguel Alejandro Bejarano Perdomo

Fecha 17/06/2024

Agradecimientos

A mi familia. Por ser mi pilar inquebrantable, por sus invaluable consejos y su amor incondicional. Gracias por su apoyo constante y por impulsarme a alcanzar mis sueños. Este logro es tanto de ustedes como mío.

Con todo mi amor y gratitud.

- **Miguel Alejandro Bejarano Perdomo**

Resumen

Parametrización del diseño de ejes para agitadores radiales en función de sus condiciones de trabajo

Esta tesis aborda la parametrización del diseño de ejes para agitadores radiales considerando sus condiciones operativas, con el objetivo de garantizar una operación segura y evitar la resonancia. Los objetivos principales comprenden la caracterización de las vibraciones mecánicas, el análisis de las fuerzas ejercidas por los fluidos en movimiento y la validación del diseño paramétrico mediante datos de funcionamiento reales. El trabajo presenta un marco teórico detallado que introduce conceptos fundamentales sobre los tipos de flujo en agitadores, los tipos de impulsores y los fenómenos de vibración. Además, se incluye un estado del arte que examina diversas investigaciones y metodologías relacionadas con el diseño de agitadores, destacando técnicas relevantes de modelado y análisis. Se utiliza una metodología que incluye la identificación de especificaciones técnicas, el análisis de fuerzas, la generación de modelos de vibración y el análisis de esfuerzos. Estas etapas se combinan para desarrollar un diseño paramétrico que prevenga problemas de resonancia y fatiga. Los resultados incluyen la definición de especificaciones técnicas, las expresiones de fuerzas y esfuerzos en el eje, los modelos matemáticos de vibraciones y la validación de la parametrización propuesta.

Palabras clave: Agitador radial, resonancia, vibración, fatiga, diseño.

Abstract

Parameterization of shaft design for radial agitators based on working conditions

This thesis addresses the parametrization of the shaft design for radial agitators considering their operating conditions, with the objective of ensuring safe operation and avoiding resonance. The main objectives include the characterization of the mechanical vibrations, the analysis of the forces exerted by the moving fluids and the validation of the parametric design by using real operating data. The work presents a detailed theoretical framework that introduces fundamental concepts on flow types in shakers, impeller types and vibration phenomena. In addition, a state of the art is included that reviews various research and methodologies related to agitator design, highlighting relevant modeling and analysis techniques. A methodology is used that includes identification of technical specifications, force analysis, vibration model generation and stress analysis. These stages are combined to develop a parametric design that prevents resonance and fatigue problems. The results include the definition of technical specifications, expressions of forces and stresses in the shaft, mathematical vibration models and validation of the proposed parameterization.

Keywords: Radial agitator, resonance, vibration, fatigue, design.

Contenido

	Pág.
Resumen	VII
Abstract	VIII
Lista de figuras	XII
Lista de tablas	XIII
Lista de símbolos	1
Introducción	1
1. Marco teórico	3
1.1 Tipos de flujo en agitadores	3
1.1.1 Agitadores de flujo axial.....	4
1.1.2 Agitadores de flujo radial	4
1.1.3 Agitadores de flujo tangencial	5
1.2 Tipos de impulsores.....	6
1.2.1 Turbina de paletas planas con disco (Rushton)	6
1.2.2 Impulsores de hélice	6
1.2.3 Impulsores de ancla.....	7
1.2.4 Impulsor <i>cowles</i>	8
1.3 Conceptos del proceso de agitación de fluidos.....	8
1.3.1 Operaciones unitarias.....	8
1.3.2 Números adimensionales	9
1.3.3 Número de potencia.....	9
1.3.4 Número de Froude	9
1.3.5 Número de Reynolds.....	10
1.3.6 Regímenes de flujo	10
1.3.7 Curvas del número de potencia.....	11
1.3.8 Relaciones geométricas de tanques para procesos de agitación.....	12
1.3.9 Vórtices Von Kármán.....	13
1.3.10 Paso de alabes	14
1.4 Principios de vibraciones mecánicas	14
1.4.1 Grados de libertad.....	15
1.4.2 Modos de vibración	15
1.4.3 Sistemas de vibración discretos y continuos.....	16
1.5 Clasificación de vibraciones.....	17

1.5.1	Vibración libre y forzada	17
1.5.2	Vibración no amortiguada y amortiguada	18
1.5.3	Vibración lineal y no lineal	18
1.5.4	Vibración aleatoria y determinística	18
1.5.5	Sistemas de varios grados de libertad en un modo de vibración	19
1.6	Fenómenos de vibración.....	21
1.6.1	Frecuencia natural	21
1.6.2	Resonancia	21
1.6.3	Velocidad crítica.....	21
1.7	Elementos del análisis de vibración	22
1.7.1	Elementos de resorte.....	22
1.7.2	Elementos de amortiguamiento	22
1.7.3	Amortiguamiento viscoso.....	23
1.7.4	Amortiguamiento de Coulomb.....	23
1.7.5	Amortiguamiento histerético	23
1.7.6	Constante de amortiguamiento viscoso.....	24
1.7.7	Relación de amortiguamiento	24
1.7.8	Frecuencia natural amortiguada.....	25
2.	Estado del arte	27
3.	Planteamiento del problema	31
4.	Justificación.....	33
5.	Objetivos	35
5.1	Objetivo general.....	35
5.2	Objetivos específicos	35
6.	Metodología.....	37
6.1	Restricciones	37
6.2	Definición de especificaciones técnicas.....	37
6.2.1	Velocidad angular	38
6.2.2	Determinación de la potencia de agitación.....	38
6.2.3	Propiedades del fluido de trabajo.....	39
6.3	Análisis de fuerzas y esfuerzos en el eje	39
6.3.1	Expresiones para las fuerzas presentes.....	41
6.3.2	Fuerza hidráulica	41
6.3.3	Análisis de esfuerzos.....	42
6.3.4	Análisis de fatiga.....	42
6.3.5	Resistencia a la fatiga del elemento de máquina	43
6.4	Análisis de vibraciones	44
6.4.1	Vibración axial	44
6.4.2	Vibración circunferencial	44
6.4.3	Vibración transversal	45
6.5	Validez de la parametrización.....	45
7.	Resultados	47
7.1	Definición de especificaciones técnicas.....	47

7.2	Fuerzas y esfuerzos en el eje.....	48
7.3	Modelos de vibraciones.....	54
7.3.1	Vibración axial.....	55
7.3.2	Vibración circunferencial	56
7.3.3	Vibración transversal.....	58
7.4	Validez de la parametrización	59
7.5	Formato generado	61
8.	Conclusiones.....	65
9.	Trabajos futuros	67
	Bibliografía	69
	Anexos.....	73

Lista de figuras

	Pág.
Figura 1. Componentes de un agitador [3].	3
Figura 2. Líneas de flujo para caso radial (izquierda), axial (centro) y tangencial (derecha) [6].	5
Figura 3. Impulsor de disco con paletas planas [8].	6
Figura 4. Impulsor de hélice [8].	7
Figura 5. Impulsor de tipo ancla [8].	7
Figura 6. Impulsor <i>cowles</i> [7].	8
Figura 7. Curvas de número de potencia [7].	11
Figura 8. Dimensiones de un tanque según relaciones geométricas estándar [6].	13
Figura 9. Sistema torsional de un grado de libertad [9].	15
Figura 10. Viga en voladizo, grados de libertad [9].	16
Figura 11. (a) Excitación determinística, (b) Excitación aleatoria [9].	19
Figura 12. Esquema de cargas presentes en un agitador [2].	39
Figura 13. Diagrama de cuerpo libre incluyendo las cargas significativas	40
Figura 14. Volumen diferencial de esfuerzos [11].	50
Figura 15. Diagrama de esfuerzo tangencial en cilindros de pared gruesa [10].	51
Figura 16. Relación esfuerzo-tiempo [10].	52
Figura 17. Comparación de diseños.	60
Figura 18. Primera parte de la parametrización Excel.	61
Figura 19. Segunda parte de la parametrización Excel.	62
Figura 20. Tercera parte de la parametrización Excel.	63
Figura 21. Cuarta parte de la parametrización Excel.	63
Figura 22. Formato con número de potencia manual.	64

Lista de tablas

Pág.

Tabla 1. Funciones de cargas internas en términos de la posición y cargas externas. ... 50

Lista de símbolos

Símbolo	Significado	Unidades (SI)
N_p	número de potencia	
P	potencia neta	J/s
ρ	densidad	kg/m^3
N	frecuencia de agitación	Hz
D_a	diámetro del impulsor	m
N_{Fr}	número de Froude	
g	constante de gravedad	m/s^2
N_{Re}	número de Reynolds	
μ	viscosidad dinámica	$kg/m \cdot s$
D_t	diámetro tanque	m
H	altura del fluido	m
E	altura del impulsor	m
W	ancho del impulsor	m
m	masa	kg
c	constante de amortiguamiento	$N \cdot s/m$
k	constante de resorte	N/m
c_c	constante de amortiguamiento crítico	$N \cdot s/m$
ζ	relación de amortiguamiento	
F_E	fuerza de empuje del fluido contra el impulsor	N
P_V	presión sobre la cara superior del impulsor	N/m^2
P_H	Presión sobre la cara cilíndrica del eje	N/m^2
P	peso del agitador	N
T_m	torque del motor	$N \cdot m$
F_H	fuerza hidráulica	N
A	reacción del primer soporte	N

B	reacción del segundo soporte	N
M_A	momento en el primer soporte	$N \cdot m$
M_B	momento en el segundo soporte	$N \cdot m$
S_B	distancia entre rodamientos	m
h	distancia entre altura del fluido e impulsor	m
A_{TI}	área transversal impulsor	m^2
l	longitud sumergida del eje	m
\bar{y}	centroide de cuerpo	m
y_P	centro de presión	m
K_t	concentrador de esfuerzo normal estático	
K_{ts}	concentrador de esfuerzo tangencial estático	
K_f	concentrador de esfuerzo normal a fatiga	
K_{fs}	concentrador de esfuerzo tangencial a fatiga	
σ_a	esfuerzo alternante	N/m^2
σ_m	esfuerzo medio	N/m^2
σ'	esfuerzo de Von Mises	N/m^2
σ_θ	esfuerzo tangencial de cilindros a presión	N/m^2
M	carga interna de flexión	$N \cdot m$
F	carga interna axial	N
T	carga interna de torsión	$N \cdot m$
P_o	presión sobre el centro de presión del eje	N/m^2
η	factor de seguridad a fatiga	
S_e	resistencia a la fatiga del elemento de máquina	N/m^2
S_{ut}	esfuerzo último	N/m^2
K_a	factor de superficie	
K_b	factor de forma	
K_c	factor de carga	
K_d	factor de temperatura	
K_e	factor de confiabilidad	
S_e'	límite de resistencia a la fatiga en viga rotativa	N/m^2
ω	velocidad angular o frecuencia de trabajo	rad/s
ω_n	frecuencia natural	rad/s

ω_d	frecuencia natural amortiguada	<i>rad/s</i>
γ	factor de seguridad de resonancia	
γ_A	factor de seguridad de resonancia amortiguado	
Y	módulo de Young	<i>N/m²</i>
G	módulo de corte	<i>N/m²</i>
J_o	momento polar de inercia de área	<i>m⁴</i>

Introducción

En la industria de procesos químicos, bioquímicos y de manufactura, la agitación de fluidos desempeña un papel esencial en diversas operaciones unitarias. En este contexto, los agitadores son dispositivos ampliamente utilizados debido a su eficiencia. No obstante, su diseño y operación presentan diversos desafíos y complejidades. Este trabajo se enfoca en la parametrización del diseño de ejes para agitadores, considerando sus condiciones de trabajo, con el objetivo de garantizar una operación segura, evitando resonancia y fatiga. La resonancia en los agitadores puede causar vibraciones indeseadas, sobrecargas mecánicas y fallos, resultando en consecuencias costosas y peligrosas. Por ello, un diseño adecuado es crucial para mantener una operación segura y eficiente en entornos industriales.

Esta investigación se enmarca en la necesidad de comprender las interacciones entre los agitadores y los fluidos de trabajo, así como las fuerzas que actúan sobre ellos. Además, se busca establecer parámetros de diseño adaptados a las especificaciones operativas, minimizando los riesgos de resonancia. Para alcanzar este objetivo, se explorarán aspectos como la caracterización de vibraciones mecánicas, el análisis de fuerzas en fluidos en movimiento y la verificación de diseños paramétricos mediante datos reales de funcionamiento.

El contenido del trabajo incluye un marco teórico que introduce conceptos fundamentales sobre los tipos de flujo en agitadores, tipos de impulsores, vibraciones mecánicas y procesos de agitación de fluidos. Posteriormente, se presenta un estado del arte en el que se exploran diversas investigaciones sobre el diseño de agitadores y las metodologías de

modelado y análisis empleadas por otros autores, destacando los más relevante para este trabajo.

A continuación, se plantea el problema de investigación, abarcando las dificultades de los diseños empíricos y los fenómenos de vibraciones que afectan la integridad de los elementos mecánicos de los agitadores. Se discute cómo los diseños no fundamentados pueden generar riesgos y problemas futuros, los cuales son evitables. La justificación del trabajo resalta la variabilidad de los agitadores en cuanto a sus componentes, parámetros de funcionamiento y procesos, indicando cómo estos aspectos influyen en el diseño de cada agitador.

Adicionalmente, se presentan los objetivos específicos y el objetivo general, centrados en el proceso de parametrización, que incluye la investigación de parámetros de funcionamiento de los agitadores, el cálculo y análisis de fuerzas y esfuerzos, y la generación de modelos de vibración. El objetivo general es formular un diseño paramétrico que considere todos estos aspectos. La metodología empleada se basa en la identificación de especificaciones técnicas, el análisis de fuerzas, la generación de modelos de vibración y el análisis de esfuerzos y fatiga, combinando estos enfoques para lograr el diseño paramétrico esperado, libre de problemas de resonancia o fatiga.

Finalmente, se establecen las restricciones de diseño, se presentan los resultados, se discuten las posibles mejoras y enfoques útiles para trabajos futuros, y se concluye el trabajo. El proyecto cierra con una bibliografía que respalda y contextualiza la investigación.

1. Marco teórico

El diseño de un agitador implica la integración de diversas disciplinas dentro del campo de la ingeniería mecánica y química, abarcando áreas como la mecánica de fluidos, la mecánica de sólidos, el diseño de elementos de máquinas, la dinámica de cuerpos rígidos y las vibraciones mecánicas, entre otros aspectos relacionados. A continuación, se proporciona información sobre los fundamentos teóricos que requieren consideración en este proceso de diseño [1], [2], [3].

1.1 Tipos de flujo en agitadores

Un agitador se compone de diversas piezas cuya geometría influye en la función del agitador, como se ilustra en la **Figura 1** [3].

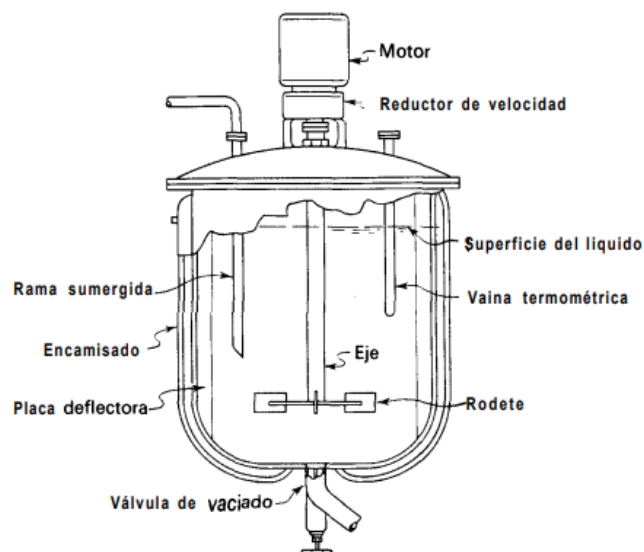


Figura 1. Componentes de un agitador [3].

El flujo generado en un tanque se ve influenciado por el tipo de impulsor, las características físicas del fluido y el dimensionamiento del tanque. Generalmente, el flujo se describe a través de la velocidad del fluido, que consta de tres componentes que determinan los principales tipos de flujo [3], [4], [5]:

- la primera componente, denominada radial, se desplaza en dirección perpendicular al eje del impulsor;
- la segunda componente es la longitudinal, que fluye paralela al eje; y
- la tercera es la tangencial o rotacional, que se desplaza en dirección tangencial a la trayectoria circular del impulsor.

Para procesos de mezcla o emulsificación, las componentes de velocidad radial y longitudinal contribuyen al flujo para realizar mezclas eficientes, mientras que la componente tangencial tiende a tener otro efecto [3].

1.1.1 Agitadores de flujo axial

Los agitadores de flujo axial generan un flujo que se extiende a un ángulo de 45 grados respecto a la horizontal, induciendo una recirculación hacia el centro. Estos agitadores incluyen aquellos en los que los álabes del impulsor forman un ángulo menor de 90° con el plano perpendicular al eje. Generalmente, se emplean hélices y turbinas con palas inclinadas en esta categoría. Sus líneas de flujo se ilustran en la **Figura 2** [1], [6].

1.1.2 Agitadores de flujo radial

El propósito de los agitadores de flujo radial es maximizar su capacidad de impulsión minimizando la velocidad tangencial del fluido. Debido a esta particularidad, los agitadores radiales no suelen satisfacer necesidades típicas de mezcla, siendo empleados en fluidos con altas viscosidades o que requieren un mezclado intenso. Los tipos más frecuentes de impulsores que generan este tipo de flujo son las turbinas planas y el tipo *cowles*. Las líneas de flujo se ilustran en la **Figura 2** [1], [6].

