



Proyecto de grado

Sobre la existencia y estabilidad de soluciones periódicas en actuadores micro-electro-mecánicos en presencia de controladores realimentados con retraso temporal

Sustentado por:

Juan Camilo Florez Valencia

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de
Pregrado en Matemáticas Aplicadas

Director:

Dr. Andrés Mauricio Rivera Acevedo

Línea de Investigación:

Ecuaciones Diferenciales

Pontificia Universidad Javeriana Cali
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas
Cali, Colombia
2023

*A mi madre y al profesor Andrés.
Muchas Gracias por todo.*

J. Camilo Florez V.

Resumen

En este proyecto de grado se considera el estudio analítico y numérico de la ecuación diferencial tipo Liénard con retraso:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x - u = \frac{4\beta V^2(t, \varphi(\dot{x}(t), \dot{x}_\tau(t)))x}{(1-x^2)^2}, \quad x \in]-1, 1[, \quad u \in [0, 1[\quad (1)$$

en donde $V = V(t)$ es una función continua y periódica, $\varphi(\dot{x}(t), \dot{x}_\tau(t)) = G(\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}(t))$, $G \in \mathbb{R}$ y $\gamma, \beta \in \mathbb{R}^+$. La ecuación diferencial (1) describe el movimiento del electrodo móvil (*finger*) en el actuador micro-electro-mecánico conocido como *Comb-drive finger* cuya dinámica global contempla la presencia de una fuerza restauradora lineal, la fuerza electrostática generada por la fuente de voltaje $V(t)$ entre los electrodos y el efecto de un retraso temporal $\tau \geq 0$ debido a un controlador realimentado (feedback), el cual actúa directamente sobre la velocidad del electrodo móvil. Las técnicas matemáticas consideradas para nuestro análisis abarcan el análisis de ecuaciones lineales con retraso temporal, el método de perturbación de múltiple escalas y el teorema de la función implícita en espacios de Banach.

Palabras Claves: Ecuaciones tipo Liénard con retraso, análisis real, soluciones periódicas, actuadores micro electromecánicos, método de perturbación en múltiples escalas, teorema de función implícita en espacios de Banach.

Abstract

This proposal presents an analytical and numerical study of the time-delay Liénard differential equation:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x - u = \frac{4\beta V^2(t, \varphi(\dot{x}(t), \dot{x}_\tau(t)))x}{(1-x^2)^2}, \quad x \in]-1, 1[, \quad u \in [0, 1[, \quad (2)$$

where $V = V(t)$ is a continuous and periodic function, $\varphi(\dot{x}(t), \dot{x}_\tau(t)) = G(\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t))$, $G \in \mathbb{R}$ and $\gamma, \beta \in \mathbb{R}^+$. The differential equation (2) describes the motion of the moveable electrode (*finger*) in the micro-electro-mechanical actuator known as *Comb-drive finger* in the micro-electromechanical actuator whose global dynamics consider the presence of a linear restoring force, the electrostatic force generated by the voltage source $V(t)$ between the electrodes and the effect of a time delay $\tau \geq 0$ due to a feedback controller acting directly in the speed of the moveable electrode. The mathematical techniques considered for our analysis include the analysis of time-delayed linear equations, the implicit function theorem in Banach spaces, and the perturbation method of multiple scales.

Keywords: Liénard-type equations with delay, real analysis, periodic solutions, microelectromechanical actuators, perturbation method of multiple-scale, implicit function theorem in Banach Spaces.

Contenido

1	Introducción y Planteamiento del Problema	9
1-1	Sistemas micro-electromecánicos	9
1-1-1	Actuador tipo Comb-drive con retraso	9
1-1-2	Efectos de un controlador retroalimentado	11
2	Marco teórico	14
2-1	Ecuaciones Diferenciales con Retraso	14
2-2	Sobre sistemas lineales autónomos con retraso	18
2-2-1	La ecuación característica	19
2-2-2	Sobre el principio de estabilidad linealizada	20
2-3	Teorema de la Función Implícita en espacios de Banach y el Teorema de la Aplicación Abierta	23
2-3-1	Teorema de la Función Implícita en Espacios de Banach	25
2-4	Método de perturbación. Múltiples escalas	28
2-4-1	Sucesiones asintóticas y series	28
2-4-2	Expansión asintótica para soluciones ecuaciones diferenciales	29
2-4-3	Método de múltiples escalas	31
2-4-4	Oscilaciones periódicas de signo constante en MEMS	35
3	Resultados	39
3-1	Efectos de un retraso temporal en el actuador Comb-drive desplazado	39
3-1-1	Método de múltiples escalas para el actuador tipo peine	49
3-1-2	Sobre la existencia y estabilidad de soluciones periódicas	55
4	Validación Numérica	60
	Conclusiones	65
	Bibliografía	67
I	Apéndice	69
I-I	Sobre las raíces de ecuaciones cúbicas	69
I-II	Sobre la estimación del parámetro de retraso	69
I-III	Sobre la regularidad de la función implícita.	70
I-IV	Bifurcación en el plano tipo Fold	70

Lista de Figuras

1	Esquema de un actuador electrostático tipo peine (Comb-drive finger actuator). Gráfica tomada de [27].	10
2	Esquema del controlador de velocidad retroalimentado.	11
3	Soluciones de la ecuación diferencial con retraso $\dot{x}(t) = -x(t - \tau)$ para distintos valores del parámetro τ	16
4	Vista individual de distintas soluciones de $\dot{x}(t) = -x(t - \tau)$ observadas en la Figura 3.	16
5	Visualización de las soluciones de (9) en el caso $r = 1$. A la derecha con la función histórica $hist_1(t)$ y a la izquierda con $hist_2(t)$	17
6	Gráfica de $\phi(x, u) = (x - u)(1 - x^2)^2$. En la izquierda observamos el caso $u = 0.15$ en el cual tenemos $\vartheta_* \approx 0.4431$, $\xi_+ \approx 0.5112$ y $\xi_- \approx -0.3912$. A la derecha el caso $u = 0.45$ el cual nos deja con $\vartheta_* \approx 0.1040$, $\xi_+ \approx 0.6621$ y $\xi_- \approx -0.3021$	40
7	Gráfico de $\tilde{\phi}_\zeta(x) = x(1 - \zeta x)(1 - x)^2$ en el caso $\zeta = 2.0294 \cdot 10^{-2}$ con $x \in [-73.5828, 74.2494]$	47
8	En la izquierda las soluciones z_1 y z_2 del sistema (77) a lo largo del tiempo t , a la derecha un plano fase con cuatro soluciones con los valores $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_2 \in \{-0.25, -0.15, 0.15, 0.25\}$. Caso $\tau = 0$ en la fila superior y el caso $\tau = 1.75$ en la fila inferior.	62
9	Planos fases de las soluciones asociadas a diferentes fuentes de voltaje constantes v_0 a lo largo del eje τ con $v_0 \in \{5, 10, 13\}$ de izquierda a derecha respectivamente, se usaron los parámetros físicos vistos en la Tabla 1 en todas las soluciones.	63
10	A la izquierda se observan las soluciones z_1 y z_2 del sistema (78) a lo largo del tiempo t , a la derecha un plano fase con cuatro soluciones con los valores $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_2 \in \{-0.25, -0.15, 0.15, 0.25\}$. Caso $\tau = 0$ en la fila superior y el caso $\tau = 1.75$ en la fila inferior.	64