En agitadores de flujo radial, el número de Reynolds se encuentra en un rango bajo a moderado, lo que significa que el flujo es más laminar y menos turbulento en comparación con los agitadores de flujo axial. La velocidad de rotación típica para agitadores de flujo radial puede variar según la aplicación y el diseño, oscilando entre 100 y 1500 rpm, aunque es posible encontrar valores más bajos o altos según las necesidades particulares del proceso [3].

1.1.3 Agitadores de flujo tangencial

Los agitadores de flujo tangencial presentan una característica distintiva: su patrón de flujo genera remolinos en el fluido de trabajo, lo que resulta en una inmersión incompleta de la flecha y modifica las fuerzas que actúan sobre esta. Esto plantea un desafío de diseño; no obstante, el presente trabajo no se enfoca en el diseño de agitadores de flujo tangencial. La ilustración del flujo se puede observar en la **Figura 2** [3], [6].

El número de Reynolds asociado con los agitadores tangenciales puede variar considerablemente, influenciado por el diseño y las condiciones operativas. Estos agitadores operan dentro de un rango de Reynolds moderado, lo que indica un flujo turbulento y agitado. Las velocidades de rotación típicas abarcan un amplio intervalo dependiendo de la aplicación específica, generalmente situándose entre 300 y 1200 rpm. Sin embargo, en situaciones que lo requieran, las velocidades pueden superar este rango [1], [2], [3].

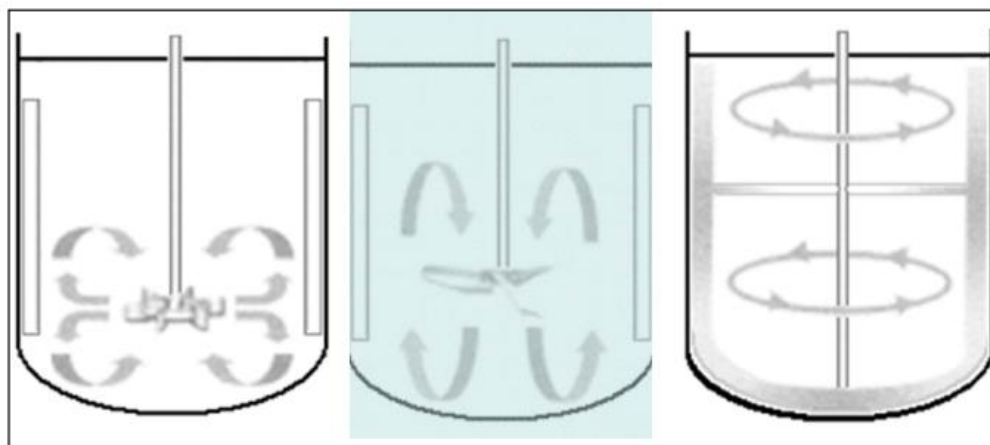


Figura 2. Líneas de flujo para caso radial (izquierda), axial (centro) y tangencial (derecha) [6].

1.2 Tipos de impulsores

Los impulsores son los componentes responsables de inducir el movimiento en el fluido de trabajo, por lo que su configuración define el tipo de flujo que el agitador generará. Los impulsores más comunes se clasifican en tres categorías: palas, turbinas y hélices. A continuación, se detallarán los tipos más utilizados en la industria junto con sus respectivas características [3], [7], [8].

1.2.1 Turbina de paletas planas con disco (Rushton)

Este impulsor tiene la capacidad de generar flujos tanto axiales como radiales. Su efecto estabilizante se debe a la presencia de un disco incorporado. La forma característica de este impulsor se puede observar en la **Figura 3** [8].



Figura 3. Impulsor de disco con paletas planas [8].

1.2.2 Impulsores de hélice

El impulsor de hélice se caracteriza por su capacidad para generar un flujo axial en un régimen turbulento. Normalmente, opera a altas velocidades, oscilando entre 1150 y 1800 rpm aproximadamente. Este tipo de impulsor se utiliza en fluidos de baja viscosidad y resulta altamente efectivo en tanques de gran tamaño debido a su habilidad para cortar y mezclar el fluido. Su forma distintiva se muestra en la **Figura 4** [8].



Figura 4. Impulsor de hélice [8].

1.2.3 Impulsores de ancla

Los impulsores de tipo ancla presentan una característica particular: necesitan ajustarse a la pared del tanque de mezcla y rotar muy cerca de esta. Su función principal consiste en prevenir la adhesión de materiales a la superficie del tanque. Estos impulsores generan un flujo de tipo tangencial y suelen operar en un régimen laminar. Aunque su forma puede variar, el principio de funcionamiento es el descrito anteriormente y su forma habitual se ilustra en la **Figura 5** [8].



Figura 5. Impulsor de tipo ancla [8].

1.2.4 Impulsor *cowles*

Este tipo de impulsor está diseñado específicamente para la dispersión de sólidos o productos altamente viscosos a cualquier temperatura de trabajo. Se compone de un disco circular con un contorno dentado doblado, donde los dobleces están intercalados (hacia arriba y hacia abajo), lo que provoca que el flujo se comporte de manera radial. Se puede observar un ejemplo de esta turbina en la **Figura 6** [7].



Figura 6. Impulsor *cowles* [7].

1.3 Conceptos del proceso de agitación de fluidos

Los procesos de agitación de fluidos adoptan un enfoque experimental para determinar constantes y establecer parámetros de funcionamiento durante la operación. Sin embargo, los métodos experimentales presentan la limitación de necesitar reconfiguración ante la mínima variación de las condiciones del montaje experimental. Por lo tanto, modificaciones como el cambio del fluido, la geometría del tanque o el impulsor del agitador requieren nuevos montajes experimentales y la recopilación de nuevos datos [2], [3], [8].

1.3.1 Operaciones unitarias

Una operación unitaria se define como un conjunto de procesos físicos y químicos aplicados a una cantidad específica de materia. Estas operaciones se utilizan en diversas industrias y se enfocan en la transformación de la materia durante procesos uniformes [3].

1.3.2 Números adimensionales

En contextos industriales, el enfoque experimental de la agitación conlleva frecuentemente el uso de números adimensionales para comparar parámetros entre diferentes casos. Entre los más empleados se encuentran el número de potencia, el número de Reynolds y el número de Froude [3], [5], [8].

1.3.3 Número de potencia

El número de potencia es una magnitud adimensional definida como:

$$N_p = \frac{P}{\rho N^3 D_a^5} \quad (1)$$

Donde:

- N_p : Número de potencia
- P : Potencia neta consumida por un agitador
- ρ : Densidad del fluido
- N : Frecuencia de agitación
- D_a : Diámetro del impulsor

Este número se interpreta como la eficiencia de un agitador para transmitir energía al fluido que está siendo mezclado. Además, se expresa de forma equivalente como una función del número de Reynolds y el número de Froude, y su valor depende del régimen de flujo y la geometría del sistema [1], [2], [3].

1.3.4 Número de Froude

El número de Froude se define como la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas gravitatorias en un fluido en movimiento. Se cuantifica como:

$$N_{Fr} = \frac{D_a N^2}{g} \quad (2)$$

Donde:

- N_{Fr} : Número de Froude
- g : Constante de gravedad

En el diseño de agitadores, se utiliza para calcular el número de potencia, además de ser un parámetro comparativo entre sistemas de agitación [7], [8].

1.3.5 Número de Reynolds

El número de Reynolds relaciona las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas para un fluido en movimiento.

$$N_{Re} = \frac{D_a N \rho}{\mu} \quad (3)$$

Donde:

- N_{Re} : Número de Reynolds
- μ : Viscosidad dinámica

Su relevancia para el diseño de agitadores radica en su capacidad de definir el régimen de flujo en que se realiza el proceso de agitación, además de ser un parámetro del número de potencia [3], [4], [5].

1.3.6 Regímenes de flujo

En el contexto de los procesos de agitación, los regímenes de flujo presentan valores diferentes a los utilizados en los análisis de flujo en tuberías. Los rangos de Reynolds que definen los regímenes de flujo abarcan desde 1 hasta 100 para un régimen laminar, mientras que valores superiores a 10^4 se consideran régimen turbulento. La mayoría de los

procesos de agitación se realizan entre estos dos regímenes, en el llamado régimen transitorio, dependiendo de la necesidad particular del proceso [3], [4], [5].

1.3.7 Curvas del número de potencia

Para determinar el valor del número de potencia en un sistema de agitación, se emplea el método de la curva del número de potencia respecto al número de Reynolds. Este procedimiento implica identificar un número de Reynolds y buscar en una curva específica, según el tipo de tanque y agitador, el punto de intersección con su respectiva curva. Al ubicarlo, se busca el número de potencia equivalente. Las curvas para algunos tipos de agitadores en un tanque que cumple las relaciones geométricas estándar puede verse en la siguiente ilustración, **Figura 7** [14], [15].

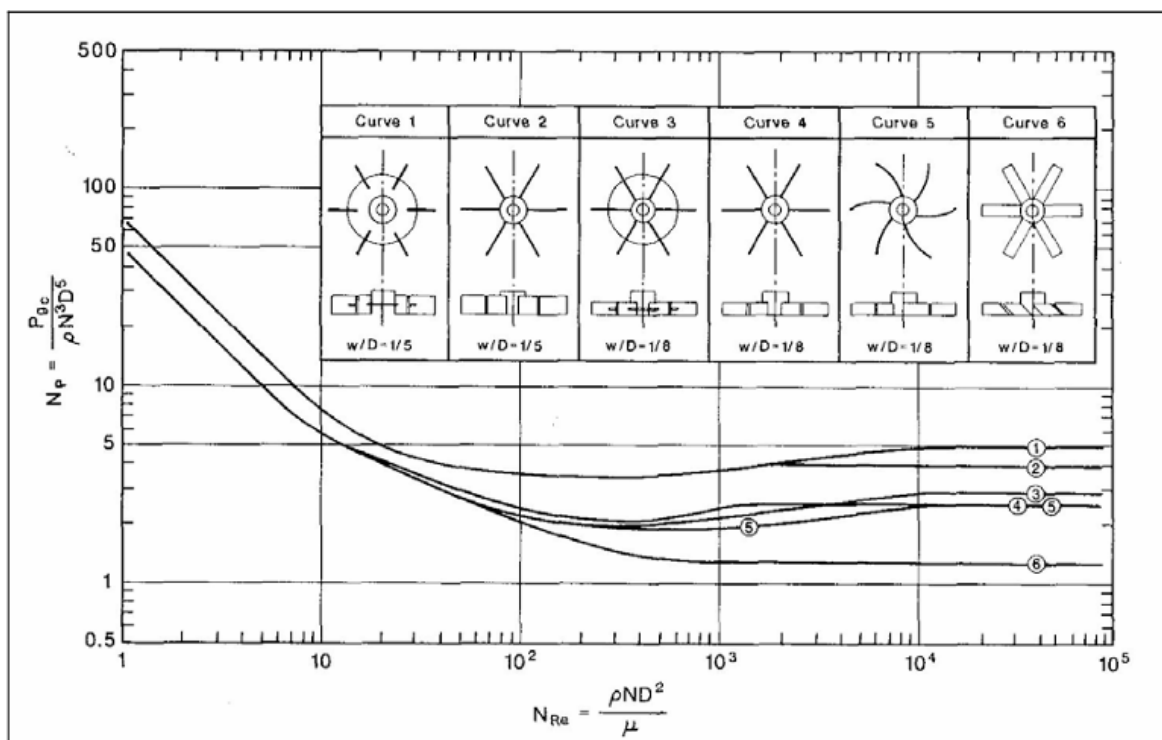


Figura 7. Curvas de número de potencia [7].

El problema de este método radica en la necesidad de su construcción experimental, ya que la precisión de la curva se ve afectada cuando se trabaja con fluidos no newtonianos, así como cuando el tanque no cumple con las relaciones geométricas empleadas en la construcción de las curvas. Estos aspectos, junto con la necesidad de generar una curva

específica para cada impulsor, contribuyen a la complejidad de determinar la potencia requerida para un agitador.

Diversos autores han abordado este desafío mediante la derivación de expresiones numéricas. Estas expresiones facilitan la estimación de la potencia necesaria para un conjunto de fluidos, siempre y cuando los impulsores generen un mismo patrón de flujo. No obstante, esta solución se discutirá con mayor detalle en la sección del estado del arte.

1.3.8 Relaciones geométricas de tanques para procesos de agitación

El recipiente en el que se realizan los procesos de agitación influye en los tiempos de mezclado, la eficiencia de los procesos y la forma que toma la curva del número de potencia. Con el fin de estandarizar los procedimientos y simplificar la aplicación de las curvas asociadas, diversos autores han establecido relaciones geométricas para que los procesos tengan la máxima eficiencia [3]. Estas relaciones se ilustran en la **Figura 8**.

$$\frac{D_a}{D_t} = \frac{1}{3} \quad (4) \qquad \frac{g}{D_a} = \frac{1}{4} \quad (8)$$

$$\frac{H}{D_t} = 1 \quad (5) \qquad \frac{E}{D_t} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

$$\frac{W}{D_a} = \frac{1}{5} \quad (6) \qquad \frac{J}{D_t} = \frac{1}{10} \quad (10)$$

$$\frac{f}{D_t} = \frac{1}{50} \quad (7)$$

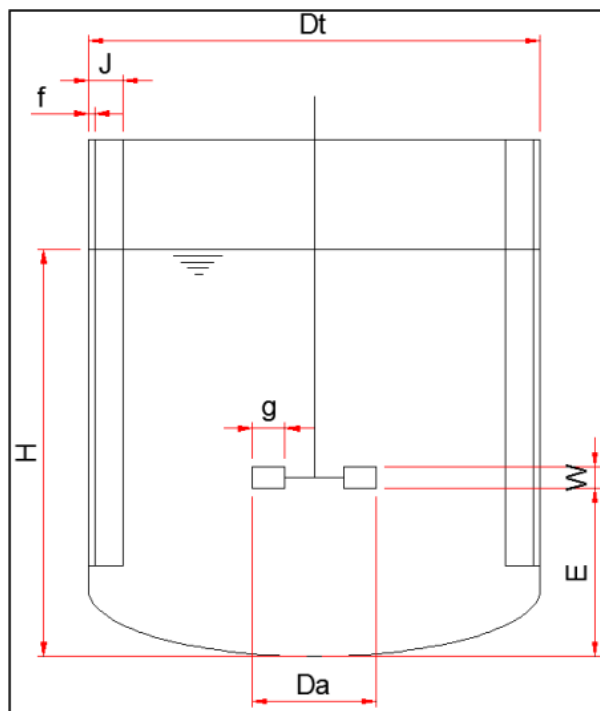


Figura 8. Dimensiones de un tanque según relaciones geométricas estándar [6].

Con base en estas relaciones, determinar el tamaño del resto del sistema requiere definir una dimensión, como la altura del fluido o el diámetro del tanque. Posteriormente, mediante las relaciones geométricas, se obtiene todo el dimensionamiento del tanque y parcialmente del impulsor. Cabe resaltar que la distancia E corresponde tanto a la distancia entre el impulsor y el fondo del tanque como a la distancia entre el fluido y la apertura del tanque.

1.3.9 Vórtices Von Kármán

Los vórtices de Von Kármán son remolinos que se generan cuando un fluido interactúa con un cuerpo sumergido en él. Estos remolinos son causados por la inestabilidad de la capa límite del fluido alrededor del cuerpo, que se separa y genera el flujo. En los procesos de agitación es necesario provocar inestabilidad hidrodinámica, la cual puede originar la formación de vórtices de Von Kármán. Estos vórtices generan diferencias de presión entre diferentes puntos del fluido, causando cambios en las fuerzas a las que el agitador está sometido. Sin embargo, cuantificar este efecto es una tarea compleja. Por lo tanto, no se considerará este fenómeno en el alcance de este proyecto [16].

1.3.10 Paso de alabes

El paso de álabes es un fenómeno que ocurre en el funcionamiento de los impulsores debido a las imperfecciones en la manufactura. Un álabe nunca será idéntico al siguiente o al que está en el extremo opuesto, lo que causa diferencias en las fuerzas de un lado respecto al otro. Este fenómeno podría generar un efecto en la frecuencia y magnitud de las fuerzas que afectan al eje e inducir problemas de resonancia. No obstante, para el alcance de este trabajo, no se tendrá en cuenta este fenómeno debido a la dificultad para cuantificarlo [17], [18].

1.4 Principios de vibraciones mecánicas

Las vibraciones mecánicas se originan debido a desequilibrios en las fuerzas dinámicas de una máquina o pieza, lo que acelera el desgaste de sus componentes por los esfuerzos cíclicos a los que están expuestos. Además, provocan niveles excesivos de ruido y pueden ocasionar el aflojamiento de sujetadores y tuercas, generando problemas a largo plazo [9].

El análisis de las vibraciones en el diseño mecánico tiene como objetivo minimizar sus efectos, reduciendo el desequilibrio de las fuerzas impulsoras. En el diseño de estructuras sujetas a vibraciones, se busca la mejor configuración de los soportes para mitigar el impacto del desequilibrio y evitar daños significativos [10], [11].

La vibración se define como cualquier movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo. La teoría de vibraciones se dedica al estudio de los movimientos oscilatorios de los cuerpos y las fuerzas asociadas a ellos. Un sistema vibratorio consta de tres componentes esenciales: un medio para almacenar energía potencial, un medio para conservar energía cinética y un medio para disipar gradualmente la energía. Estos elementos se conocen como resorte (o elasticidad), masa (o inercia) y amortiguador [9].

El principio fundamental de la vibración consiste en la conversión de energía potencial en energía cinética seguida de su reconversión en energía potencial. Con la presencia de amortiguamiento, la energía se disipa en cada ciclo de vibración y debe ser suministrada por una fuente externa de manera sostenida para mantener la amplitud de las vibraciones.