Lista de Tablas

1	Valores de los parámetros físicos para el modelo Comb-drive desplazado (43).	60
2	Valores asociados a los parámetros presentados en los Teoremas 10 y 11 con el set de parámetros físicos vistos en la Tabla 1 variando la fuente de voltaje constante. Caso $G = -95$	60

- 3 Valores asociados a los parámetros presentados en en los Teoremas 10 y 11 con el set de parámetros físicos vistos en la Tabla 1 variando la fuente de voltaje constante. Caso $G = -50$. 61

Lista de Teoremas

1	Teorema (Ejercicio 2.1 del libro [26])	15
1	Ejemplo (Visualización de las soluciones asociadas a (9) en el caso $r = 1$)	16
2	Ejemplo (Influencia de la función histórica en las soluciones de (9) en el caso $r = 1$)	17
1	Lema	20
2	Teorema	20
3	Teorema	21
3	Ejemplo	22
4	Teorema (Teorema de la Función Implícita (T.F.I))	24
4	Ejemplo	25
5	Teorema (Teorema de la Función Implícita en Espacios de Banach)	26
6	Teorema (Teorema de la aplicación abierta)	27
1	Corolario (Isomorfismo de espacios de Banach)	27
7	Teorema (Alternativa de Fredholm)	27
1	Definición (“O”-grande, “o”-pequeña)	28
5	Ejemplo	28
2	Definición (Sucesión asintótica)	28
3	Definición (Expansión asintótica)	29
6	Ejemplo	29
7	Ejemplo	29
8	Ejemplo	33
4	Definición (Súper y sub-soluciones)	35
8	Teorema	37
2	Lema	37
9	Teorema	38
1	Observación	38
1	Proposición	39
2	Corolario	41
10	Teorema	42
11	Teorema	44
2	Observación	46
3	Observación (Extensión de resultados a otros modelos tipo MEMS)	46
12	Teorema	48

2	Proposición	53
13	Teorema	55
14	Teorema	56
3	Lema	57
4	Lema	57
15	Teorema	58
4	Observación	59
5	Observación	59
I	Teorema (Fórmula de Cardano-Vietta)	69
II	Teorema	70
I	Lema	70
I	Proposición	70

1. Introducción y Planteamiento del Problema

1-1. Sistemas micro-electromecánicos

1-1-1. Actuador tipo Comb-drive con retraso

Los sistemas microelectromecánicos, o conocidos por el acrónimo Micro-electromechanical systems (MEMS), es una actual clasificación de la tecnología dedicada a diseñar y fabricar dispositivos o sistemas integrados muy pequeños (su dimensión física varía en un rango de $10^{-6}m$ a $10^{-3}m$) los cuales combinan componentes mecánicos y electromecánicos, ver [29, 31]. Desde mediados de la década de 1950, con la comercialización de los manómetros de silicio, los MEMS ha recorrido un largo y rápido camino desde el laboratorio hasta el usuario común y en la actualidad están integrados en una amplia variedad de dispositivos con diversas aplicaciones, desde las más simples (sensores de temperatura) hasta las más complejas (bio-chips para la detección de agentes químicos y biológicos peligrosos, giroscopios y acelerómetros). Se puede afirmar que los MEMS cubren dos procesos principales, *detección* y *movimiento*. Entre las diversas aplicaciones de estos dispositivos tenemos, por ejemplo, sensores de bolsas de aire para vehículos, sensores de nivel de combustible y presión de vapor, cabezales de impresión de inyección de tinta, sensores de presión arterial, prótesis, osciladores controlados por voltaje (VCO), control de municiones y control de vuelo. Un resumen más completo y reciente de la literatura en MEMS y sus aplicaciones puede verse en [29, 31] y en las referencias que allí se citan. Hasta donde sabemos, fue en 1967 H.C. Nathanson y sus colaboradores presentan en [17] el primer modelo matemático de un actuador electrostático de placas paralelas con interacción elástico-electrostática, enfocando su trabajo en el estudio analítico y numérico del voltaje de activación que induce efectos de inestabilidad en la activación del dispositivo. Dicho voltaje de crítico es conocido como *voltaje pull-in*, el cual denotamos por v_{pull} . Cuando se llega a este valor crítico, un efecto mecánico es la posible colisión entre los electrodos fijo y móvil, lo que equivale a daños del dispositivo. Hoy en día, el modelo de Nathanson se ha convertido en un “modelo canónico” entre los modelos dinámicos sobre MEMS, con una gran cantidad de artículos dedicados a su estudio analítico y numérico. Véase, por ejemplo los artículos [11, 17, 20, 4, 31].

Otro interesante actuador electrostático cuya configuración es similar al actuador de placas paralelas de Nathanson es el actuador electrostático conocido en la literatura como *Comb-drive finger* o bien *actuador tipo peine*. El diseño básico del actuador tipo peine consiste en dos electrodos fijos y en medio de ellos un electrodo móvil el cual se mueve en la dirección ortogonal o paralela al eje de los electrodos fijos. Todo el dispositivo es sometido a una fuente de voltaje $\mathcal{V}(s)$ la cual en algunos casos es una fuente constante (fuente que induce una corriente directa) o puede ser periódica (fuente que induce una corriente alterna). El actuador tipo peine tiene una amplia gama de aplicaciones, las cuales, al igual que el modelo de Nathanson, se centran en detección y actuación. Entre sus aplicaciones más frecuentes tenemos: Sensores resonantes, acelerómetros y dispositivos de comunicación óptica. La configuración

precisa de un actuador electrostático tipo peine con movimiento ortogonal del electrodo móvil se ilustra en la siguiente figura.

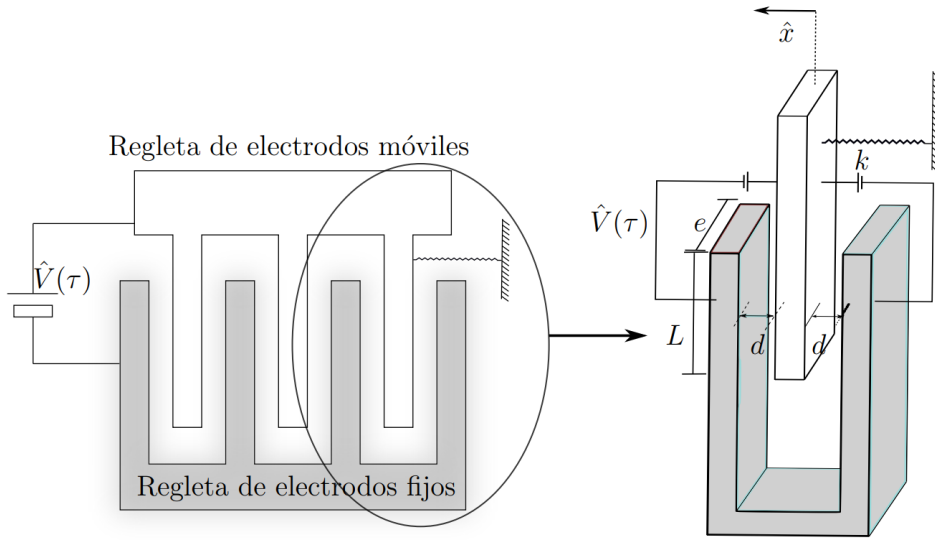


Figura 1. Esquema de un actuador electrostático tipo peine (Comb-drive finger actuator). Gráfica tomada de [27].