1.4.1 Grados de libertad

Los grados de libertad se definen como la cantidad mínima de coordenadas independientes necesarias para describir completamente todas las partes de un sistema en un momento dado. Un agitador puede simplificarse como un sistema con un grado de libertad torsional, siempre que se considere un solo modo de vibración, como se ilustra en la **Figura 9** [9].

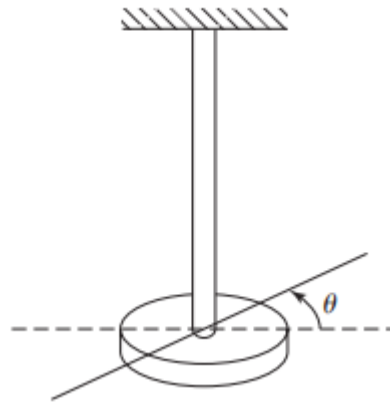


Figura 9. Sistema torsional de un grado de libertad [9].

En este sistema, la coordenada que se utiliza para definir la posición del sistema se denota como θ . Sin embargo, el agitador no solo presenta movimiento rotacional, ya que las fuerzas en el proceso de mezclado afectan al agitador tanto transversal como axialmente. Esto requiere el uso de más coordenadas para definir el sistema en los diferentes modos de vibración, resultando en el modelado del sistema con un grado de libertad por modo de vibración.

1.4.2 Modos de vibración

Al analizar las vibraciones de un sistema mecánico, es necesario establecer el alcance del análisis. La incorporación de más grados de libertad afecta la respuesta vibratoria del sistema, resultando en la identificación de frecuencias naturales para cada grado de libertad con el que se modele [9].

La justificación de emplear más grados de libertad surge de las fuerzas que inciden sobre el sistema. En situaciones simples, una única fuerza genera una respuesta vibratoria

modelada con una sola coordenada. En casos más complejos, donde intervienen múltiples fuerzas o la deflexión del sistema no puede ser representada con una sola coordenada, es necesario utilizar más grados de libertad para definir el sistema.

La determinación del número mínimo de grados de libertad necesarios para lograr una aproximación precisa de la respuesta vibratoria real se fundamenta en los modos de vibración, que representan las formas específicas en las que un cuerpo puede vibrar cuando es excitado.

Considerando un agitador, su movimiento es rotacional respecto a su eje y está sometido a cargas tanto transversales como axiales debido al comportamiento del impulsor [4], [5]. Esto indica que el sistema no puede ser adecuadamente modelado con un solo grado de libertad torsional. En consecuencia, es necesario introducir uno o dos grados de libertad adicionales al sistema, uno para el movimiento axial y otro para el transversal (flexión), resultando en un total de un grado de libertad en cada modo de vibración del sistema [9].

1.4.3 Sistemas de vibración discretos y continuos

Los sistemas de vibración con un número finito de grados de libertad son relativamente fáciles de modelar. Sin embargo, en casos donde los sistemas involucran miembros elásticos continuos, como una viga en voladizo, se presentan infinitos grados de libertad. Para describir completamente las partes de este tipo de sistemas es necesario tener en cuenta las deflexiones en cada uno de sus puntos de masa, lo cual se ilustra en la **Figura 10** [9].

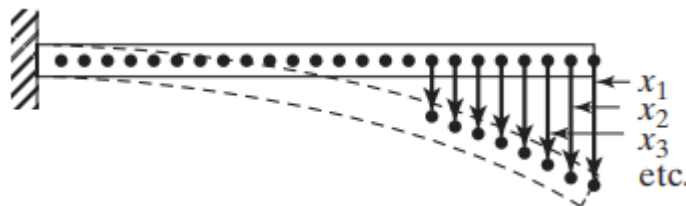


Figura 10. Viga en voladizo, grados de libertad [9].

Como se muestra en la **Figura 10**, cada punto de masa tiene un valor único de deflexión x_n , determinado por la curva de deflexión de la viga. Esta singularidad en las deflexiones de cada punto de masa conduce a la necesidad de considerar una cantidad infinita de grados de libertad para representar el sistema. Esto se debe a que las ecuaciones que gobiernan las curvas de deflexión son funciones continuas, resultando en una representación con infinitos grados de libertad para la descripción completa del sistema.

En virtud de esta propiedad, los sistemas con un número finito de grados de libertad se clasifican como sistemas discretos o de parámetros concentrados, mientras que aquellos con una cantidad infinita de grados de libertad se denominan sistemas continuos [9], [12]. No obstante, en una resolución analítica, los sistemas continuos suelen ser modelados como sistemas discretos, tratando las masas como concentradas en puntos críticos.

Es importante destacar que incrementar la cantidad de grados de libertad de un modelo conduce a resultados más precisos, permitiendo una mejor aproximación de la realidad [9]. Sin embargo, la solución de sistemas con varios grados de libertad requiere el uso de algoritmos numéricos para resolver sistemas de ecuaciones, alejándose de la premisa analítica buscada en este trabajo.

1.5 Clasificación de vibraciones

Las vibraciones se clasifican de varias maneras; a continuación, se presentan algunas de las clasificaciones clave.

1.5.1 Vibración libre y forzada

La vibración libre se caracteriza por la capacidad de un sistema de vibrar por sí solo después de recibir una perturbación inicial, sin la influencia de fuerzas externas. Por otro lado, cuando un sistema se somete a una fuerza externa, que puede ser repetitiva, la vibración resultante se denomina vibración forzada [9], [12].

1.5.2 Vibración no amortiguada y amortiguada

Las oscilaciones que no pierden ni disipan energía debido a resistencia o fricción se clasifican como vibraciones no amortiguadas. Por otro lado, cuando la energía se disipa, se denomina vibración amortiguada. En muchas situaciones, la pérdida de energía es tan insignificante que puede ser pasada por alto; sin embargo, en sistemas cercanos a la resonancia es necesario considerar el efecto del amortiguamiento [9], [12].

1.5.3 Vibración lineal y no lineal

La vibración se clasifica como lineal cuando los componentes elementales del sistema vibratorio se comportan de manera lineal. Sin embargo, si alguno de estos elementos muestra un comportamiento no lineal, entonces se trata de una vibración no lineal. Las ecuaciones diferenciales que describen la respuesta vibratoria son de naturaleza lineal en el caso de vibraciones lineales y no lineales en el caso contrario. Es esencial destacar que en las vibraciones lineales se puede aplicar el principio de superposición, mientras que en las vibraciones no lineales este principio no es válido [9].

1.5.4 Vibración aleatoria y determinística

Cuando se conoce la magnitud de la perturbación en un sistema vibratorio en cualquier momento, se trata de una excitación determinística, lo que implica que la vibración resultante también es determinística. En contraposición, cuando la excitación no es determinística, se clasifica como aleatoria. En este caso, la perturbación en un momento dado no puede ser prevista con certeza, por lo tanto, se suelen utilizar datos estadísticos para describir este tipo de vibración. A menudo, se observa cierta regularidad en el comportamiento de los datos, pero la vibración en sí solo puede describirse en función de datos dispersos y cantidades aleatorias, como se ilustra en la **Figura 11** [9].

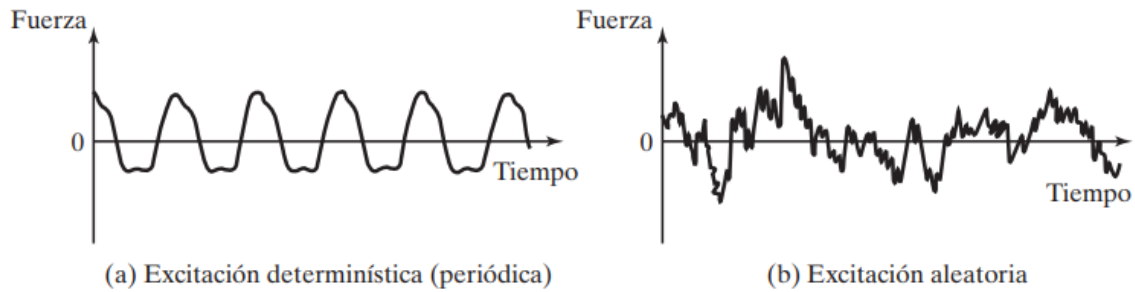


Figura 11. (a) Excitación determinística, (b) Excitación aleatoria [9].

1.5.5 Sistemas de varios grados de libertad en un modo de vibración

Al abordar el modelado de sistemas continuos, se encuentran sistemas con múltiples grados de libertad. La derivación de las ecuaciones de un sistema general con n grados de libertad se lleva a cabo mediante las ecuaciones de movimiento de la segunda ley de Newton [12]. Durante este proceso, frecuentemente se emplean representaciones matriciales para expresar el sistema en n ecuaciones de movimiento, identificando matrices asociadas a la masa, el amortiguamiento y la rigidez [9].

En este trabajo, se modelará el agitador como un sistema de tres grados de libertad, uno en cada modo de vibración. En una situación específica que incluye amortiguamiento y vibración forzada, la ecuación correspondiente de un sistema masa-resorte se expresa, para un caso de varios grados de libertad, en un solo modo de vibración, como se presenta a continuación:

$$[m] \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + [c] \frac{d \vec{x}}{dt} + [k] \vec{x} = \vec{F}$$
 (11)

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_n \end{bmatrix}$$
 (12)

$$[c] = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & (c_3 + c_4) & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_n & (c_n + c_{n+1}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_n & (k_n + k_{n+1}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

donde $[m]$, $[c]$ y $[k]$ representan las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente. Además, las derivadas del vector \vec{x} , respecto al tiempo, y el vector \vec{F} se expresan matricialmente así:

$$\vec{x} = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \quad (15)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \left[\frac{d}{dt}x_1(t), \frac{d}{dt}x_2(t), \dots, \frac{d}{dt}x_n(t) \right]^T \quad (16)$$

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \left[\frac{d^2}{dt^2}x_1(t), \frac{d^2}{dt^2}x_2(t), \dots, \frac{d^2}{dt^2}x_n(t) \right]^T \quad (17)$$

$$\vec{F} = [F_1, F_2, \dots, F_n]^T \quad (18)$$

La simplificación de las ecuaciones hacia la forma de un solo grado de libertad implica que, en lugar de matrices, se toman valores constantes para el amortiguamiento y la rigidez. La

posición y la fuerza siguen modelándose como una función del tiempo, pero solo para el grado de libertad elegido.

1.6 Fenómenos de vibración

La vibración abarca una amplia gama de fenómenos y conceptos dentro del contexto del diseño. Por consiguiente, resulta fundamental definir con precisión y claridad dichos conceptos.

1.6.1 Frecuencia natural

La frecuencia natural es una propiedad intrínseca de un sistema o componente que representa la frecuencia a la cual tiende a oscilar cuando se le excita. Cada sistema o componente tiene múltiples frecuencias naturales según sus grados de libertad. Cuando se excita en una de estas frecuencias naturales, la amplitud de su vibración es grande, lo que puede generar problemas en ciertos contextos de diseño o funcionamiento [9].

1.6.2 Resonancia

Cuando un sistema vibratorio es sometido a una fuerza externa cíclica cuya frecuencia coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, se produce un estado conocido como resonancia. Esta situación causa que el sistema experimente oscilaciones peligrosamente grandes, aumentando la amplitud de las deformaciones y llevando a la generación de fallas estructurales. La resonancia no depende exclusivamente de la magnitud de las fuerzas externas, sino que también está influenciada por las propiedades del material del elemento sometido a vibración y por la geometría del mismo [9].

1.6.3 Velocidad crítica

La velocidad crítica se refiere a la velocidad de giro de un eje o árbol que provoca valores elevados en la amplitud de vibración. Cuando las velocidades de rotación coinciden con las frecuencias naturales del elemento rotor o del sistema completo, se produce este fenómeno. En el diseño se debe asegurar que las frecuencias de funcionamiento sean

menores que las frecuencias naturales del conjunto para evitar problemas relacionados con la resonancia [10], [11].

Uno de los desafíos relacionados con las velocidades críticas es que, durante el arranque o la parada de una máquina rotativa, los componentes pueden pasar por las frecuencias naturales del sistema, causando resonancia. Esto afecta la vida útil de la maquinaria.

1.7 Elementos del análisis de vibración

El análisis de las vibraciones mecánicas de un cuerpo requiere la caracterización de los elementos según su efecto en la respuesta vibratoria del sistema.

1.7.1 Elementos de resorte

Un resorte se define como un eslabón mecánico caracterizado generalmente por masa y amortiguamiento insignificantes en la mayoría de las aplicaciones. Cualquier miembro deformable puede considerarse un resorte. Estos componentes se dividen en dos categorías: resortes lineales y no lineales. Un resorte se considera lineal si la fuerza de restitución es proporcional a la deformación multiplicada por una constante. En contraste, en un resorte no lineal, la relación de la fuerza puede modelarse como la suma de un término lineal y un término cúbico [9], [12].

Los resortes afectan el análisis de vibraciones al introducir un término que modela la restitución del sistema al estado de reposo, constituyendo un componente fundamental en el análisis de vibraciones mecánicas. Los resortes no lineales pueden representarse como lineales mediante un proceso de linealización, aunque esta práctica limita la exactitud del análisis. La linealización se ajusta solo hasta cierto umbral de deformación, después del cual el resorte retoma su comportamiento no lineal [9], [13].

1.7.2 Elementos de amortiguamiento

En sistemas prácticos, la energía se convierte gradualmente en calor o sonido, lo que conlleva una reducción de energía y, por ende, una disminución del desplazamiento del

sistema. Este mecanismo de disipación de energía se denomina amortiguamiento. Un amortiguador no posee masa ni elasticidad propia, y la fuerza de amortiguamiento existe solo si hay una velocidad relativa entre los extremos del amortiguador. Este fenómeno puede modelarse de tres maneras, las cuales se presentan en las siguientes secciones [4], [5], [9].

1.7.3 Amortiguamiento viscoso

Cuando un sistema mecánico vibra en medio de un fluido, la resistencia que el fluido ejerce sobre el cuerpo en movimiento conduce a la disipación de energía. La cantidad de energía disipada depende de factores como el tamaño, la forma del cuerpo y la velocidad. Un ejemplo de amortiguamiento viscoso es la presencia de una película de fluido entre superficies deslizantes [4], [5], [9].

El amortiguamiento viscoso es el tipo más común, y la mayoría de los análisis de vibraciones se realizan considerando este tipo de amortiguamiento o despreciando completamente el amortiguamiento.

1.7.4 Amortiguamiento de Coulomb

La fuerza de amortiguamiento permanece constante y se opone al desplazamiento del cuerpo vibratorio. Este tipo de amortiguamiento resulta de la fricción entre superficies que están secas o no tienen suficiente lubricación. Es un tipo de amortiguamiento más complejo y no suele presentarse en máquinas diseñadas para tener movimiento de piezas [9].

1.7.5 Amortiguamiento histerético

Los materiales, al deformarse, absorben o disipan energía debido a la fricción entre los planos internos que se deslizan conforme se generan las deformaciones. Este tipo de amortiguamiento es menos estudiado debido a su complejidad. Aunque los materiales experimentan pérdida o absorción de energía, suele ser un efecto despreciable en el análisis de vibraciones [9].

1.7.6 Constante de amortiguamiento viscoso

La constante de amortiguamiento viscoso representa el término que describe la disipación de la energía de un sistema sometido a vibración. Para determinar la constante de amortiguamiento viscoso en un sistema vibratorio, es necesario expresar la fuerza de amortiguamiento como el producto de la constante de amortiguamiento por la velocidad relativa entre el cuerpo y el fluido amortiguador. Es importante resaltar que determinar la fuerza de amortiguamiento generada por el fluido es la parte más compleja, ya que requiere conocer las propiedades del fluido y la geometría del cuerpo sometido a la vibración [9].

1.7.7 Relación de amortiguamiento

La relación de amortiguamiento se define como el cociente entre la constante de amortiguamiento del sistema y la constante de amortiguamiento crítico, la cual es el valor que toma el amortiguamiento cuando los radicales de las raíces de la ecuación característica de la ecuación de movimiento se vuelven cero [9]. Para un caso de vibración libre amortiguada, la ecuación se expresa de la siguiente manera:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (19)$$

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (20)$$

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (21)$$

$$c_c = 2\sqrt{km} \quad (22)$$

$$\zeta = c/c_c \quad (23)$$

Donde:

- s_n : Raíces de la ecuación característica
- m : Masa del elemento mecánico

- c : Constante de amortiguamiento
- c_c : Constante de amortiguamiento crítico
- k : Constante de resorte
- ζ : Relación de amortiguamiento

1.7.8 Frecuencia natural amortiguada

Cuando un cuerpo vibra bajo el efecto del amortiguamiento, su frecuencia natural se ve afectada de manera proporcional al efecto del amortiguamiento. Esta se conoce como frecuencia natural amortiguada y depende de la relación de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema. Se utiliza para analizar la respuesta del sistema en el tiempo [9].

2. Estado del arte

El diseño de agitadores ha sido ampliamente investigado tanto en ingeniería mecánica como en ingeniería química, combinando principios de ambas disciplinas y considerando diversos fenómenos físicos.

La tesis de grado titulada "Diseño y Cálculo de un Agitador de Fluidos" examina el proceso estándar de diseño de agitadores, considerando múltiples variables que pueden influir en su desempeño. Este trabajo resume los tipos de agitadores y los estilos de impulsores, así como sus aplicaciones, y presenta el proceso completo de diseño. Un aspecto destacado es el análisis de la estructura que debe soportar la máquina [6]. A pesar de su alcance, el trabajo aborda de manera limitada el tema de vibraciones mecánicas en el diseño de agitadores. Aunque se incluye un análisis numérico de la velocidad crítica, este enfoque podría enriquecerse al profundizar en los fundamentos teóricos sobre el efecto de las vibraciones en el desempeño de los agitadores.

En el trabajo titulado "Estudio del Efecto del Fluido sobre las Frecuencias Naturales y Modos de Vibración de un Agitador 4PBT45 mediante Simulación Numérica" se investigan los fenómenos de vibraciones en un agitador desde una perspectiva de mecánica de fluidos. A diferencia del estudio previamente mencionado, este análisis se centra en las vibraciones con mayor detalle. Los resultados plantean que las frecuencias naturales varían respecto a la velocidad de rotación debido al efecto giroscópico y el amortiguamiento, variando su magnitud en función del sentido de giro de la vibración [19].

El estudio también concluye que las características del fluido en el cual el agitador se sumerge, junto con los patrones de vibración, son factores responsables de la variación de las frecuencias naturales en diversos niveles. Estas propiedades influyen en la transferencia

de masa, mientras que los modos de vibración afectan la disminución de las frecuencias mediante la interacción entre las superficies del agitador y el fluido. Este análisis detallado proporciona una base sólida para entender la dinámica de vibración en agitadores y para el desarrollo de ecuaciones de diseño paramétrico que optimicen el proceso de diseño en condiciones de trabajo específicas.

Es esencial destacar que, además de analizar los efectos de la mecánica de fluidos en el diseño de agitadores, también resulta fundamental considerar los aspectos relacionados con los sólidos. Aunque los trabajos previamente mencionados se han centrado principalmente en el análisis del eje desde la perspectiva de las ecuaciones de diseño, es igualmente importante examinar las fuerzas que impactan en los componentes.

El artículo "*Mixer Mechanical Design-Fluid Forces*" formula expresiones matemáticas para obtener la fuerza hidráulica que actúa sobre el impulsor en función de números adimensionales y algunos parámetros de funcionamiento [20]. Esta fuerza generalmente se obtiene a través de métodos experimentales y varía significativamente según el tipo de fluido de trabajo. El modelo contribuye a este trabajo al permitir obtener la fuerza hidráulica sobre un impulsor sin recurrir a métodos experimentales, manteniendo así un enfoque analítico en la parametrización.

En este contexto, es crucial subrayar la importancia de considerar el efecto de fatiga en el agitador, especialmente dado que las cargas en un fluido son variables por naturaleza. Un estudio relacionado con este aspecto se presenta en el artículo titulado "*Fatigue Evaluation of Agitator Paddle Shafts*," el cual se enfoca en un análisis de fatiga centrado en el eje e impulsor, en este caso de paletas [21]. Este estudio de fatiga no solo proporciona una perspectiva práctica, sino que también permite una estimación aproximada de la vida útil de un impulsor sometido a cargas variables. Además, establece una sólida base de datos empíricos que puede utilizarse para evaluar si un diseño particular contribuye a mejorar las condiciones de fatiga. Este enfoque refuerza aún más la comprensión integral de los agitadores y aporta de manera significativa a la seguridad y eficiencia de su diseño y

operación. Estos datos empíricos son esenciales para desarrollar ecuaciones de diseño paramétrico que tengan en cuenta la fatiga de los elementos.

El estudio titulado "*Numerical Study on Mixing Performance of Agitator in Drilling Mud Handling System Using Eulerian and Lagrangian Approaches*" se destaca por su enfoque en la optimización de sistemas de agitación en la manipulación de fluidos. En este estudio se realizan simulaciones numéricas de agitadores mecánicos para evaluar su desempeño en la mezcla de lodos de perforación, utilizando las ecuaciones que rigen los fluidos desde dos enfoques distintos: el Lagrangiano y el Euleriano, comúnmente conocidos como CFD (Dinámica de Fluidos Computacional) [22]. Lo notable de este estudio es su capacidad para abordar las ecuaciones diferenciales que gobiernan los fluidos según cada enfoque, proporcionando una sólida base teórica. Además, no se limita a la formulación teórica, sino que también ofrece resultados concretos de su análisis numérico. Estos resultados son relevantes para comprender las velocidades promedio en los fluidos de trabajo, particularmente bajo condiciones de viscosidad de referencia. En resumen, este estudio contribuye significativamente al avance del conocimiento en la optimización de sistemas de agitación en la manipulación de fluidos, un campo crucial para la ingeniería química en el que se busca mejorar la eficiencia y el rendimiento en condiciones específicas de trabajo.

No obstante, los procesos de agitación son un tema comúnmente abordado en ingeniería química, abarcando los procesos de selección de potencia, tamaño del tanque, tiempo del proceso y demás. En el trabajo denominado "Determinación de Modelos para Evaluar el Consumo de Potencia en Tanques Agitados para Soluciones Pseudoplásticas" se formularon dos modelos matemáticos basados en procesos estadísticos, para obtener la potencia de un proceso de agitación radial en función de los números adimensionales de Reynolds y Froude, en sustancias pseudoplásticas, con un margen de error bajo [23]. Este tipo de modelos permite la implementación de metodologías analíticas, impulsando el desuso de las curvas de número de potencia y reduciendo la experimentación requerida para determinar la potencia de un agitador, además de aportar al marco teórico de diseños para agitadores de fluidos no newtonianos.

Además de los aspectos mencionados anteriormente, es crucial considerar el panorama completo en lo que respecta a los agitadores dentro del contexto que abarca este trabajo. Esto implica comprender el principio básico de funcionamiento e identificar a los líderes en términos de distribución y diseño de agitadores.

El mercado de agitadores no está dominado por un país en particular; más bien, existen importantes referentes en diferentes partes del mundo. Uno de los principales es el grupo alemán EKATO, que ha estado influyendo en el mercado de agitadores desde 1979, especialmente en el campo de la desulfuración de gases de combustión. Lo que distingue a EKATO es su enfoque en tecnologías de agitación que difieren de las convencionales. Mientras que, generalmente, se utilizan agitadores verticales que se sumergen en el fluido de trabajo, EKATO emplea agitadores inclinados y diversas disposiciones que modifican el patrón de flujo. Además, afirman contar con diseños que garantizan una vida útil basada en ciclos infinitos con cargas dinámicas [24].

Otro referente en el campo de los agitadores es la empresa estadounidense SPX Flow. Esta compañía se dedica a abordar los desafíos técnicos que enfrentan sus clientes y opera en más de 25 países. Además de su destacada presencia en investigación y desarrollo, SPX Flow se extiende a diversas áreas, incluyendo la industrial, la de salud y la nutrición. En cuanto a los agitadores, diseñan reactores de agitación, impulsores y otros dispositivos industriales. Lo que distingue a esta empresa es su amplia variedad de tipos de impulsores, lo que los convierte en líderes destacados en el mercado [25].

Dentro del ámbito nacional, una empresa relevante en el campo de los agitadores es Inoxpa, con sede en Bogotá. Esta empresa se especializa en la fabricación y venta de agitadores de uso sanitario, dirigidos a las industrias alimentaria, química y farmacéutica. Lo más llamativo de Inoxpa es su empleo de agitadores magnéticos, una variante poco común en comparación con el enfoque de este trabajo. Sin embargo, esta elección los convierte en una alternativa interesante a considerar para la industria [26].

3. Planteamiento del problema

Los agitadores se utilizan en diversas industrias, tales como la química, alimentaria, de pinturas, de recubrimientos y metalúrgica. Su aplicación es común en procesos industriales; donde el diseño, la fabricación y el uso se deben basar en principios físicos y matemáticos para mejorar la eficiencia de los procesos y asegurar un funcionamiento seguro.

Existen diversas variantes de agitadores que realizan funciones como mezcla, homogeneización, dispersión y emulsión [3]. Estas acciones se aplican generalmente en un volumen de control con un fluido de trabajo definido dentro de un proceso uniforme [27]. Sin embargo, debido a la singularidad de cada tarea, los agitadores deben ajustarse con características específicas, como la geometría de sus componentes y su disposición, lo que influye en el comportamiento del fluido de trabajo [1], [2].

El diseño de agitadores enfrenta un desafío significativo debido al fenómeno de resonancia, que puede causar problemas graves, como se observó en el colapso del puente de Tacoma Narrows, un evento bastante conocido en ingeniería. Este caso destaca la necesidad de realizar un análisis detallado de las vibraciones durante el proceso de diseño [28], con el objetivo de mantener la frecuencia de trabajo del elemento mecánico alejada de su frecuencia natural y así mitigar posibles riesgos.

Operar agitadores cerca de su frecuencia natural representa un desafío complejo. Este se enfrenta ajustando su frecuencia de trabajo, ya sea superando rápidamente su velocidad crítica o manteniéndola por debajo de la misma. Sin embargo, esta medida no es eficaz, ya que desviarse de la frecuencia ideal de trabajo reduce la eficiencia del proceso [1], [29]. Este problema se origina en el enfoque empírico utilizado en el desarrollo de los agitadores, limitándolos a operar dentro de un rango para el cual no fueron diseñados originalmente.

Este contexto destaca la necesidad de desarrollar modelos teóricos que simplifiquen el análisis y diseño de agitadores, especialmente en empresas como Grupo Lassen, donde se enfrentan problemas de resonancia en agitadores. Estos modelos matemáticos permitirán establecer especificaciones de diseño que satisfagan los requisitos del cliente y eviten que la frecuencia natural del agitador coincida con sus rangos de operación. Así, se beneficiará el proceso de fabricación de estos equipos, que es el ámbito de competencia de la empresa.

En consecuencia, surge la pregunta de investigación: ¿Cómo modelar analíticamente agitadores para garantizar el cumplimiento de restricciones de diseño específicas para cada proceso de producción, asegurando un rendimiento seguro? Este enfoque en modelos analíticos permitirá optimizar el desarrollo y fabricación de agitadores, asegurando su eficacia en contextos industriales.

4. Justificación

La expansión de la industria moderna presenta desafíos cada vez más complejos en el diseño y funcionamiento de equipos industriales. En este contexto, los agitadores desempeñan un papel esencial en diversas áreas. Sin embargo, a pesar de su amplio uso, persisten problemas en su diseño y operación que afectan su rendimiento, eficiencia y seguridad [1], [2]. La falta de atención a los principios teóricos del diseño ha promovido una mentalidad orientada hacia la improvisación y adaptación rápida, en lugar de la innovación y eficiencia a largo plazo. Esta situación ha impactado negativamente la calidad y seguridad de los procesos industriales y ha debilitado la posición competitiva de las empresas en el mercado global [30].

Cada agitador se diseña para operar bajo condiciones específicas, lo que dificulta la implementación de modelos matemáticos en las decisiones de diseño. Esto ha llevado a la adopción de enfoques empíricos que frecuentemente resultan en ineficiencias y fallas prematuras. Por lo tanto, contar con fundamentos teóricos sólidos y modelos que faciliten el análisis de agitadores es esencial para su desarrollo y manufactura, siendo esta el área de competencia en la que destaca Grupo Lassen.

Existe una oportunidad en la formulación de diseños basados en la ciencia, lo que contribuirá al progreso industrial y a la consolidación de la ingeniería mecánica. El avance teórico en estudios sobre velocidad crítica, vibraciones, diseño mecánico y materiales facilita la justificación teórica y asegura un funcionamiento seguro y eficiente [9], [10], [11], [31].

Al considerar el problema de diseño y rendimiento de los agitadores, es importante analizar su impacto en el desarrollo industrial del país. A medida que las industrias evolucionan y

buscan mantener su competitividad en el mercado global, resulta esencial abordar las deficiencias en el diseño y operación de equipos clave como los agitadores. Esto afecta directamente la eficiencia y calidad de los procesos industriales y desempeña un papel importante en el progreso económico y tecnológico del país [31]. Además, se abre la oportunidad de exportación de equipos optimizados y de alta calidad.

Este estudio no solo busca resolver los problemas de vibración y diseño de agitadores en Grupo Lassen, sino también contribuir al desarrollo de un marco de conocimiento teórico aplicable en toda la industria. Al establecer modelos matemáticos y fundamentos científicos que expliquen los fenómenos físicos involucrados en la operación de agitadores, se proporciona una base sólida para futuros diseñadores e ingenieros.

5. Objetivos

5.1 Objetivo general

Parametrizar el diseño de agitadores con impulsor(es) *cowles* en función de sus condiciones de trabajo de forma que permita su operación segura al evitar la resonancia.

5.2 Objetivos específicos

1. Definir las especificaciones técnicas que debe cumplir un agitador en función del fluido de trabajo y cantidad de impulsores para que el diseño paramétrico se adapte a dichas especificaciones.
2. Analizar las fuerzas que actúan en un fluido en movimiento de acuerdo a las especificaciones de trabajo para determinar los esfuerzos presentes en el agitador.
3. Determinar las frecuencias naturales del agitador al realizar el modelo de vibración en función de sus parámetros de trabajo y las fuerzas involucradas.
4. Verificar los resultados del diseño paramétrico a partir de un conjunto de datos reales de un agitador con impulsor(es) *cowles* durante funcionamiento.

6. Metodología

6.1 Restricciones

Las restricciones de diseño consideradas son las siguientes:

- Geometría del tanque: La parametrización y las expresiones de las cantidades adimensionales deben basarse en las relaciones geométricas estándar de tanques para agitación, mencionadas en el marco teórico.
- Patrón de flujo: El diseño paramétrico debe ser válido para agitadores de flujo radial en cualquier régimen de Reynolds.
- Clasificación del fluido de trabajo: La parametrización debe considerar las clasificaciones de fluidos pseudoplásticos y newtonianos.
- Material: El material utilizado en la construcción del agitador debe ser acero inoxidable, especialidad de Grupo Lassen, garantizando una vida útil prolongada y un funcionamiento seguro en entornos agresivos.
- Rendimiento mecánico: Los agitadores deben diseñarse para proporcionar un rendimiento mecánico adecuado para las aplicaciones específicas. Esto implica generar la fuerza y el rango de movimiento necesarios para asegurar una mezcla eficaz y uniforme en el proceso industrial, respetando las limitaciones de los materiales y componentes empleados en su construcción.

6.2 Definición de especificaciones técnicas

Para definir las especificaciones técnicas de un agitador, se investigaron los parámetros determinantes para el funcionamiento de un sistema de agitación. Se consultaron bases de datos académicas, catálogos y revistas especializadas. Esta investigación permitió identificar los parámetros clave que afectan el diseño del agitador, los cuales se detallan a continuación.

6.2.1 Velocidad angular

Determinar la velocidad angular de un agitador implica definir la operación unitaria a realizar. Esto requiere establecer una velocidad en función del tiempo del proceso y seleccionar el tipo de impulsor, las propiedades del fluido y la geometría del tanque. La investigación en libros, catálogos y revistas permitió identificar la metodología para establecer la velocidad de rotación para una operación unitaria específica, con un agitador, tanque y fluidos definidos, basada en montajes experimentales.

Por lo tanto, se optó por tomar la velocidad angular como un parámetro definido externamente a la parametrización. La literatura revisada reporta límites de velocidad para diferentes tipos de impulsores. Al delegar este parámetro al futuro diseñador, se permite que la parametrización funcione independientemente del tipo de impulsor utilizado. Dado que la parametrización no debe definir la velocidad, se puede generalizar la geometría del impulsor y extender así el alcance de la parametrización a cualquier tipo de agitador radial, con mínimas pérdidas de exactitud [32], [33].

6.2.2 Determinación de la potencia de agitación

La determinación de la potencia de agitación implica definir la curva característica del agitador en el proceso y el número de potencia correspondiente, que, como se mencionó en el marco teórico, es una función del número de Reynolds y del número de Froude. Para definir estas cantidades adimensionales, se realizó una investigación en libros, artículos, catálogos y conferencias sobre la metodología para construir las curvas del número de potencia.

Esta investigación reveló que la definición de las curvas características generalmente requiere montajes experimentales. Por lo tanto, se decidió utilizar métodos alternativos que no dependan de estos montajes, recurriendo a los modelos matemáticos presentados en "Determinación de Modelos para Evaluar el Consumo de Potencia en Tanques Agitadores para Soluciones Pseudoplásticas", explorado en el estado del arte. Esto permite que la parametrización amplíe su alcance a un grupo de fluidos pseudoplásticos para agitadores radiales, con pérdidas de exactitud despreciables [23], [34], [35], [36].

Asimismo, se consideró la posibilidad de definir manualmente el número de potencia del sistema de agitación, dejando esta opción disponible en el formato de parametrización. Esto permite que la parametrización funcione para cualquier grupo de fluidos, siempre que se defina externamente el número de potencia [37].

6.2.3 Propiedades del fluido de trabajo

Para determinar los números adimensionales, es necesario conocer las propiedades del fluido de trabajo. En los procesos de agitación se suelen utilizar sustancias heterogéneas con densidades y viscosidades variables, lo que impide tratar el fluido como una sustancia pura. Por consiguiente, se llevó a cabo una revisión de artículos y tesis para entender cómo se consideran las propiedades de los fluidos en el diseño de agitadores.

6.3 Análisis de fuerzas y esfuerzos en el eje

Las fuerzas que actúan en un agitador han sido ampliamente estudiadas en la literatura especializada en diseño de agitadores. El esquema general presente en diversos manuales de diseño se detalla en la **Figura 12**:

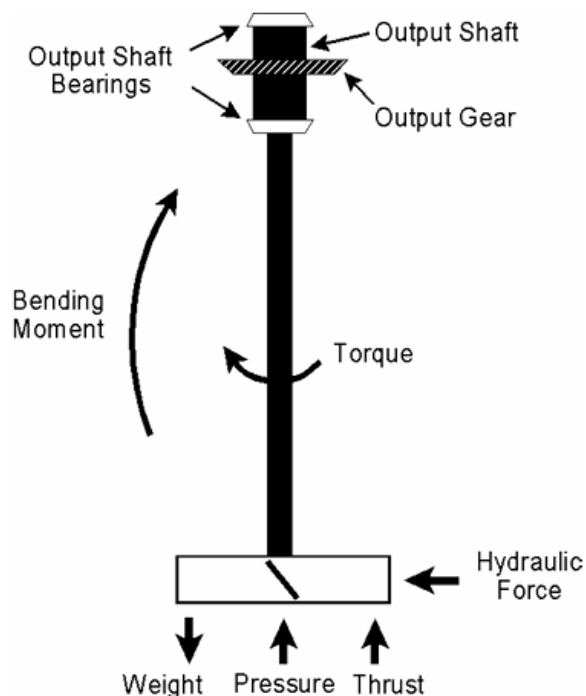


Figura 12. Esquema de cargas presentes en un agitador [2].