Se puede comprobar que la ecuación diferencial que gobierna el movimiento del electrodo móvil de masa m ubicado en medio de los electrodos fijos a una distancia equidistante d , unido a un resorte con coeficiente de rigidez lineal k , moviéndose de derecha e izquierda debido a las fuerzas electrostáticas generadas por una misma fuente de voltaje $\mathcal{V}(s)$ está dada por

$$m\hat{x}'' + c\hat{x}' + k\hat{x} = \frac{\epsilon(Le)\mathcal{V}^2(s)}{2} \left(\frac{1}{(d-\hat{x})^2} - \frac{1}{(d+\hat{x})^2} \right), \quad (3)$$

donde $\hat{x}'' = \hat{x}''(s)$ representa la aceleración inducida en el electrodo móvil, c es el coeficiente de amortiguamiento lineal, L, e son parámetros de fabricación y configuración del actuador y ϵ denota la constante dieléctrica del medio entre los electrodos. Debido en parte a la diminutas dimensiones del dispositivo, en el proceso de fabricación existen pequeñas desviaciones del electrodo móvil desde el punto medio entre los electrodos fijos ($\hat{x} = 0$). Si se asume una desviación con magnitud $\hat{u} > 0$, se puede comprobar que la ecuación en la forma

$$m\hat{x}'' + c\hat{x}' + k\hat{x} = \frac{\epsilon(Le)\mathcal{V}^2(s)}{2} \left(\frac{1}{(d-(\hat{x}+\hat{u}))^2} - \frac{1}{(d+(\hat{x}+\hat{u}))^2} \right). \quad (4)$$

Por medio del cambio de variables

$$\hat{x} = xd - \hat{u}, \quad s = t\mathcal{T}, \quad \mathcal{T} = \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (5)$$

la ecuación (4) puede escribirse en la forma

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x - u = \frac{4\beta V^2(t)x}{(1-x^2)^2}, \quad x \in]-1, 1[, \quad u \in [0, 1[, \quad (6)$$

con

$$\gamma = \frac{c}{\mathcal{F}k} = \frac{c}{\sqrt{mk}}, \quad u = \frac{\hat{u}}{d}, \quad V(t) = \mathcal{V}(t\mathcal{T}) \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\epsilon L e}{2kd^3}.$$

En este documento, vamos a considerar una fuente de voltaje tipo DC-AC, $V(t)$ de la forma

$$V(t) = v_0 + \delta v(t), \quad (7)$$

con $v_0 \in \mathbb{R}^+$ (DC-fuente de voltaje directo) y $v(t) \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ de promedio cero. El voltaje V se asume no negativo, en consecuencia $\delta \in [0, -v_0/v_{\min}[$ en donde:

$$v_{\max} := \max_{t \in [0, T]} v(t), \quad v_{\min} := \min_{t \in [0, T]} v(t).$$

Entre los distintos fenómenos dinámicos que emergen frecuentemente en el estudio analítico, numérico y práctico en los dispositivos tipo MEMS queremos resaltar es el *retraso*, el cual puede ser inducido en el sistema por medio de controladores o simplemente desde su mismo diseño. A continuación vamos presentamos una breve introducción a este fenómeno en MEMS.

1-1-2. Efectos de un controlador retroalimentado

Los MEMS con retraso temporal aparecen frecuentemente en aplicaciones prácticas de ingeniería de control. En los actuadores electrostáticos estos fenómenos de retardo temporal son inherentes al dispositivo o puede ser inducido por diseño. Con el creciente propósito de mejorar el desempeño de estos dispositivos en sensibilidad y actuación la estabilidad del mismo juega un papel fundamental, pues de no ser tenido en cuenta, el comportamiento global del sistema puede llegar a degradarse hasta el efecto de inestabilidad lateral o equivalentemente hasta el efecto pull-in. Por lo que existe la necesidad de un control activo que mejore el desempeño y la estabilidad de los actuadores. Una de las técnicas para mejorar el desempeño de este tipo de dispositivos es el uso de controladores retroalimentados con retraso en el tiempo introducido por Pyragas [21], el cual lo utilizó para estabilizar soluciones periódicas en sistemas caóticos. La señal de salida de este tipo de controlador es un valor retrasado de la salida del sistema al que se le sustrae la salida actual del mismo (ver Figura 2).

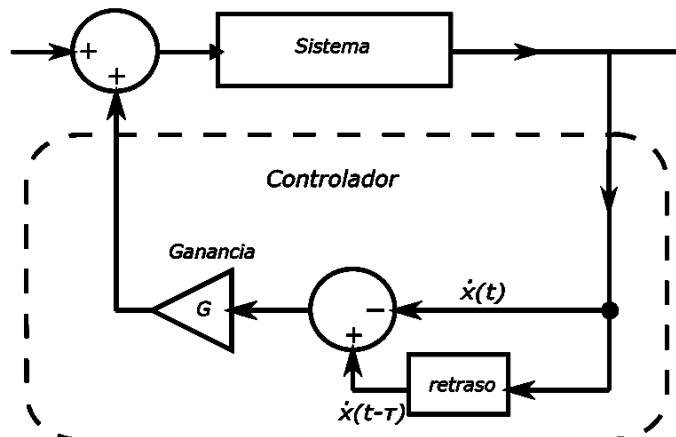


Figura 2. Esquema del controlador de velocidad retroalimentado.

Supongamos que queremos aplicar este controlador retro-alimentado con retraso $\tau \geq 0$ en la velocidad al actuador tipo peine (6) modificando la señal de entrada del voltaje, tal como sugiere el esquema de la figura anterior, es decir

$$V(t) \rightarrow V(t, \varphi(\dot{x}(t), \dot{x}_\tau(t))), \quad \text{con} \quad \varphi(\dot{x}(t), \dot{x}_\tau(t)) = G(\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}(t)), \quad G \in \mathbb{R}.$$

El parámetro G se identifica como la “ganancia”¹ del controlador. En este caso, la ecuación (6) queda en la forma:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x - u = \frac{4\beta V^2(t, \varphi(\dot{x}(t), \dot{x}_\tau(t)))x}{(1-x^2)^2}, \quad x \in]-1, 1[, \quad u \in [0, 1[, \quad (8)$$

la cual corresponde a una ecuación diferencial tipo Liénard con retraso temporal.

Este proyecto de grado considera el estudio analítico y numérico de la dinámica de la ecuación diferencial (8) y en particular la existencia y estabilidad de soluciones periódicas de signo constante por medio de métodos de continuación local, como por ejemplo una adecuada formulación del teorema de la función implícita en espacios de Banach (ver [1, 18, 14, 30]). De manera más precisa, se desea dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

- P1** ¿Existen soluciones periódicas con signo constante para (8) para pequeños valores del retardo τ ? De ser positiva la pregunta anterior ¿Qué tan grande puede ser el valor del retraso?.
- P2** ¿Qué condiciones sobre los parámetros de ganancia G y retardo τ garantizan la estabilidad de los estados de equilibrio de (8) cuando se asume una fuente de voltaje constante $V(t) = v_0$, $t \in \mathbb{R}$.