Sin embargo, este enfoque no es tan riguroso, ya que no considera las fuerzas distribuidas generadas por la presión en las diferentes componentes del agitador, como la presión radial sobre el eje e impulsor.

Para la parametrización, se tomaron en cuenta todas las fuerzas significativas que actúan sobre el agitador, con el fin de asegurar un enfoque conservador y suficientemente riguroso. El diagrama de cuerpo libre resultante se ilustra en la **Figura 13**.

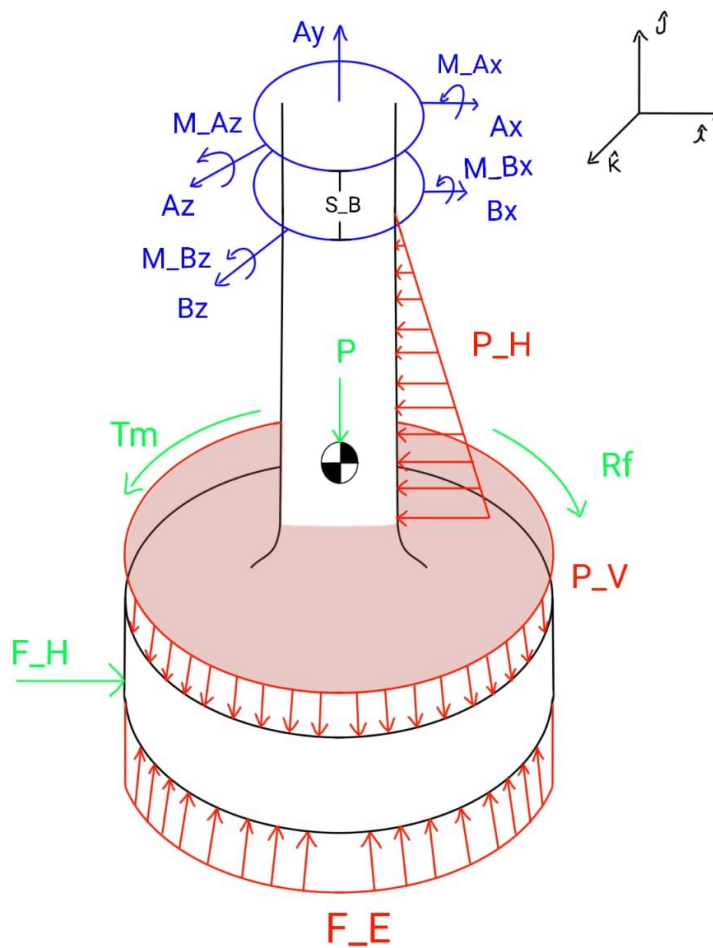


Figura 13. Diagrama de cuerpo libre incluyendo las cargas significativas

En este diagrama se identifican las fuerzas y presiones que actúan sobre el agitador, así como las reacciones en los rodamientos de soporte. Las fuerzas y presiones son las siguientes:

- F_E : Fuerza de empuje del fluido contra el impulsor

- P_V : Presión sobre la cara superior del impulsor
- P_H : Presión sobre la cara cilíndrica del eje
- P : Peso del agitador (impulsor más eje)
- T_m : Torque del motor
- R_f : Reacción del fluido
- F_H : Fuerza hidráulica
- A_x : Reacción en dirección \hat{i} del primer soporte
- A_y : Reacción en dirección \hat{j} del primer soporte
- A_z : Reacción en dirección \hat{k} del primer soporte
- M_{Ax} : Momento de reacción en dirección \hat{i} del primer soporte
- M_{Az} : Momento de reacción en dirección \hat{k} del primer soporte
- B_x : Reacción en dirección \hat{i} del segundo soporte
- B_z : Reacción en dirección \hat{k} del segundo soporte
- M_{Bx} : Momento de reacción en dirección \hat{i} del segundo soporte
- M_{Bz} : Momento de reacción en dirección \hat{k} del segundo soporte
- S_B : Distancia entre rodamientos

6.3.1 Expresiones para las fuerzas presentes

Para obtener las expresiones algebraicas de las fuerzas, se utilizaron las ecuaciones de movimiento bajo los criterios de equilibrio traslacional y rotacional [13]. Cabe resaltar que realizar un análisis dinámico no resulta necesario, ya que se asume que el agitador está operando a una velocidad constante, habiendo superado el instante de arranque, por lo que no se consideran aceleraciones angulares ni lineales en ninguna dirección [12], [20], [38].

6.3.2 Fuerza hidráulica

El método descrito anteriormente permite expresar las fuerzas en función de otras conocidas. Sin embargo, una fuerza no se puede determinar mediante este método: la fuerza hidráulica que ejerce el fluido contra el impulsor en forma horizontal. Muchos manuales de diseño expresan esta fuerza como un producto de varias constantes

geométricas, aunque esta no es la metodología más precisa, dado que no considera las propiedades del fluido.

Como se mencionó en el estado del arte, diversos autores han propuesto expresiones matemáticas para determinar la fuerza hidráulica sobre un impulsor, teniendo en cuenta las propiedades del fluido de trabajo. Por lo tanto, se adoptó el modelo presentado en "*Mixer Mechanical Design-Fluid Forces*", el cual permite obtener un sistema de fuerzas completamente determinado de manera analítica, para calcular los esfuerzos presentes en el agitador [20].

6.3.3 Análisis de esfuerzos

Una vez definidas las cargas que actúan sobre el agitador, se empleó la teoría de mecánica de materiales para obtener las cargas internas en el eje del agitador. Mediante este método, se obtienen las expresiones para el esfuerzo normal, cortante, flector y torsor [39].

Para determinar el efecto de la presión sobre el eje, se utilizaron las ecuaciones de "*Advanced Strength and Applied Stress Analysis*" para cilindros de pared gruesa sometidos a presión, obteniendo una expresión para el esfuerzo tangencial sobre el eje [40].

Una vez obtenidas las funciones que describen las cargas internas a lo largo del eje, se determinó el punto donde los esfuerzos son máximos. En este punto, se calcularon las ecuaciones que describen los esfuerzos normal, cortante, flector, torsor y tangencial.

Posteriormente, se analizó un elemento diferencial de volumen ubicado en el punto crítico para comprobar si algún esfuerzo tiene efecto significativo sobre el eje [11], [39].

6.3.4 Análisis de fatiga

Una vez determinadas las expresiones para los esfuerzos nominales en el punto crítico, se analizó la periodicidad de los esfuerzos para establecer la relación esfuerzo-tiempo [10]. Esta relación permitió identificar los componentes del esfuerzo que corresponden al esfuerzo medio y al esfuerzo alternante nominales.

Con los esfuerzos identificados, se analizaron los efectos de los concentradores de esfuerzo estáticos y de fatiga, asumiendo que el concentrador de esfuerzo corresponde a un cuñero fresado y que la sensibilidad de la muesca es igual a uno, para mantener un enfoque de diseño conservador [10].

Con los factores de concentración de esfuerzo establecidos, se recalcularon los esfuerzos normal, flector y torsor reales. Posteriormente, se utilizó la teoría del esfuerzo efectivo de Von Mises (máxima energía de distorsión) para esfuerzo tridimensional, obteniéndose las expresiones equivalentes del esfuerzo alternante y medio de Von Mises [10].

A continuación, se empleó el criterio de falla de la recta de Soderberg por energía de distorsión, ya que esta teoría permite obviar el análisis de fluencia [10]. Definido el criterio de falla, se sustituyeron las expresiones del esfuerzo alternante y medio de Von Mises para determinar una expresión del factor de seguridad en función del dimensionamiento del eje y las propiedades mecánicas del material.

6.3.5 Resistencia a la fatiga del elemento de máquina

Para determinar la resistencia a la fatiga, se debe definir el material con el que se pretende fabricar el eje. Dado que la especialidad del Grupo Lassen son los aceros inoxidable y es uno de los requisitos de diseño, se trabajará con este tipo de material.

En aceros, el límite de resistencia a la fatiga corresponde al 50% del esfuerzo último (hasta un límite de 1400 MPa) [10], [11]. Con el límite de resistencia a la fatiga obtenido, se aplicaron los factores que modifican este límite según la ecuación de Marin [10]. Como algunos de los factores dependen de las características geométricas del eje, se definió arbitrariamente un diámetro inicial para realizar los cálculos de estos factores. A partir de esto, se calcularon los factores de modificación por condición superficial, tamaño, carga, temperatura y confiabilidad.

Con todos los factores calculados, se obtiene la resistencia a la fatiga del elemento de máquina, y se sustituye en la ecuación que determina el factor de seguridad según el

criterio de falla de Soderberg, para completar la expresión. Posteriormente, se itera hasta obtener un diámetro de eje que cumpla con el factor de seguridad que el diseñador establece.

6.4 Análisis de vibraciones

Para determinar las frecuencias naturales del sistema de agitación es necesario definir los grados de libertad, los modos de vibración y las cargas que generarán las excitaciones del sistema. Con el fin de obtener una aproximación realista de la respuesta vibratoria del sistema, se consideraron tres modos de vibración: axial, transversal y circunferencial [9].

6.4.1 Vibración axial

En el modo de vibración axial, se considera que la fuerza resultante vertical sobre el eje tiene una periodicidad sinusoidal. A partir de esta premisa, se determina la constante de resorte del grado de libertad. No se considera ningún tipo de amortiguamiento para este modo de vibración, dado que el movimiento relativo en dirección axial entre el eje y el fondo del agitador en la dirección del grado de libertad es despreciable. Una vez definidos los elementos del análisis de vibración, se plantea la ecuación de movimiento correspondiente al modo de vibración y se resuelve para obtener la frecuencia natural del sistema [9], [12].

6.4.2 Vibración circunferencial

Se considera el torque del motor como una función armónica que excita continuamente el sistema. A partir de esto, se determina la constante de resorte torsional. Seguidamente, se calcula la constante de amortiguamiento viscoso entre la superficie del eje y el fluido de trabajo. Finalmente, se compone la ecuación de movimiento con las constantes halladas y se resuelve para obtener la frecuencia natural, además de calcular la relación de amortiguamiento y la frecuencia natural amortiguada [9], [12].

6.4.3 Vibración transversal

Para el modo de vibración transversal, se modela la fuerza hidráulica como una función armónica, similar a los modos de vibración anteriores. Posteriormente, se calculan las constantes de amortiguamiento y rigidez. Con estos valores, se plantea la ecuación de movimiento correspondiente y se resuelve para obtener la frecuencia natural, relación de amortiguamiento y frecuencia natural amortiguada [9], [12].

6.5 Validez de la parametrización

Para verificar los resultados del diseño paramétrico, se realizó una investigación en bases de datos académicas, revisando artículos y trabajos de grado relacionados con el diseño de agitadores, así como en catálogos y diseños proporcionados por Grupo Lassen para agitadores radiales para sustancias pseudoplásticas y Newtonianas. Los diseños encontrados se compararon con los resultados obtenidos mediante la parametrización realizada, utilizando las condiciones más similares posibles acorde a la información recopilada [41], [42], [43].

7. Resultados

A continuación, se presentan los resultados de la metodología aplicada.

7.1 Definición de especificaciones técnicas

La investigación sobre los parámetros de funcionamiento de un agitador resultó en la identificación de las especificaciones que parametrizan el proceso de agitación, como la velocidad angular, la potencia de agitación, el tamaño del tanque y las propiedades del fluido de trabajo.

Como se mencionó en la metodología, la determinación de la velocidad angular queda a cargo del diseñador, ya que este parámetro influye en muchos aspectos del proceso de agitación y no puede ser definido mediante un modelo matemático simple y general. Sin embargo, se identificaron rangos de velocidad para agitadores radiales entre 100 y 1500 rpm, valores que están reportados en el libro "Operaciones unitarias en ingeniería Química" [3].

En cuanto a la potencia de agitación, se encontró un modelo matemático que permite determinarla sin necesidad de realizar montajes experimentales, solo usando cantidades adimensionales (Reynolds y Froude). Esto amplía la parametrización a un grupo de fluidos pseudoplásticos para agitadores radiales, sin requerir experimentos adicionales [23].

$$N_p = \begin{cases} 9.25 N_{Re}^{-0.203} N_{Fr}^{-0.434}, & 1.67 > N > 8.33 \text{ Hz} \\ 9.45 N_{Re}^{-0.193} N_{Fr}^{-0.415}, & N \geq 8.33 \text{ Hz} \end{cases} \quad (24)$$

Se consideró también la opción de definir manualmente el número de potencia del sistema de agitación, manteniendo esta posibilidad en el formato de parametrización. Esto garantiza

que la parametrización sea aplicable a cualquier grupo de fluidos, siempre que se defina externamente el número de potencia.

Respecto al tamaño del tanque, la parametrización asegura que se cumplan las relaciones geométricas más eficientes para los procesos de agitación, exploradas en el marco teórico [30], [36].

La investigación sobre las propiedades del fluido de trabajo reveló que la metodología predominante asume que la sustancia es homogénea y utiliza las propiedades del componente con mayor viscosidad y densidad, proporcionando así un enfoque de diseño más conservador [29], [33], [43].

7.2 Fuerzas y esfuerzos en el eje

Del diagrama de cuerpo libre mostrado en la metodología (**Figura 13**), las expresiones para las fuerzas se derivan bajo la metodología descrita son:

$$A_x = \frac{-F_H \left(L - \frac{W}{2} - S_B \right)}{S_B} \quad (25) \quad M_{Az} = 0 \quad (31)$$

$$A_y = P + P_V - F_E \quad (26) \quad M_{Bx} = 0 \quad (32)$$

$$A_z = 0 \quad (27) \quad M_{Bz} = 0 \quad (33)$$

$$B_x = F_H - A_x \quad (28) \quad h = H - E - W \quad (34)$$

$$B_z = 0 \quad (29) \quad P_V = \rho g h A_{TI} \quad (35)$$

$$M_{Ax} = 0 \quad (30) \quad F_E = \rho g (h + W) A_{TI} \quad (36)$$

Donde:

- h : Distancia entre altura del fluido e impulsor
- g : Constante de gravedad $(9.81 \frac{m}{s^2})$
- H : Altura del fluido en el tanque
- E : Distancia entre impulsor y fondo del tanque
- W : Espesor del impulsor
- ρ : Densidad del fluido de trabajo
- A_{TI} : Área transversal impulsor

Las ecuaciones de los centros de presión y centroides son las siguientes:

$$l = L - h \quad (37)$$

$$\bar{y}_{sumergido} = l/2 \quad (38)$$

$$\bar{y}_I = L - \frac{W}{2} \quad (39)$$

$$\bar{y}_E = \frac{L}{2} \quad (40)$$

$$y_{PE} = \frac{2}{3} \bar{y}_{sumergido} \quad (41)$$

$$y_{PI} = \frac{2}{3} \bar{y}_I \quad (42)$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_E V_E + \bar{y}_I V_I}{V_I + V_E} \quad (43)$$

$$y_P = L - l + y_{PE} \quad (44)$$

Los resultados de las cargas internas a lo largo del eje se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 1. Funciones de cargas internas en términos de la posición y cargas externas.

Sección	Cortante	Flector	Axial	Torsor
$0 < y \leq S_B$	A_x	Vy	A_y	T_m
$0 < y \leq \bar{y}$	$A_x + B_x$	$Vy - B_x S_B$	A_y	T_m
$0 < y \leq L - W$	$A_x + B_x$	$Vy - B_x S_B$	$A_y - P$	T_m
$0 < y \leq L - \frac{W}{2}$	$A_x + B_x$	$Vy - B_x S_B$	$A_y - P - P_V$	T_m
$0 < y \leq L$	$A_x + B_x - F_H$	$Vy + F_H \left(L - \frac{W}{2} \right) - B_x S_B$	$A_y - P - P_V$	T_m

Con los resultados de las cargas internas se identificó que el punto crítico corresponde a la posición $y = L - \frac{W}{2}$, siendo la mitad del impulsor. Adicionalmente, en ese punto se considera un concentrador de esfuerzo dado que ahí se acopla el eje con el impulsor.

La representación de un volumen diferencial de esfuerzos se muestra en la **Figura 14**:

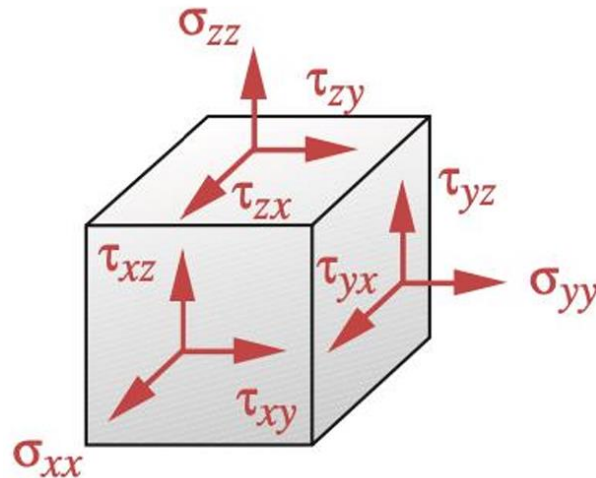


Figura 14. Volumen diferencial de esfuerzos [11].

En este punto crítico, el principio de superposición se aplica a las cargas internas obtenidas, combinando los efectos del esfuerzo flector y axial, así como los efectos del esfuerzo tangencial y torsor.

El esfuerzo tangencial se refiere a la presión del fluido contra el eje, modelada como un cilindro a presión de pared gruesa, ilustrado en la **Figura 15**. Los esfuerzos tangenciales comúnmente se consideran como torsor y cortante; sin embargo, el esfuerzo tangencial también se clasifica dentro de esta categoría.

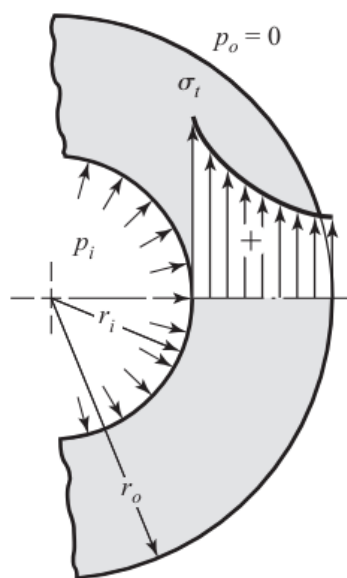


Figura 15. Diagrama de esfuerzo tangencial en cilindros de pared gruesa [10].

En el análisis del volumen diferencial de esfuerzos, se observa que el valor del esfuerzo cortante tiende a cero debido a su distribución, mientras que los esfuerzos torsor, axial, flector y tangencial alcanzan valores máximos.

Del análisis de esfuerzos se determinó que los esfuerzos variables corresponden al esfuerzo flector, mientras que los esfuerzos torsor, axial y tangencial son constantes en cada ciclo de movimiento del agitador.

Dado que el movimiento del agitador es rotacional respecto a un eje fijo, se considera que las fuerzas generadas producen esfuerzos repetidos debido a la trayectoria circular (**Figura 16**).

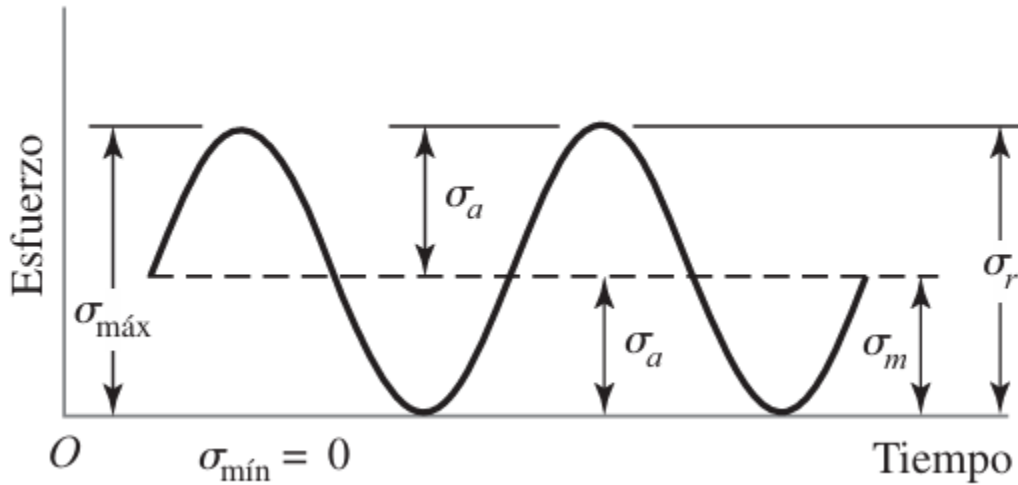


Figura 16. Relación esfuerzo-tiempo [10].

Conociendo el punto crítico, se asume un concentrador de esfuerzo de un cuñero fresado. Los factores de incremento de los esfuerzos estáticos corresponden a [10]:

$$K_t = 2.14 \quad (45)$$

$$K_{ts} = 3.0 \quad (46)$$

Asumiendo una sensibilidad total a la muesca, los factores de incremento de esfuerzos a fatiga son iguales a los estáticos, es decir:

$$K_f = K_t \quad (47)$$

$$K_{fs} = K_{ts} \quad (48)$$

Las expresiones correspondientes a los esfuerzos alternante y medio de Von Mises son las siguientes:

$$\sigma'_a = \left[(K_f \sigma_F)^2 \right]^{1/2} \quad (49)$$

$$\sigma'_m = \left[(K_f \sigma_A)^2 + 3 \left(K_{fs} (\tau_T + \sigma_\theta) \right)^2 \right]^{1/2} \quad (50)$$

Donde:

$$\sigma_F = \frac{32M}{\pi D^3} \quad (51)$$

$$\sigma_A = \frac{F}{A_E} \quad (52)$$

$$\tau_T = \frac{16T}{\pi D^3} \quad (53)$$

$$\sigma_\theta = P_0 \quad (54)$$

- M : Carga interna de flexión
- F : Carga interna axial
- T : Carga interna de torsión
- P_0 : Presión sobre el centro de presión del eje

La ecuación del criterio de falla de la recta de Sodderberg, para esfuerzo de Von Mises, es:

$$\frac{1}{\eta} = \frac{\sigma'_a}{S_e} + \frac{\sigma'_m}{S_{ut}} \quad (55)$$

Despejando el factor de seguridad en términos de las demás variables, se obtiene:

$$\eta = \left[\frac{32K_f M}{S_e \pi D^3} + \frac{\left(\frac{16K_f^2 F^2}{\pi^2 D^4} + \frac{3K_{fs}^2 (16T + P_0 D^3 \pi)^2}{\pi^2 D^6} \right)^{\frac{1}{2}}}{S_{ut}} \right]^{-1} \quad (56)$$

Tras aplicar la ecuación de Marin [10], se determina la resistencia a la fatiga del elemento de máquina bajo el efecto de los factores que modifican el límite de resistencia a la fatiga. Los factores son:

$$K_a = 2.7 S_{ut}^{-0.265} \quad (57)$$

$$K_b = \begin{cases} 1.24 D^{-0.107} & 2.79 \leq D < 51 \text{ mm} \\ 1.51 D^{-0.157} & 51 < D \leq 254 \text{ mm} \end{cases} \quad (58)$$

$$K_c = 1 \quad (59)$$

$$K_d = 1 \quad (60)$$

$$K_e = 0.897 \quad (61)$$

Dejando la resistencia a la fatiga del elemento de máquina como:

$$S_e = S'_e K_a K_b K_c K_d K_e \quad (62)$$

7.3 Modelos de vibraciones

Los manuales de diseño de agitadores establecen una regla para proteger el agitador contra la resonancia, asegurando que la frecuencia de trabajo esté un 20% por encima o por

debajo de la frecuencia natural. No obstante, mantener la frecuencia natural por debajo de la frecuencia de trabajo implica la presencia de ciclos de resonancia al encender el equipo. Por lo tanto, se considera que un agitador está realmente protegido contra resonancia si se cumple la siguiente inecuación [2], [19]:

$$\frac{\omega_n}{\omega} > 1.2 \quad (63)$$

Donde:

- ω_n : Frecuencia natural
- ω : Frecuencia de trabajo

Expresando la relación entre la frecuencia natural y la frecuencia de trabajo como un factor adimensional:

$$\gamma = \frac{\omega_n}{\omega} \quad (64)$$

También se considera para la frecuencia natural amortiguada (ω_d):

$$\gamma_A = \frac{\omega_d}{\omega} \quad (65)$$

Por lo tanto, la regla se expresa como:

$$\gamma \wedge \gamma_A > 1.2 \quad (66)$$

7.3.1 Vibración axial

Para el modo de vibración axial, la constante de resorte de la fuerza axial es:

$$k_1 = \frac{AY}{l} \quad (67)$$

Dado que no se considera amortiguamiento, la ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{y} + k_1y = F\cos(\omega t) \quad (68)$$

Donde:

- m : Masa total del agitador
- y : Coordenada que define la posición
- k_1 : Constante de rigidez del sistema en vibración axial

Resolviendo la ecuación diferencial de segundo orden, se determina la frecuencia natural del sistema como:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{AY}{lm}} \quad (69)$$

En este modo de vibración, el amortiguamiento se desprecia, resultando en una única frecuencia natural sin amortiguamiento.

7.3.2 Vibración circunferencial

La constante de resorte torsional es:

$$k_2 = \frac{\pi D^4 G}{32l} \quad (70)$$

El amortiguamiento se compone del contacto entre el eje y el fluido, el contacto de la circunferencia del impulsor y el fluido, y la cara inferior del impulsor y el fluido. Para el contacto de la cara circular del impulsor, la fuerza de amortiguamiento que ejerce el fluido es:

$$F_1 = \frac{\pi D_a^2 W \mu \omega}{D_t - D_a} \quad (71)$$

Y calculando el momento de esa fuerza:

$$M_1 = \frac{\pi D_a^3 W \mu \omega}{2 \cdot (D_t - D_a)} \quad (72)$$

En cuanto al contacto del eje y el fluido:

$$M_2 = \frac{\pi D^3 W \mu \omega}{2 \cdot (D_t - D_a)} \quad (73)$$

Y para la cara inferior del impulsor:

$$M_3 = \iint_{\text{Área}} dM_3 dA \quad (74)$$

Al resolver:

$$M_3 = \frac{\mu \omega \pi D_a}{64Y} \quad (75)$$

Donde:

- M_1 : Momento de la fuerza de amortiguamiento del contacto entre la cara circular del impulsor y el fluido
- M_2 : Momento de la fuerza de amortiguamiento del contacto entre el eje y el fluido
- M_3 : Momento de la fuerza de amortiguamiento del contacto entre la cara plana del impulsor y el fluido

Obteniendo el amortiguamiento total como la suma de todos los momentos:

$$M_T = \frac{\pi D_a^3 W \mu \omega}{2(D_t - D_a)} + \frac{\pi D^3 W \mu \omega}{2(D_t - D_a)} + \frac{\mu \omega \pi D_a}{64Y} \quad (76)$$

Y calculando la constante de amortiguamiento torsional:

$$c_t = \frac{\pi D_a^2 W \mu}{D_t - D_a} + \frac{\pi D^3 l \mu}{(D_t - D) D_a} + \frac{\pi \mu D_a^3}{32Y} \quad (77)$$

Con las constantes calculadas, se plantea y resuelve la ecuación de movimiento:

$$J_o \ddot{\theta} + c_t \dot{\theta} + k_{CT} \theta = M_o \cos(\omega t) \quad (78)$$

Los resultados de la frecuencia natural, la relación de amortiguamiento y la frecuencia natural amortiguada son:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{CT}}{J_o}} \quad (79)$$

$$\zeta = \frac{c_t}{2\sqrt{k_{CT} J_o}} \quad (80)$$

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n \quad (81)$$

7.3.3 Vibración transversal

La constante de resorte para este modo de vibración es:

$$k_3 = \frac{3YI_I}{\left(L - \frac{W}{2}\right)^3} \quad (82)$$

La constante de amortiguamiento viscoso en vibración transversal es:

$$c = \frac{\mu A}{E} \quad (83)$$

Considerando que la fuerza hidráulica actúa de forma sinusoidal, la ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_H \cos(\omega t) \quad (84)$$

Resultando en una frecuencia natural:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (85)$$

La relación de amortiguamiento y la frecuencia natural amortiguada son:

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (86)$$

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n \quad (87)$$

7.4 Validez de la parametrización

La comparación entre los diseños investigados y el diseño obtenido mediante la parametrización muestra similitudes en la mayoría de los casos. La principal diferencia radica en el diámetro del eje, ya que en este trabajo se consideraron más fuerzas de las

comúnmente analizadas para el diseño de ejes. Aunque esta diferencia es baja, genera una propagación, pues las frecuencias naturales también dependen del diámetro.

De los diseños recopilados de Grupo Lassen, se encontró que la mayoría de los diámetros de eje sólido sobrepasan los factores de seguridad mínimos. Sin embargo, se observó un patrón en los diseños para tanques de menor tamaño y agitadores de menor potencia: los diámetros de eje tienden a ser mucho más grandes de lo necesario. A medida que se incrementa la potencia y el tamaño del tanque, los diámetros mínimos convergen con los utilizados por Grupo Lassen, como se ilustra en la **Figura 17**. Esto sugiere una oportunidad de optimización manteniendo la seguridad operativa para ciertos modelos de agitadores.

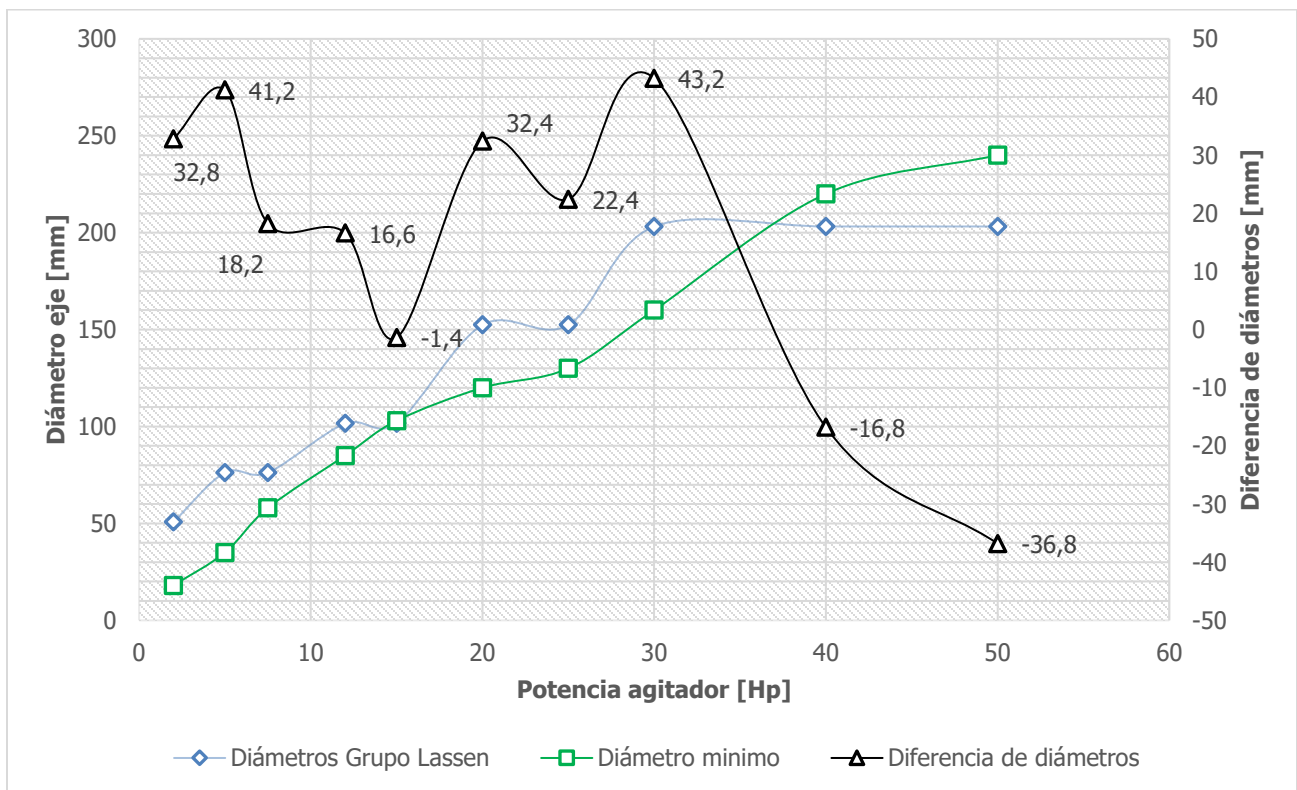


Figura 17. Comparación de diseños.

Esta comparación indica la posibilidad de optimizar los diseños de ejes en Grupo Lassen, dado que la diferencia en los diámetros refleja un potencial ahorro de material, reducción de la inercia y aumento del volumen útil del tanque. Para cualquier diámetro mínimo, se cumplen las prácticas de diseño seguro contra fatiga y resonancia. Sin embargo, para los agitadores de Grupo Lassen de más de 30 caballos de fuerza, la frecuencia de trabajo

supera la frecuencia natural del eje, implicando resonancia durante el arranque del agitador. Este comportamiento se deduce ya que el diámetro mínimo para proteger contra resonancia y fatiga está por encima del diámetro utilizado por Grupo Lassen a partir de los 30 caballos de fuerza.

Adicionalmente se comparó el modelo paramétrico para ejes de agitadores con otros tipos de flujo e impulsor, obteniendo resultados muy prometedores y altamente similares para agitadores axiales. Sin embargo, se recomienda revisar la sección de trabajo futuro.

Se considera que la parametrización es precisa, y la diferencia se encuentra fundamentada en el rigor teórico o los patrones de diseño de la industria. Esto permite entregar resultados más cercanos a la realidad que los diseños hallados en la literatura [6], [8], [18], [32], [33], [35], [38], [41-44].

7.5 Formato generado

A continuación, se presentan imágenes del formato de la parametrización entregado a Grupo Lassen, realizado en Excel.