Si se asume una fuente de voltaje $V(t) = v_0 + \delta v(t)$, con $v(t)$ una función T -periódica, $v_0 = O(1)$, $\delta = O(\epsilon^3)$, con ϵ -pequeño, por medio de un análisis de perturbación con la técnica de escalas múltiples queremos dar respuesta a la siguiente pregunta

- P3** Dado un estado de equilibrio \hat{x} del modelo autónomo asociado a (8) y $y(t) = x(t) - \hat{x}$ una perturbación con $x(t)$ solución de (8) ¿Cuál es la respuesta dinámica del actuador (8) a pequeñas perturbaciones $y = O(\epsilon)$ de los estados de equilibrio cuando se asume una ganancia $G = O(\epsilon^2)$?

Hasta donde tenemos conocimiento, este tipo de preguntas para el actuador electrostático tipo Peine no han sido tratadas en trabajos previos.

Así pues, consideramos que dar respuesta a estas preguntas brindarán un conocimiento más profundo sobre la dinámica de los actuadores tipo Comb-drive finger en presencia de los efectos de retardo por medio de controladores retro alimentados. Un punto importante que resaltar sobre la ecuación (8) es que la presencia del retardo $\tau \geq 0$ marca una notable diferencial respecto a las técnicas existentes para la existencia y estabilidad de soluciones periódicas. Por ejemplo, para la existencia de soluciones periódicas en ecuaciones diferenciales con retardo, el método de súper y sub-soluciones clásico ya no funciona más, y no existe hasta donde sabemos una teoría que extienda a este método a ecuaciones con retraso. Por lo tanto, no podemos aplicar a la ecuación (8) las mismas ideas presentes por ejemplo en

¹El parámetro $|G|$ mide esencialmente el efecto del controlador en la dinámica del sistema a través de la medición de la diferencia entre dos valores de la velocidad en dos tiempos distintos.

[20, 22, 27] cuando $\tau > 0$ Así mismo, el estudio de la estabilidad de equilibrios y soluciones periódicas para ecuaciones tipo Liénard con retraso es un tema delicado que en general un estudio más profundo. Para una mejor lectura, hemos dividido el documento en la siguiente forma. En el capítulo 2 presentamos algunos apuntes sobre las técnicas matemáticas que hemos necesitado para dar alcance a los objetivos de este proyecto. Por ejemplo, ecuaciones diferenciales lineales con retraso, teorema de la función implícita en espacios de Banach y el método de perturbación de múltiples escalas. En el capítulo 3 se presentan y se demuestran los resultados principales de este proyecto de grado. De manera más precisa en la sección 3-1 se da respuesta a las preguntas **P2** y **P3** mientras que en la sección 3-2 se da respuesta a la pregunta **P1**. Finalmente, usando como referencia los valores numéricos de los parámetros de fabricación para el actuador electrostático tipo Nathanson (ver [17, 11]), en el Capítulo 4 por medio del software Python y el paquete `jitcdde`, presentamos una validación numérica de los resultados analíticos sobre la dinámica de la ecuación diferencial (8) demostrados en el Capítulo 3.

2. Marco teórico

En este capítulo presentamos algunas de las herramientas matemáticas necesarias para alcanzar los objetivos propuestos en este proyecto de grado. En particular, daremos una breve introducción a las ecuaciones diferenciales con retraso, y en mayor medida a los sistemas de ecuaciones autónomas con retraso, además del método de perturbación en ecuaciones diferenciales conocido como el método de múltiples escalas. De igual forma, presentamos brevemente uno de los más importantes teoremas de existencia de funciones conocido como el teorema de la función implícita, junto con su versión en espacios de Banach. Finalmente mostramos algunos de los resultados sobre la existencia de soluciones periódicas en el actuador electrostático tipo Nathanson y el actuador electrostático tipo peine.

2-1. Ecuaciones Diferenciales con Retraso

Las ecuaciones diferenciales con retraso Delay Differential Equation (DDE), son un tipo de ecuación diferencial funcional en la cual la derivada de la función desconocida en un momento determinado se da en términos de los valores de la función en momentos anteriores. Las DDE también se denominan sistemas de retardo de tiempo, ecuación diferencial retardada en el tiempo o ecuaciones de diferencia diferencial [2, 26]. Estas se han introducido en la teoría general de las ecuaciones diferenciales con el propósito de crear modelos más realistas desde muchos procesos que dependen de la historia pasada.

Surgen modelos con retrasos de estado naturalmente al construir interconexiones de retroalimentación de funciones de transferencia elementales con retrasos de entrada o salida. Es bien sabido que los argumentos retrasados pueden afectar profundamente el comportamiento de un sistema dinámico [2, 24, 26], es esta una de las razones por lo que las ecuaciones diferenciales con retraso son modelos básicos en la teoría de control, marco teórico en donde encuentra cabida este documento. La teoría de las ecuaciones diferenciales con retraso es muy amplia y sería muy pretencioso que en algunas páginas se muestre rigurosamente los resultados más fundamentales de tan interesante y hermosa teoría matemática. En nuestro primer acercamiento a este tipo de problemas presentaremos la que quizás sea la ecuación con retraso más simple

$$\dot{x}(t) = -rx(t - \tau). \quad (9)$$

con $r \in \mathbb{R}^+$ y $\tau > 0$. El signo negativo en la ecuación refleja una “realimentación negativa” en cada instante de tiempo. Por otro lado, en el caso límite $\tau = 0$ es bien conocido que todas las soluciones monótonas y dadas por $x(t) = ke^{-rt}$ con k una constante. En [26], se nos da una fórmula que determina la solución de (9) asumiendo previamente que

$$x(t) = 1, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (10)$$

Esto es, la función constante $x(t) = 1$ juega el papel de “condición inicial” en el marco de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Teorema 1: Ejercicio 2.1 del libro [26]. Considere la ecuación solución (9) y suponga que $x(t)$ es la solución que satisface la condición (10). Entonces, $x(t)$ esta dada por

$$x(t) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k r^k \frac{[t - (k-1)\tau]^k}{k!}, \quad (n-1)\tau \leq t < n\tau, \quad n \geq 1. \quad (11)$$

Demostración. Siguiendo los pasos presentes en [26], vemos que si $t \in [0, \tau]$, entonces $s = t - \tau \in [-\tau, 0]$. En consecuencia, por (10) se sigue que

$$\dot{x}(t) = -rx(t - \tau) = -r, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

De aquí un cálculo directo muestra que

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(m) dm = x(0) - r \int_0^t dm = 1 - rt, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Ahora observamos que en el intervalo $t \in [\tau, 2\tau]$ se tiene $s = t - \tau \in [0, \tau]$ y así

$$\dot{x}(t) = -rx(t - \tau) = -r(1 - r(t - \tau)), \quad \forall t \in [\tau, 2\tau].$$

De nuevo, una simple integración nos lleva a la conclusión

$$x(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^t x'(m) dm = x(\tau) - \int_{\tau}^t x(m - \tau) dm = 1 - r\tau - \int_{\tau}^t r(1 - r(m - \tau)) dm,$$

de donde

$$x(t) = 1 - r\tau - r(t - \tau) + \frac{r^2}{2}(t^2 - \tau^2) + r^2\tau(t - \tau) = 1 - rt + \frac{r^2}{2}(t - \tau)^2, \quad \forall t \in [\tau, 2\tau].$$

Para este paso debemos suponer que es cierta la fórmula propuesta en [26] (para el caso $r = 1$.) Por lo tanto, las soluciones de (9) están dadas por (11), más específicamente se debe suponer que las soluciones dadas por (11) son ciertas en un intervalo $t \in [n\tau, (n+1)\tau]$, obteniendo así

$$x(t) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k r^k \frac{[n\tau - (k-1)\tau]^k}{k!} - r \left(t - n\tau + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k r^k (m - k\tau)^{k+1}}{k! (k+1)} \Big|_{n\tau}^t \right),$$

$$x(t) = 1 - rt + \sum_{k=2}^n (-1)^k r^k \frac{[n\tau - (k-1)\tau]^k}{k!} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} r^{k+1} (m - k\tau)^{k+1}}{k! (k+1)!} \Big|_{n\tau}^t.$$

Un cálculo directo prueba lo siguiente

$$\sum_{k=2}^n (-1)^k r^k \frac{[n\tau - (k-1)\tau]^k}{k!} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} r^{j+1} \frac{[n\tau - j\tau]^{j+1}}{(j+1)!},$$

por lo tanto

$$x(t) = 1 - rt + \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} r^{j+1} \frac{[n\tau - j\tau]^{j+1}}{(j+1)!} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} r^{k+1} (m - k\tau)^{k+1}}{k! (k+1)} \Big|_{n\tau}^t,$$

$$x(t) = 1 - rt + \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} r^{j+1} \frac{[n\tau - j\tau]^{j+1}}{(j+1)!} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} r^{k+1}}{k!} \left[\frac{(t - k\tau)^{k+1}}{(k+1)} - \frac{(n\tau - k\tau)^{k+1}}{(k+1)} \right],$$

$$x(t) = 1 - rt + \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} r^{j+1} \frac{[n\tau - j\tau]^{j+1}}{(j+1)!} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} r^{k+1} \frac{(t - k\tau)^{k+1}}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} r^{k+1} \frac{(n\tau - k\tau)^{k+1}}{(k+1)!},$$

$$x(t) = 1 - rt + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} r^{k+1} \frac{(t - k\tau)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{(t - (\tilde{k}-1)\tau)^{\tilde{k}}}{\tilde{k}!}.$$

A partir de lo anterior se tiene

$$1 - r t + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} r^{k+1} \frac{(t - k\tau)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{(t - (\tilde{k}-1)\tau)^{\tilde{k}}}{\tilde{k}!} \implies 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k r^k \frac{[t - (k-1)\tau]^k}{k!}.$$

Esto completa la demostración. \square

Ejemplo 1: Visualización de las soluciones asociadas a (9) en el caso $r = 1$. Con el fin de graficar las soluciones de (9) a diferentes valores del retraso τ en un caso específico $r = 1$ utilizamos el comando `dde23` en el software `MATLAB` (se recomienda consultar [23] por más información). En las siguientes figuras evidenciamos el efecto de estas variaciones.

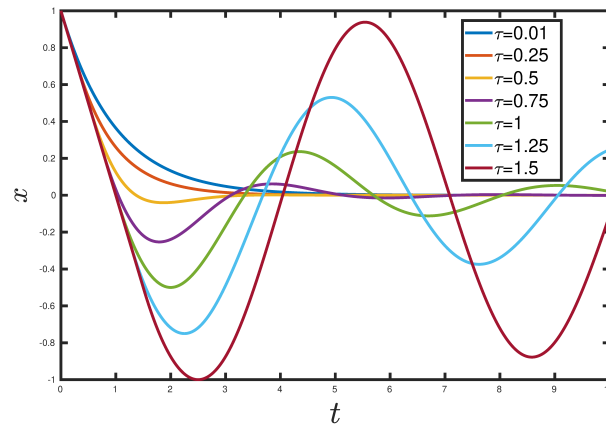


Figura 3. Soluciones de la ecuación diferencial con retraso $\dot{x}(t) = -x(t - \tau)$ para distintos valores del parámetro τ .

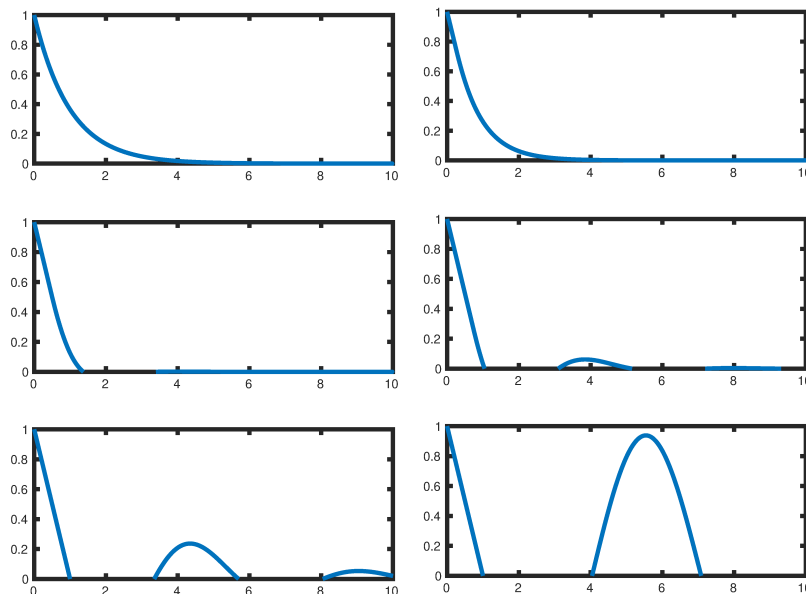


Figura 4. Vista individual de distintas soluciones de $\dot{x}(t) = -x(t - \tau)$ observadas en la Figura 3.

Note como en la Figura 3 para valores más grandes del retraso, las soluciones presentan un número mayor de oscilaciones. Llegados a este punto hemos evidenciado los efectos del retraso τ en la ecuación (9) en el caso $r = 1$, ahora nos ocupamos en como las condiciones históricas pueden alterar el comportamiento de las correspondientes soluciones, debido a que las ecuaciones diferenciales de retardo son sistemas donde la evolución de la solución depende no solo de su estado en el tiempo sino también del concepto que se denomina como función histórica $hist(t)$. En el caso anterior la función histórica era constante y correspondía a $hist(t) = 1$, esto se evidencia en el hecho de que al tiempo cero de las soluciones su valor correspondiente a 1 y seguido se comporta según el parámetro τ y la solución del sistema. Con el propósito de motivar al lector en esta interesante área de las ecuaciones diferenciales, sin entrar en los detalles analíticos y numéricos, nos preguntamos por los efectos dinámicos que tiene el considerar funciones históricas que dependan de la variable independiente t y como éstas alteran las soluciones del problema (9) descrito anteriormente.

Ejemplo 2: Influencia de la función histórica en las soluciones de (9) en el caso $r = 1$. Se procederá con un ejemplo que evidencie los cambios en nuestras soluciones. Proponemos las siguientes funciones históricas

$$hist_1(t) = e^{-t} - 1,$$

$$hist_2(t) = e^t - 1.$$

En la siguiente figura observamos como las soluciones se ven afectadas por esta nueva condición histórica.