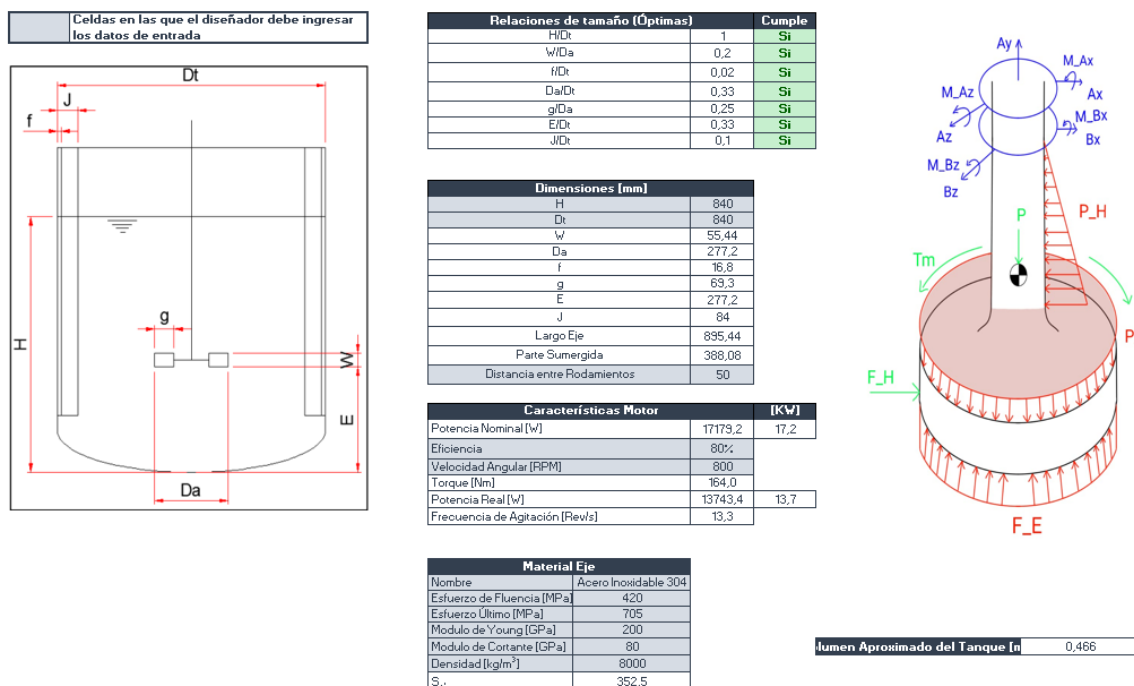


Figura 18. Primera parte de la parametrización Excel.

En la **Figura 18** se muestra la primera parte del formato de parametrización. Las casillas resaltadas corresponden a los datos que el diseñador debe ingresar, incluyendo dimensiones del tanque, distancia entre soportes, eficiencia del motor, velocidad de giro y las propiedades mecánicas del material de diseño.

Propiedades del fluido de trabajo	
Densidad [Kg/m ³]	1400
Viscosidad Dinámica Aparente [Pa·s]	50

Fuerzas (Método Analítico)	
Fuerza Hidráulica	394,5
Peso [Kg]	20,3
Fuerza de Presión Horizontal Eje	253,9
Fuerza de Presión Vertical Impulsor	420,5
Fuerza de Empuje Impulsor	466,5

Reacciones	
Reacción Horizontal Rodamiento 2 [N]	401,0
Reacción Vertical Rodamiento 1 [N]	25,7
Reacción Horizontal Rodamiento 1 [N]	-6,5
Torsor [Nm]	164,0

Números Adimensionales		
Número de Reynolds	28,7	Laminar
Número de Potencia	2,5	
Número de Froude	5,0	

Presión en Centro de Presión [Pa]	
	3553,3

Modelo Número de Potencia		
Número de Potencia	2,323	Use el otro modelo
Número de Potencia	2,530	Modelo 2

Cálculos Adicionales	
Volumen Impulsor [m ³]	0,00335
Volumen Estimado Eje [m ³]	0,00253
Centroide Real Eje [mm]	447,720
Centroide parte sumergida Eje [mm]	194,040
Centroide Impulsor, desde Soporte [mm]	923,160
Momento Polar Inercia Eje [m ⁴]	0,00000
Momento Polar Inercia Impulsor [m ⁴]	0,00058
Momento de Inercia Impulsor [m ⁴]	0,00029
Momento de Inercia Eje [m ⁴]	0,00000
Centro de Presion Eje [mm]	258,720
Centro de Presion Impulsor [mm]	295,680
Área Superficial Sumergida Eje [m ²]	0,07315
Área Superficial Impulsor [m ²]	0,04828
Área Transversal Eje [m ²]	0,00283
Área Transversal Impulsor [m ²]	0,06035
Centroide respecto a Soporte [m]	0,71836
Centroide respecto a Soporte [mm]	718,362
Centro de Presión Eje desde el Soporte [mm]	766,080

Cargas Internas		
Primera Sección		0 < y < 0,05 m
Flector [Nm]	-6,452·y	
Cortante [N]	-6,45	
Axial [N]	25,69	
Torsor [Nm]	164,05	
Segunda Sección		0 < y < 0,718362 m
Flector [Nm]	394,54·y-20,05	
Cortante [N]	394,54	
Axial [N]	25,69	
Torsor [Nm]	164,05	
Tercera Sección		0 < y < 0,84 m
Flector [Nm]	394,54·y-20,05	
Cortante [N]	394,54	
Axial [N]	5,44	
Torsor [Nm]	164,05	
Cuarta Sección		0 < y < 0,86772 m
Flector [Nm]	394,54·y-20,05	
Cortante [N]	394,54	
Axial [N]	-415,09	
Torsor [Nm]	164,05	
Quinta Sección		0 < y < 0,89544 m
Flector [Nm]	322,30	
Cortante [N]	0,00	
Axial [N]	-415,09	
Torsor [Nm]	164,05	

Diámetro Eje	
C [mm]	60
C [m]	0,06

Cargas Internas Máximas	
Flector	322,3
Cortante	394,5
Axial	415,1
Torsor	164,0

Figura 19. Segunda parte de la parametrización Excel.

La **Figura 19** ilustra la segunda parte de la parametrización, donde se deben ingresar las propiedades físicas del fluido de trabajo. También se debe elegir un primer diámetro de eje para calcular las fuerzas, cargas internas, esfuerzos y el factor de seguridad a fatiga, como se muestra en la **Figura 20**.

Esfuerzos [Pa]		[MPa]
Flector _{M_{Max}}	15198719,3	15,2
Cortante _{M_{Max}}	189095,9	0,2
Axial _{M_{Max}}	146807,0	0,1
Torsor _{M_{Max}}	3868043,7	3,9

Factores de Concentración de Esfuerzos		
Nombre	Flexión	Torsor
Cuñero Fresado	2,14	3
Agujero Prisionero	3,0-2,0	4,0-2,9

Factores de Sensibilidad a la Muesca		
Tipo	Flexión	Torsor
Sensibilidad a la Muesca	1	1
Cuñero	2,14	3
Agujero Prisionero	2,5	3,4

Factores Ecuación de Marin	
Factor de Superficie K _a	0,793
Factor de Tamaño K _b	0,800
Factor de Tamaño K _b	0,794
Factor de Carga K _c	1
Factor de Temperatura K _d	1
Factor de Confiabilidad K _e	0,868
Factor de Efectos varios K _f	1
Límite de Resistencia a la Fatiga [MPa]	192,7

Partes de la Ecuación del Factor a Fatiga	
A	0,16878
B	98700943019,6
C	404710105519750,0
D	0,028539

Resultados	
Factor de Seguridad a Fatiga y Fluencia	5,1
Factor de Seguridad Vibración Axial	66,7
Factor de Seguridad Vibración Circunferencial no Amortiguada	167,2
Factor de Seguridad Vibración Circunferencial Amortiguada	166,3
Factor de Seguridad Vibración Transversal no Amortiguada	1,3
Factor de Seguridad Vibración Transversal Amortiguada	1,3

Figura 20. Tercera parte de la parametrización Excel.

En la tercera parte de la parametrización, se obtienen las constantes del análisis de vibraciones y se expresan las frecuencias naturales, como se muestra en la **Figura 21**.

Vibración Axial	
Constante de Resorte	631518,2
Constante de Amortiguamiento	0
Frecuencia Natural [rad/s]	5583,8

Partes de la Ecuación del Factor a Fatiga	
A	0,16878
B	98700943019,6
C	404710105519750,0
D	0,028539

Vibración Circunferencial	
Constante de Resorte	113673,3
Constante de Amortiguamiento	1,6
Amortiguamiento Crítico	16,2
Frecuencia Natural [rad/s]	14003,7
Relación de Amortiguamiento	0,1
Frecuencia Natural Amortiguada [rad/s]	13933,2

Partes de la Ecuación del Amortiguamiento	
A	1,189
B	0,061
C	0,377

Vibración Transversal	
Constante de Resorte	584234,7
Constante de Amortiguamiento	10,9
Amortiguamiento Crítico	716649977,0
Frecuencia Natural [rad/s]	111,5
Relación de Amortiguamiento	0,0
Frecuencia Natural Amortiguada [rad/s]	111,5

Resultados	
Factor de Seguridad a Fatiga y Fluencia	5,1
Factor de Seguridad Vibración Axial	66,7
Factor de Seguridad Vibración Circunferencial no Amortiguada	167,2
Factor de Seguridad Vibración Circunferencial Amortiguada	166,3
Factor de Seguridad Vibración Transversal no Amortiguada	1,3
Factor de Seguridad Vibración Transversal Amortiguada	1,3

Figura 21. Cuarta parte de la parametrización Excel.

Además, se duplicó el formato para permitir la modificación manual del número de potencia del agitador, como se ilustra en la **Figura 22**.

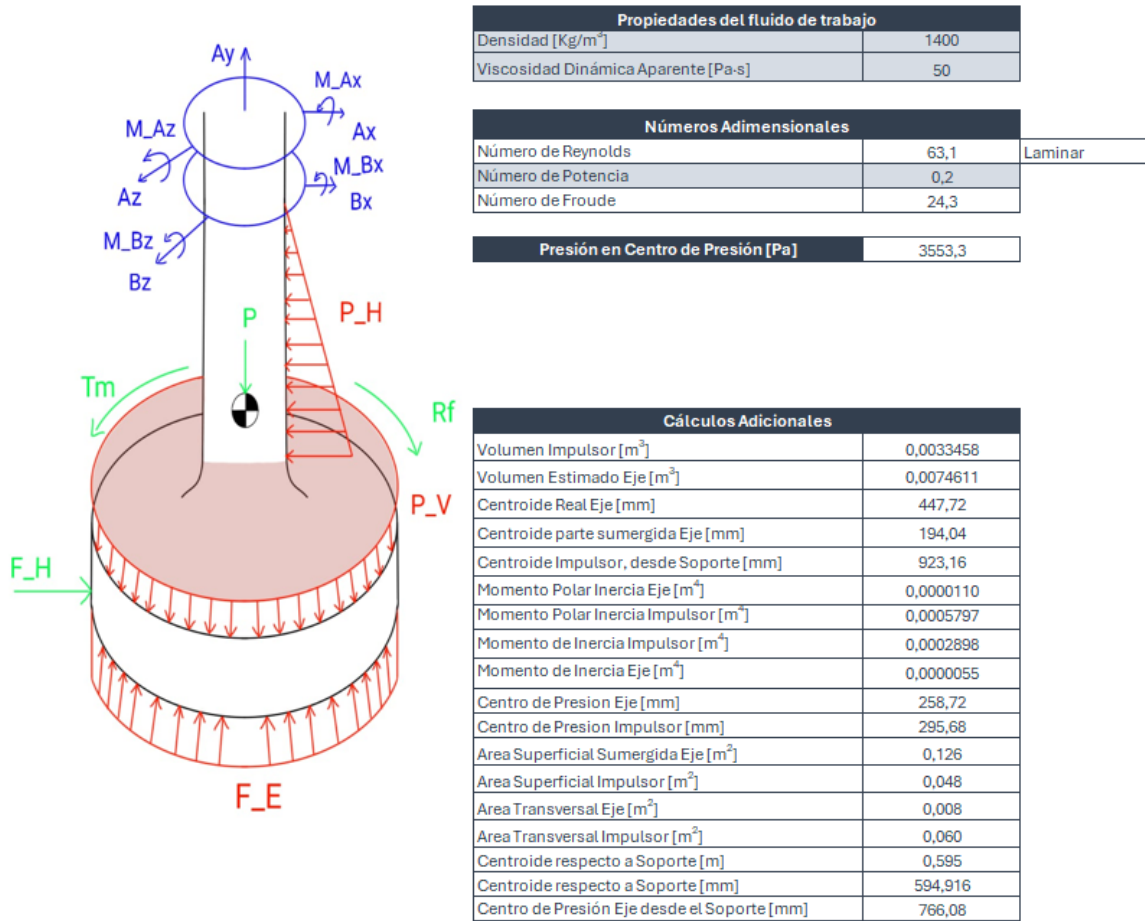


Figura 22. Formato con número de potencia manual.

8. Conclusiones

El diseño paramétrico obtenido ha demostrado la exactitud esperada, superando los objetivos planteados en cuanto al alcance de la parametrización y rigor técnico. Más específicamente, el objetivo general se cumplió al lograr que la parametrización funcione para cualquier impulsor que genere un patrón de flujo radial. En lugar de limitarse a un único tipo de impulsor para un solo grupo de fluidos, se ha desarrollado un diseño paramétrico para agitadores que emplean cualquier tipo de impulsor con flujo radial además de mostrar potencial para su aplicación en agitadores de flujo axial.

En cuanto al segundo objetivo específico, las fuerzas que actúan en el agitador fueron consideradas con mayor rigor que en manuales de diseño y diversos artículos y trabajos de grado, obteniendo un resultado más cercano a la realidad del funcionamiento de agitadores.

Además, el análisis de vibración se abordó desde una perspectiva analítica, cambiando el paradigma actual de diseño que se centra en simulaciones mediante técnicas numéricas para diseños particulares. Estas técnicas, a menudo, no se implementan con la rigurosidad necesaria, omitiendo procesos críticos como la convergencia de malla o los efectos de amortiguamiento, lo que disminuye la exactitud de las simulaciones. En este caso se obtuvieron expresiones que agilizan significativamente los procesos de diseño sin comprometer el resultado, además de explorar todos los posibles modos de vibración, cumpliendo con el objetivo planteado.

Finalmente, la comparación entre los diseños de la literatura y los recopilados de Grupo Lassen demuestra que la parametrización es confiable, permitiendo el uso de cualquier tipo de agitador radial en dos grupos de fluidos (previamente se consideró solo el grupo de

fluidos pseudoplásticos). Esto convierte al diseño paramétrico en una herramienta eficaz para el Grupo Lassen, permitiendo el análisis de diseño y vibraciones en sistemas de agitación de manera rápida y eficiente.

Aunque la parametrización actual es precisa, se puede mejorar y escalar, como se mencionó en la sección de trabajo futuro. Sin embargo, el resultado actual es prometedor y proporciona a las empresas de diseño y manufactura de agitadores una herramienta para determinar los límites operativos de sus equipos, promoviendo la seguridad industrial.

Además, la formulación de las expresiones matemáticas realizadas contribuye al conocimiento teórico en los ámbitos de diseño mecánico y operaciones unitarias en la industria de agitación, facilitando la implementación de la parametrización en los procesos de diseño que la industria requiere

9. Trabajos futuros

Este estudio puede ser ampliado mediante el análisis complementario de los modelos matemáticos utilizados para determinar la fuerza hidráulica y el número de potencia. La inclusión de más modelos permitiría realizar análisis de agitación para otros grupos de fluidos, como los dilatantes o los plásticos de Bingham. Además, se podrían emplear métodos analíticos más complejos utilizando conceptos avanzados de mecánica de fluidos para considerar la variación de densidad a lo largo del fluido o calcular la velocidad del agitador según el régimen de flujo necesario.

Un aspecto prometedor del trabajo sería utilizar el método de Metzner-Otto para expresar la viscosidad en forma de viscosidad aparente, lo que incrementaría la precisión de la parametrización para sustancias no homogéneas.

Otro posible enfoque es aumentar el número de grados de libertad para obtener más frecuencias naturales y expresar una frecuencia natural en cada grado de libertad. No obstante, esto requeriría el uso de software capaz de resolver sistemas matriciales de manera analítica, una tarea que Excel no puede realizar.

Por último, se sugiere verificar la parametrización para agitadores radiales y axiales mediante simulaciones de elementos finitos y CFD. Aunque esto solo sería aplicable a algunos resultados de la parametrización, permitiría confirmar la validez del modelo con estas técnicas, manteniendo las condiciones tal como serían en la realidad.

Bibliografía

- [1] F. Kars-Jordan and P. Hiltunen, "Agitation Handbook," Stockholm, 2007.
- [2] E. L. Paul, V. A. Atiemo-Obeng, and S. M. Kresta, *HANDBOOK OF INDUSTRIAL MIXING SCIENCE AND PRACTICE*. 2004.
- [3] W. L. McCabe, J. C. Smith, and Peter. Harriott, *Operaciones unitarias en ingeniería química*. McGraw-Hill, 1991.
- [4] F. M. White, *MECÁNICA DE FLUIDOS*, 5th ed. 2003.
- [5] Y. A. Çengel and J. M. Cimbala, *Mecánica de Fluidos Fundamentos y aplicaciones*, 1st ed. 2006.
- [6] V. C. Uribe, "Diseño y Calculo de un Agitador de Fluidos Uribe," Universidad del Bío-Bío, 2013.
- [7] G. A. Padron, "MEASUREMENT AND COMPARISON OF POWER DRAW IN BATCH ROTOR-STATOR MIXERS," 2001.
- [8] M. Cooke, "DESIGN OF MECHANICALLY AGITATED CONTACTORS OR REACTORS WITH 'ATTITUDE,'" Manchester, 2005.
- [9] S. S. Rao, *Vibraciones mecánicas*, 5th ed. McGraw-Hill, 2012.
- [10] R. G. Budynas and J. Keith Nisbett, *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley*, 9th ed. McGraw-Hill, 2012.
- [11] R. L. Norton, *DISEÑO DE MÁQUINAS un enfoque integrado*, 4th ed. Pearson Educación, 2011.
- [12] R. C. Hibbeler, *Ingeniería mecánica - Dinámica*, 12th ed. McGraw-Hill, 2010.
- [13] R. C. Hibbeler, *Ingeniería mecánica - Estática*, 12th ed. McGraw-Hill, 2010.
- [14] R. L. Bates, P. L. Fondy, and J. G. Fenic, "Impeller Characteristics and Power," in *Mixing*, Elsevier, 1966, pp. 111–178. doi: 10.1016/b978-0-12-395633-0.50008-9.

-
- [15] A. R. Uribe Ramirez, R. R. Aguilera, A. F. Aguilera, and E. Murrieta Luna, "AGITACION Y MEZCLADO," *Revista Enlace Quimico*, vol. 4, no. 1, 2012, doi: 101813383300-102.
- [16] E. S. Hernandez, "INTERACCIÓN ENTRE LA CALLE DE VON KÁRMÁN Y LA OSCILACION DE UNA PLACA FLEXIBLE PASIVA INMERSA DENTRO DE LOS VÓRTICES," Universidad de Guadalajara, 2016.
- [17] K. J. McNaughton, *Bombas: Selección, uso y mantenimiento*, 1st ed. McGraw-Hill, 1992.
- [18] Grec, "MIXERS USE AND MAINTENANCE MANUAL," *Mixers Use and Maintenance Manual*. GREC, Milan, 2014. [Online]. Available: www.grec.it
- [19] J. Pierre and A. Zambrano, "ESTUDIO DEL EFECTO DEL FLUIDO SOBRE LAS FRECUENCIAS NATURALES Y MODOS DE VIBRACIÓN DE UN AGITADOR 4PBT45 MEDIANTE SIMULACIÓN NUMÉRICA," Pontificia Universidad Católica del Perú, 2014.
- [20] R. J. Weetman and B. Gigas, "Mixer Mechanical Design-Fluid Forces," in *Internation Pump Users Symposium*, 2002.
- [21] H. R. Jhansale, "Fatigue Evaluation of Agitator Paddle Shafts," Case Studies for, "American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1994. [Online]. Available: www.astm.org
- [22] T.-Y. Kim, J.-C. Park, S.-C. Hwang, G.-D. Park, and S.-K. Lee, "Numerical Study on Mixing Performance of Agitator in Drilling Mud Handling System Using Eulerian and Lagrangian Approaches," in *Oceans MTS/IEEE Conference 2014.04.07-10 Taipei*, 2014.
- [23] M. B. Jiménez and M. M. Córdoba, "Determinacion de Modelos para evaluar el consumo de potencia en tanques agitados para soluciones pseudoplásticas," 2010.
- [24] EKATO HOLDING GmbH, "Agitadores." [Online]. Available: <https://www.ekato.com/es/productos/agitadores/>
- [25] SPX Flow, "SPXFLOW Our Company." [Online]. Available: <https://www.spxflow.com/about/our-company/>
- [26] Inoxpa, "Equipos Mezcladores Tipo MIX I Aplicación," Equipos Mezcladores Tipo MIX. [Online]. Available: www.inoxpa.com
- [27] Y. A. Çengel and M. A. Boles, *Termodinámica*, 8th ed. McGraw-Hill, 2015.
- [28] F. Miller *et al.*, *Twin views of the Tacoma Narrows Bridge collapse*. American Association of Physics Teachers, 2008.

- [29] J. F. Pietranski, "Mechanical Agitator Power Requirements for Liquid Batches." 2020. [Online]. Available: www.PDHonline.com
- [30] M. Shah, "Course Material Process Engineering: Agitation & Mixing Course Material Compiled," Gujarat. [Online]. Available: www.dduanchor.org
- [31] R. D. Bolívar M, "ANÁLISIS, DISEÑO Y MODELAMIENTO POR ELEMENTOS FINITOS DEL EJE PARA UN AGITADOR MECÁNICO DE LA EMPRESA FLOW CONTROL AND HANDLING S.A.," Universidad Autónoma de Occidente, Cali, 2013.
- [32] A. Haryanto and B. Budiwantoro, "Dynamic characteristics analysis of agitator design for soy sauce cooking process," in *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, Institute of Physics Publishing, Apr. 2019. doi: 10.1088/1755-1315/251/1/012038.
- [33] J. Duran, M. C. Manuel, and R. Tayactac, "Design, Fabrication and Experimental Performance Evaluation of a Mechanized Close Chamber Muscovado Crystallizer Equipped with Horizontal Axis Double Flight Ribbon Blade Agitator," in *2022 IEEE 13th International Conference on Mechanical and Intelligent Manufacturing Technologies, ICMIMT 2022*, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2022, pp. 5–10. doi: 10.1109/ICMIMT55556.2022.9845302.
- [34] T. N. Guma, A. Agbata, and T. Akor, "An Overview of Basic Concepts for Advancements in Designs of Mechanical Agitators for Paint Mixing," *Saudi Journal of Engineering and Technology Abbreviated Key Title: Saudi J Eng Technol*, 2019, doi: 10.21276/sjeat.2019.4.1.2.
- [35] E. S. Vásquez Arana, "Diseño de un agitador mecánico para mejorar la producción de biogás de un biodigestor semi continuo en la I.E.P.C. Bereshi-Chimbote," Universidad San Pedro, Chimbote, 2020.
- [36] R. K. Grenville, A. T. C. Mak, and D. A. R. Brown, "Suspension of solid particles in vessels agitated by axial flow impellers," *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 100, pp. 282–291, Aug. 2015, doi: 10.1016/j.cherd.2015.05.026.
- [37] D. García-Cortés and U. Jáuregui-Haza, "Hidrodinámica en tanques agitados con rutbinas de disco con paletas planas," *Revista Facultad de Ingeniería*, vol. 38, 2006.
- [38] I.-M. Prodea, "THE CALCULUS OF THE MIXING ROTATING DEVICES SHAFTS BASED ON THE ENERGOINICS METHOD," *U.P.B. Sci. Bull., Series D*, vol. 74, no. 3, 2012.
- [39] R. C. Hibbeler, *Mecánica de materiales*, 8th ed. 2011.
- [40] Richard G. Budynas, *Advanced strength and Applied Stress Analysis*. 1999.

- [41] J. Hower, "MASTERING MIXING FUNDAMENTALS." [Online]. Available: www.haywardgordon.com
- [42] Novatec, "AGITADORES MECÁNICOS SISTEMAS Y EQUIPOS PARA EL MANEJO, CONTROL, DOSIFICACIÓN Y AGITACIÓN DE FLUIDOS," *Agitadores Mecánicos*. [Online]. Available: www.novatecfs.com
- [43] B. Oğla, Ö. Gürçay, and Ş. Ş. Helvacı, "Power draw characteristics and comparison of scaling criteria for sawtooth impellers used in high shear mixing of shear thinning paint slurry," *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 189, pp. 210–219, Jan. 2023, doi: 10.1016/j.cherd.2022.11.005.
- [44] Á. M. Cerón, G. A. Charry, and J. J. Coronado, "ANÁLISIS DE FALLA DEL EJE DE UN AGITADOR PARA TRATAMIENTO DE AGUA," *Scientia et Technica*, 2006.

Anexos

Anexo 1 Parametrización para el diseño de ejes de agitadores:

[Libro de Excel con la parametrización realizada](#)

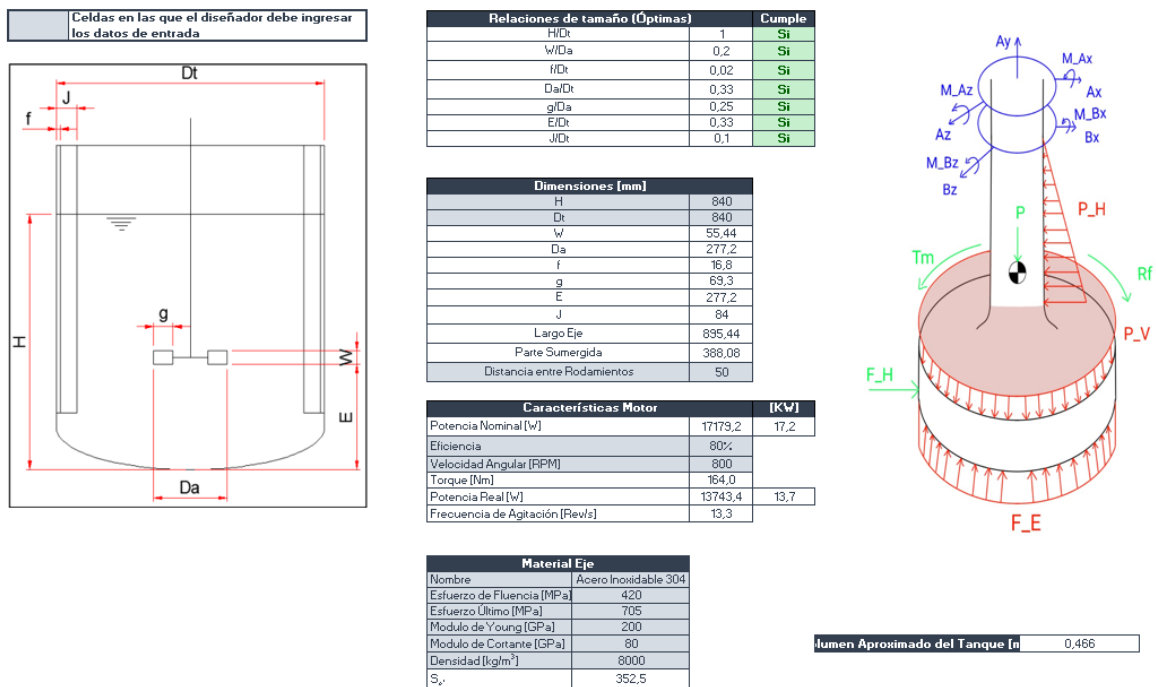


Figura 18. Primera parte de la parametrización Excel.

Propiedades del fluido de trabajo	
Densidad [Kg/m ³]	1400
Viscosidad Dinámica Aparente [Pa·s]	50

Números Adimensionales	
Número de Reynolds	28,7
Número de Potencia	2,5
Número de Froude	5,0

Laminar

Presión en Centro de Presión [Pa]	
	3553,3

Modelo Número de Potencia		
Número de Potencia	2,323	Use el otro modelo
Número de Potencia	2,530	Modelo 2

Cálculos Adicionales	
Volumen Impulsor [m ³]	0,00335
Volumen Estimado Eje [m ³]	0,00253
Centroide Real Eje [mm]	447,720
Centroide parte sumergida Eje [mm]	194,040
Centroide impulsor, desde Soporte [mm]	923,160
Momento Polar Inercia Eje [m ⁴]	0,00000
Momento Polar Inercia Impulsor [m ⁴]	0,00058
Momento de Inercia Impulsor [m ⁴]	0,00029
Momento de Inercia Eje [m ⁴]	0,00000
Centro de Presion Eje [mm]	258,720
Centro de Presion Impulsor [mm]	295,680
Área Superficial Sumergida Eje [m ²]	0,07315
Área Superficial Impulsor [m ²]	0,04828
Área Transversal Eje [m ²]	0,00283
Área Transversal Impulsor [m ²]	0,06035
Centroide respecto a Soporte [m]	0,71836
Centroide respecto a Soporte [mm]	718,362
Centro de Presión Eje desde el Soporte [mm]	766,080

Diámetro Eje	
C [mm]	60
C [m]	0,06

Fuerzas (Método Analítico)	
Fuerza Hidráulica	394,5
Peso [Kg]	20,3
Fuerza de Presión Horizontal Eje	253,9
Fuerza de Presión Vertical Impulsor	420,5
Fuerza de Empuje Impulsor	466,5

Reacciones	
Reacción Horizontal Rodamiento 2 [N]	401,0
Reacción Vertical Rodamiento 1 [N]	25,7
Reacción Horizontal Rodamiento 1 [N]	-6,5
Torsor [Nm]	164,0

Cargas Internas		
Primera Sección		
Flector [Nm]	-6,452 y	0 < y < 0,05 m
Cortante [N]	-6,45	
Axial [N]	25,63	
Torsor [Nm]	164,05	
Segunda Sección		
Flector [Nm]	394,54 y -20,05	0 < y < 0,718362 m
Cortante [N]	394,54	
Axial [N]	25,63	
Torsor [Nm]	164,05	
Tercera Sección		
Flector [Nm]	394,54 y -20,05	0 < y < 0,84 m
Cortante [N]	394,54	
Axial [N]	5,44	
Torsor [Nm]	164,05	
Cuarta Sección		
Flector [Nm]	394,54 y -20,05	0 < y < 0,86772 m
Cortante [N]	394,54	
Axial [N]	-415,09	
Torsor [Nm]	164,05	
Quinta Sección		
Flector [Nm]	322,30	0 < y < 0,89544 m
Cortante [N]	0,00	
Axial [N]	-415,09	
Torsor [Nm]	164,05	

Cargas Internas Máximas	
Flector	322,3
Cortante	394,5
Axial	415,1
Torsor	164,0

Figura 19. Segunda parte de la parametrización Excel.

Esfuerzos [Pa]	[MPa]
Flector _{Máx}	15198719,3
Cortante _{Máx}	189095,9
Axial _{Máx}	146807,0
Torsor _{Máx}	3868043,7

Factores de Concentración de Esfuerzos		
Nombre	Flexión	Torsor
Cuñero Fresado	2,14	3
Agujero Prisionero	3,0-2,0	4,0-2,9

Factores de Sensibilidad a la Muesca		
Tipo	Flexión	Torsor
Sensibilidad a la Muesca	1	1
Cuñero	2,14	3
Agujero Prisionero	2,5	3,4

Factores Ecuación de Marin	
Factor de Superficie K _s	0,793
Factor de Tamaño K _b	0,800
Factor de Tamaño K _t	0,794
Factor de Carga K _c	1
Factor de Temperatura K _d	1
Factor de Confiabilidad K _e	0,868
Factor de Efectos varios K _f	1
Límite de Resistencia a la Fatiga [MPa]	192,7

Partes de la Ecuación del Factor a Fatiga	
A	0,16878
B	98700943019,6
C	404710105519750,0
D	0,028539

Resultados	
Factor de Seguridad a Fatiga y Fluencia	5,1
Factor de Seguridad Vibración Axial	66,7
Factor de Seguridad Vibración Circunferencial no Amortiguada	167,2
Factor de Seguridad Vibración Circunferencial Amortiguada	166,3
Factor de Seguridad Vibración Transversal no Amortiguada	1,3
Factor de Seguridad Vibración Transversal Amortiguada	1,3

Figura 20. Tercera parte de la parametrización Excel.

Partes de la Ecuación del Factor a Fatiga	
A	0,16878
B	98700943019,6
C	404710105519750,0
D	0,028539

Vibración Axial	
Constante de Resorte	631518,2
Constante de Amortiguamiento	0
Frecuencia Natural [rad/s]	5583,8

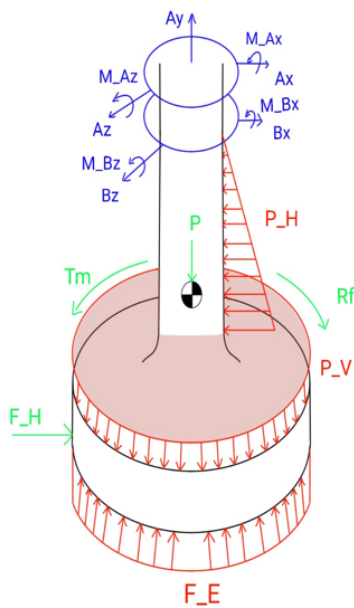
Vibración Circunferencial	
Constante de Resorte	113673,3
Constante de Amortiguamiento	1,6
Amortiguamiento Crítico	16,2
Frecuencia Natural [rad/s]	14003,7
Relación de Amortiguamiento	0,1
Frecuencia Natural Amortiguada [rad/s]	13933,2

Partes de la Ecuación del Amortiguamiento	
A	1,189
B	0,061
C	0,377

Resultados	
Factor de Seguridad a Fatiga y Fluencia	5,1
Factor de Seguridad Vibración Axial	66,7
Factor de Seguridad Vibración Circunferencial no Amortiguada	167,2
Factor de Seguridad Vibración Circunferencial Amortiguada	166,3
Factor de Seguridad Vibración Transversal no Amortiguada	1,3
Factor de Seguridad Vibración Transversal Amortiguada	1,3

Vibración Transversal	
Constante de Resorte	584234,7
Constante de Amortiguamiento	10,9
Amortiguamiento Crítico	716649977,0
Frecuencia Natural [rad/s]	111,5
Relación de Amortiguamiento	0,0
Frecuencia Natural Amortiguada [rad/s]	111,5

Figura 21. Cuarta parte de la parametrización Excel.



Propiedades del fluido de trabajo	
Densidad [Kg/m ³]	1400
Viscosidad Dinámica Aparente [Pa·s]	50

Números Adimensionales		
Número de Reynolds	63,1	Laminar
Número de Potencia	0,2	
Número de Froude	24,3	

Presión en Centro de Presión [Pa]	
	3553,3

Cálculos Adicionales	
Volumen Impulsor [m ³]	0,0033458
Volumen Estimado Eje [m ³]	0,0074611
Centroide Real Eje [mm]	447,72
Centroide parte sumergida Eje [mm]	194,04
Centroide Impulsor, desde Soporte [mm]	923,16
Momento Polar Inercia Eje [m ⁴]	0,0000110
Momento Polar Inercia Impulsor [m ⁴]	0,0005797
Momento de Inercia Impulsor [m ⁴]	0,0002898
Momento de Inercia Eje [m ⁴]	0,0000055
Centro de Presion Eje [mm]	258,72
Centro de Presion Impulsor [mm]	295,68
Area Superficial Sumergida Eje [m ²]	0,126
Area Superficial Impulsor [m ²]	0,048
Area Transversal Eje [m ²]	0,008
Area Transversal Impulsor [m ²]	0,060
Centroide respecto a Soporte [m]	0,595
Centroide respecto a Soporte [mm]	594,916
Centro de Presión Eje desde el Soporte [mm]	766,08

Figura 22. Formato con número de potencia manual.