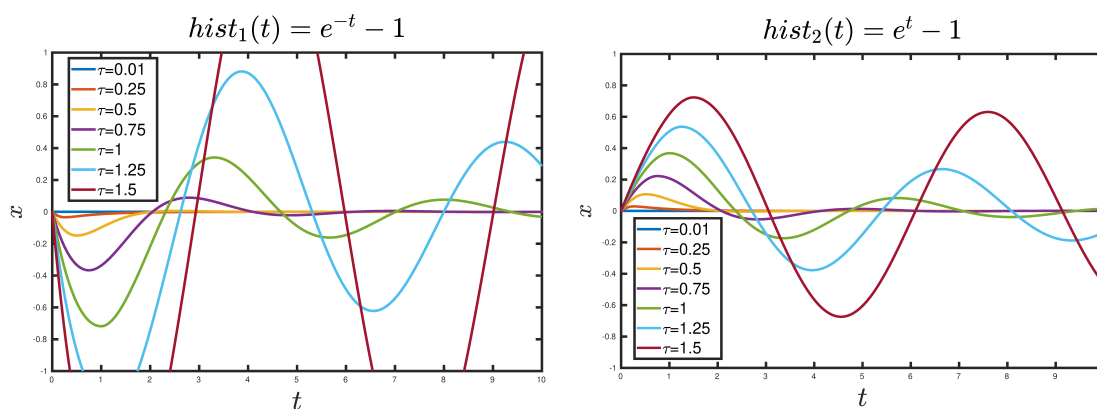


Figura 5. Visualización de las soluciones de (9) en el caso $r = 1$. A la derecha con la función histórica $hist_1(t)$ y a la izquierda con $hist_2(t)$.

Siguiendo lo dicho en [16], en el caso de una Ordinary Differential Equation (ODE) además de la ecuación se dan muchas condiciones iniciales dependiendo del orden de la ecuación y son de la forma: $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$, y así sucesivamente. Para una DDE, por otro lado, no es suficiente dar un conjunto de valores iniciales para la función y sus derivadas en t_0 , sino que se debe dar un conjunto de funciones para proporcionar los valores históricos para $t_0 - \max(\tau) \leq t \leq t_0$. Cuántas y qué funciones históricas dar para obtener una solución única depende del orden de la ecuación: para una ecuación de primer orden solo se necesita una $hist(t)$ para dar los valores históricos de x . Para una ecuación de segundo orden debemos dar un $hist_1(t)$ para dar los valores históricos de x y otro $hist_2(t)$ para dar los valores históricos de x' .

2-2. Sobre sistemas lineales autónomos con retraso

En el estudio analítico de ecuaciones diferenciales no lineales (con o sin retraso), una de las técnicas que en general resulta muy útil a la hora de analizar la dinámica local del sistema cerca del punto de equilibrio es el conocido *método de diagonalización*, el cual es un insumo clave para el análisis de sistemas no lineales en la determinación de la estabilidad local de un equilibrio. El enfoque clásico para determinar la estabilidad local de un equilibrio por medio del método de diagonalización, consiste en estudiar un sistema lineal de ecuaciones diferenciales deducido a partir de un proceso de linealización local del campo vectorial del sistema de ecuaciones diferenciales original, en una pequeña vecindad del punto de equilibrio en cuestión. Posteriormente, se determinan las tasas exponenciales de crecimiento y decaimiento del sistema lineal asociado (ver [26]).

A continuación presentamos algunos aspectos sobre el método de diagonalización en el marco de los sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos con retraso. Con este objetivo en mente, considere el espacio vectorial normado $C = C([-τ, 0], \mathbb{C})$ en donde

$$C = \{\phi : [-τ, 0] \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad t \mapsto \phi(t), \quad \phi \text{ una función continua}\}.$$

Un operador $L : C \rightarrow \mathbb{C}$ actuando sobre C , se dice que es lineal si satisface

$$L(a\phi + b\psi) = aL(\phi) + bL(\psi),$$

para todo $a, b \in \mathbb{C}$, $\phi, \psi \in C$. Más aún, es acotado si existe una constante $K > 0$ tal que

$$|L(\phi)| \leq K\|\phi\|, \quad \phi \in C,$$

$|\cdot|$ es una norma en \mathbb{C}^n y $\|\cdot\|$ es una norma en C . En adelante, denotamos el estado de un sistema dinámico (ecuación diferencial) sobre C en el tiempo t como un elemento x_t en C tal que

$$x_t(s) := x(t+s), \quad -\tau \leq s \leq 0.$$

De esta forma, podemos ver la trayectoria de una solución de un sistema dinámico con retraso con la gráfica de la curva $t \rightarrow x_t$ en C . Ahora, considere la ecuación diferencial lineal con retardo

$$\dot{x}(t) = L(x_t), \tag{12}$$

con L un operador lineal y acotado sobre C . En particular se eligen $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ tales que

$$L(\phi) = A\phi(0) + B\phi(-\tau). \tag{13}$$

Note que la desigualdad

$$|L(\phi)| \leq |A|\|\phi(0)\| + |B|\|\phi(-\tau)\| \leq (|A| + |B|)\|\phi\|,$$

nos brinda una cota para el nuestro operador L dado en (13). Por lo tanto,

$$\dot{x}(t) = L(x_t) \Leftrightarrow \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau). \tag{14}$$

Lo anterior se sigue a partir de la definición misma de L y x_t , en efecto

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= L(x_t) = Ax_t(0) + Bx_t(-\tau), \\ &= Ax(t) + Bx(t-\tau). \end{aligned}$$

La ecuación (14) es un sistema lineal y autónomo de ecuaciones diferenciales con retraso, para el cual se asume que su dato inicial es una función en C , es decir, $x(t) = x_0(t)$ para $t \in [-\tau, 0]$ con $x_0 \in C$.

2-2-1. La ecuación característica

Al igual que en ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales del tipo $\dot{x} = \mathcal{A}x$, con $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, la búsqueda de soluciones para (12) inicia bajo el supuesto de que tienen la forma

$$x(t) = e^{\lambda t} v, \quad v \neq 0_{\mathbb{C}^n},$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$. En este punto es conveniente definir la función $\exp_{\lambda} : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{C}^n$, $s \rightarrow \exp_{\lambda}(s) = e^{\lambda s}$. En consecuencia

$$x_t(s) = x(t+s) = e^{\lambda(t+s)} v = e^{\lambda t} \exp_{\lambda}(s) v.$$

Ahora bien, para que $x(t)$ sea una solución de (12) se debe cumplir

$$\dot{x}(t) = L(x_t) \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} L(\exp_{\lambda} v) \Leftrightarrow \lambda v = L(\exp_{\lambda} v).$$

Escribimos $v = \sum_j v_j e_j$ en donde $\{e_j\}_j$ es la base estándar para \mathbb{C}^n , entonces $L(\exp_{\lambda} v) = \sum_j v_j L(\exp_{\lambda} e_j)$. Se define L_{λ} como la matriz de dimensión $n \times n$ dada por

$$L_{\lambda} = [L \exp_{\lambda}(e_1) | L \exp_{\lambda}(e_2) | \cdots | L \exp_{\lambda}(e_n)],$$

por lo tanto,

$$L(\exp_{\lambda} v) = \sum_j v_j L(\exp_{\lambda} e_j) \Leftrightarrow L(\exp_{\lambda} v) = L_{\lambda} v.$$

Lo anterior implica la ecuación vectorial $\lambda v = L_{\lambda} v$. Como deseamos obtener soluciones no triviales de (12) (hemos supuesto $v \neq 0_{\mathbb{C}^n}$), se sigue que λ satisface la ecuación

$$\lambda v - L_{\lambda} v = 0_{\mathbb{C}^n} \Leftrightarrow \det(\lambda I - L_{\lambda}) = 0_{\mathbb{R}}, \quad (15)$$

con $\det(\cdot)$ denota la función determinante. Así pues, v se encuentra en el kernel del operador lineal $\lambda I - L_{\lambda}$ con I el operador identidad. Al valor $\lambda \in \mathbb{C}$ se le suele llamar *multiplicador característico* del operador L_{λ} mientras que a la ecuación (15) se le llama *ecuación característica* del operador L_{λ} . En el caso particular en que el operador L esta dado (13) o equivalentemente, en el caso en que tenemos una ecuación lineal con retraso de la forma (14), la ecuación característica queda en la forma

$$\det(\lambda I - A - e^{\lambda \tau} B) = 0_{\mathbb{R}}. \quad (16)$$

Más aún, si $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, si $n = 2$ la ecuación (16) puede ser expresada como

$$p_{\tau}(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) + e^{-2\tau\lambda} \det(B) + e^{-\tau\lambda} [c - \lambda(tr(B))], \quad (17)$$

en donde $tr(\cdot)$ denota la función traza y c es el número real

$$c = \det(a^1 | b^2) + \det(b^1 | a^2),$$

con $(a^1 | b^2)$ es la matriz formada por la primera columna de A y la segunda columna de B (análogamente se define $(b^1 | a^2)$). El siguiente resultado brinda algunas de las propiedades más notables de la función $h(\lambda) := \det(\lambda I - L_{\lambda})$ derivadas de la teoría básica de funciones analíticas.

Lema 1. La función $h(\lambda) := \det(\lambda I - L_\lambda)$ es una función entera, además

- i) h tiene ceros de orden finito.
- ii) h tiene un conjunto numerable de ceros.
- iii) El conjunto de ceros de h no admite puntos de acumulación.

Demostración. Se remite al lector a consultar la demostración en el Lema 4.1 en [26]. □

Adicionalmente, sobre el sistema lineal con retraso

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BX(t - \tau),$$

y su contra parte sin retraso

$$\dot{X}(t) = (A + B)X(t),$$

con polinomios característicos

$$P_\tau(\lambda) = \det(\lambda I - A - e^{-\lambda\tau} B) \quad \text{y} \quad P_0(\lambda) = \det(\lambda I - (A + B)),$$

respectivamente, se tiene el siguiente resultado cuya demostración se encuentra en [26] capítulo 4.

Teorema 2. Sean z_1, z_2, \dots, z_k valores propios distintos de la matriz $A + B$. Sea $\epsilon > 0$, y $m \in \mathbb{R}$ que cumple $m < \min_i \operatorname{Re}(z_i)$. Entonces existe $r_0 > 0$ tal que si $\hat{\tau} \in [0, \tau_0]$ y $P_{\hat{\tau}}(z) = 0$ para algún z , entonces $\operatorname{Re}(z) < m$ o bien $|z - z_i| < \epsilon$ para algún i .

El Teorema 2 establece que para valores suficientemente pequeños de τ , las raíces de $P_\tau(\lambda)$ están o bien muy cerca de los valores propios de $A + B$ (los multiplicadores característicos de $P_0(\lambda)$) o tener partes reales más negativas que cualquier multiplicador característico de $P_0(\lambda)$. Cabe mencionar que este resultado nos será útil al momento de establecer la estabilidad de posibles soluciones periódicas para el actuador (43) por medio de la información que se conozca sobre soluciones periódicas en el caso sin retraso.

2-2-2. Sobre el principio de estabilidad linealizada

Sea $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ y considere la ecuación diferencial funcional no lineal

$$\dot{x}(t) = f(x_t). \tag{18}$$

Diremos que la función constante $x(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ es una solución de equilibrio para (18) si y solo si $f(\hat{x}_0) = 0$, en donde $\hat{x}_0 \in C$ es la función constante $\hat{x}_0(t) = x_0$, $t \in \mathbb{R}$. Si $x(t)$ es una solución de (18) y

$$x(t) = x_0 + y(t),$$

entonces $y(t)$ satisface

$$\dot{y}(t) = f(\hat{x}_0 + y(t)). \tag{19}$$

Con el propósito de comprender el comportamiento de las soluciones de (18) que inician cerca de \hat{x}_0 , es suficiente con entender el comportamiento de (19) para soluciones que inician cerca de $y = 0$. Supongamos entonces

$$f(\hat{x}_0 + \phi) = \mathcal{L}(\phi) + g(\phi), \quad \phi \in C, \quad (20)$$

en donde $\mathcal{L} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ un operador lineal y acotado y $g : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ se identifica como los “términos orden superior” en el sentido de que

$$\forall \mu > 0 \mid \exists \delta > 0 : \text{ Si } \|\phi\| \leq \delta \implies |g(\phi)| \leq \mu \|\phi\| \iff \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{g(\phi)}{\|\phi\|} = 0_{\mathbb{R}}.$$

Al sistema lineal

$$\dot{z}(t) = \mathcal{L}(z_t), \quad (21)$$

se le conoce como el sistema linealizado (o sistema variacional) alrededor del equilibrio \hat{x}_0 de la ecuación diferencial funcional no lineal (18). El siguiente teorema, (ver [7, 12, 26]) nos habla de la estabilidad del equilibrio \hat{x}_0 en términos de los ceros de la correspondiente ecuación característica del sistema lineal (21).

Teorema 3. Sea $\Delta(\lambda) := \det(\lambda I - L_\lambda)$ y considere la ecuación característica $\Delta(\lambda) = 0$ correspondiente al sistema lineal (21). Suponga que

$$-\sigma := \max_{\Delta(\lambda)=0} \operatorname{Re}(\lambda) < 0.$$

Entonces \hat{x}_0 es localmente asintóticamente estable para (18). De hecho se verifica que

- Existe $K > 0$ tal que

$$\|z(t, \phi)\| \leq K e^{-\sigma t} \|\phi\|, \quad t \geq 0, \quad \phi \in C,$$

con $z(t, \phi)$ una solución de (21) $\dot{z}(t) = L(z_t)$ con condición inicial $z_0 = \phi \in C$.

- Existe $b > 0$ tal que

$$\text{si } \|\phi - \hat{x}_0\| < b \text{ entonces } \|x_t(\phi) - \hat{x}_0\| \leq K \|\phi - \hat{x}_0\| e^{-\sigma t/2},$$

para $t > 0$, con $x(t)$ solución de (18) con condición inicial $x_0 = \phi \in C$.

Si por el contrario $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ para algún λ tal que $\Delta(\lambda) = 0$, entonces \hat{x}_0 es inestable.

Ahora consideramos el caso particular

$$\dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau)), \quad (22)$$

en donde $F : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto. Si $F(x_0, x_0) = 0$ para algún $x_0 \in D$, entonces $x(t) = x_0$, $t \in \mathbb{R}$ es una solución de equilibrio para (22). Si se define la función $f(\phi) = F(\phi(0), \phi(-\tau))$, entonces la ecuación (20) se reescribe en la forma

$$\begin{aligned} f(\hat{x}_0 + \phi) &= F(\hat{x}_0 + \phi(0), \hat{x}_0 + \phi(-\tau)) \\ &= F(\hat{x}_0, \hat{x}_0) + D_x F(\hat{x}_0, \hat{x}_0) \phi(0) + D_y F(\hat{x}_0, \hat{x}_0) \phi(-\tau) + \dots \\ &= A \phi(0) + B \phi(-\tau) + J(\phi(0), \phi(-\tau)), \end{aligned}$$

en donde $A = D_x F(x_0, x_0)$, $B = D_y F(x_0, x_0)$ y $J: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa los “términos de orden superior” para F , con

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{J(\phi(0), \phi(-\tau))}{\|\phi\|} = 0.$$

De esta forma el sistema linealizado alrededor del equilibrio $x = \hat{x}_0$ para (22) esta dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau).$$

Veamos un ejemplo de cómo se calcula el sistema linealizado correspondiente a un punto de equilibrio para un sistema no lineal autónomo con retraso.

Ejemplo 3. Se considera el modelo del quimiostato con retraso (ver [26])

$$\left. \begin{aligned} \dot{s}(t) &= 1 - s(t) - f(s(t))x(t) \\ \dot{x}(t) &= e^{-\tau} f(s(t - \tau))x(t - \tau) - x(t) \end{aligned} \right\},$$

con $f(s) = \frac{ms}{a+s}$, $m, a > 0$ y $x, s > 0$. Los equilibrios (s_0, x_0) del sistema son las soluciones del sistema

$$\left. \begin{aligned} 1 - s_0 - f(s_0)x_0 &= 0 \\ (e^{-\tau} f(s_0) - 1)x_0 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

el cual admite siempre la solución no negativa $(1, 0)$ (conocida como “washout state solution”). De otro lado, un segundo equilibrio (s_0^*, x_0^*) (conocido como “survival state solution”) emerge si

$$(e^{-\tau} f(s_0^*) - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(s_0^*) = e^{\tau} > 1.$$

Por lo tanto

$$1 - s_0^* = e^{\tau} x_0^* \quad \Leftrightarrow \quad x_0^* = (1 - s_0^*)e^{-\tau}.$$

Puesto que $f(s)$ es estrictamente creciente, entonces $0 < x_0^*$ si se satisface la condición

$$f(s_0^*) < f(1) = \frac{m}{a+1} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\tau} < \frac{m}{a+1}.$$

De otro lado, el sistema linealizado en un punto de equilibrio (s_0, x_0) esta dado por

$$\dot{z} = Az(t) + Bz(t - \tau),$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 - x_0 f'(s_0) & -f(s_0) \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{max_0}{(a+s_0)^2} & -\frac{ms}{a+s_0} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f'(s_0)x_0 & f(s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{max_0}{(a+s_0)^2} & \frac{ms}{a+s_0} \end{pmatrix},$$

más aún, el polinomio característico asociado queda en la forma

$$\begin{aligned} p_{\tau}(\lambda) &= (\lambda + 1) \left(\lambda + 1 + x_0 f'(s_0) e^{-\lambda\tau} - f(s_0) e^{-(\lambda+1)\tau} \right), \\ &= (\lambda + 1) \left(\lambda + 1 + \frac{max_0}{(a+s_0)^2} e^{-\lambda\tau} - \frac{ms_0}{a+s_0} e^{-(\lambda+1)\tau} \right), \end{aligned}$$

en $n + m$ variables x_1, x_2, \dots, x_n y y_1, y_2, \dots, y_m , queremos encontrar condiciones suficientes que nos permitan resolver el sistema para x_1, x_2, \dots, x_n en términos de y_1, y_2, \dots, y_m .

A continuación presentamos una versión del teorema de la función implícita adaptada al sistema de ecuaciones anterior.

Teorema 4: Teorema de la Función Implícita (T.F.I). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+n}$ y considere la función

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \rightarrow F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y)),$$

con $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ y $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Suponga que $F(x_0, y_0) = 0_{\mathbb{R}^n}$ para algún punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ en donde $(x_0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$, es decir,

$$f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = \dots = f_n(x_0, y_0) = 0.$$

Suponga que se satisfacen las siguientes condiciones

- a. Las funciones f_1, f_2, \dots, f_n son funciones continuamente diferenciables en una vecindad de (x_0, y_0) , es decir, para todo $(x, y) \in W$ con W alguna vecindad de (x_0, y_0) , las derivadas parciales

$$\partial_{x_s} f_i(x, y), \quad i = 1, \dots, n, s = 1, \dots, m, \quad \partial_{y_j} f_i(x, y) \quad i, j = 1, \dots, n,$$

existen y son continuas.

- La matriz $n \times n$ de derivadas parciales

$$D_y F(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} f_1(x, y) & \partial_{y_2} f_1(x, y) & \dots & \partial_{y_n} f_1(x, y) \\ \partial_{y_1} f_2(x, y) & \partial_{y_2} f_2(x, y) & \dots & \partial_{y_n} f_2(x, y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{y_1} f_n(x, y) & \partial_{y_2} f_n(x, y) & \dots & \partial_{y_n} f_n(x, y) \end{pmatrix},$$

es no singular en (x_0, y_0) , es decir $\det(D_y F(x_0, y_0)) \neq 0$. ($D_y F(x_0, y_0)$ es un isomorfismo).

Entonces, existe una vecindad V del punto $y_0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ en \mathbb{R}^n , una vecindad U del punto $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ en \mathbb{R}^m y una única función $\varphi : U \rightarrow V$ tal que

- $\varphi(x_0) = y_0$ y $F(x, \varphi(x)) = 0_{\mathbb{R}^n}$ para todo $x \in U$, es decir

$$f_1(x, \varphi(x)) = f_2(x, \varphi(x)) = \dots = f_n(x, \varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in U.$$

- $\varphi = \varphi(x)$ es una función continuamente derivable, más aún, φ satisface el problema de valor inicial

$$D\varphi(x) = -\left[D_y F(x, \varphi(x)) \right]^{-1} D_x F(x, \varphi(x)), \quad \text{con } \varphi(x_0) = y_0,$$

para todo $x \in U$.

Demostración. Se remite al lector a consultar la demostración en [14].

□

Ejemplo 4. Veamos una simple aplicación del teorema de la función implícita para el caso $n = m = 2$. Considere la ecuación $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (0, 0)$ con

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x_1^2 + 2x_2 + y_1^2 + 2y_2 - 8, \\ f_2(x, y) &= x_1 - x_2^2 + y_1 - y_2^2 + 3. \end{aligned} \tag{23}$$

Se comprueba directamente que $F(x_0, y_0) = 0$ con $x_0 = (1, 1)$ y $y_0 = (1, 2)$. De otro lado,

$$D_x F(x, y) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2 \\ 1 & -2x_2 \end{pmatrix}, \quad D_y F(x, y) = \begin{pmatrix} 2y_1 & 2 \\ 1 & -2y_2 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad D_y F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dado que $\det(D_y F(x_0, y_0)) \neq 0$, por el teorema de la función implícita (Teorema 4) para $x = (x_1, x_2)$ en una vecindad U de $(1, 1)$, existe una función $\varphi : U \rightarrow V$ tal que

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow y_1 = \varphi_1(x_1, x_2), \quad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2), \quad \text{con } (x_1, x_2) \in U.$$

Más aún, φ es derivable y satisface el problema de valor inicial

$$D\varphi(x) = -\left[D_y F(x, \varphi(x))\right]^{-1} D_x F(x, \varphi(x)), \quad \text{con } \varphi(x_0) = y_0,$$

esto es

$$D\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\varphi_1(x_1, x_2)\varphi_2(x_1, x_2) - 1} \begin{pmatrix} \varphi_2(x_1, x_2) & 1 \\ 1/2 & -\varphi_1(x_1, x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 & 2 \\ 1 & -2x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \varphi(1, 1) = (1, 2).$$

2-3-1. Teorema de la Función Implícita en Espacios de Banach

Antes de dar paso a una extensión del teorema de la función implícita en espacios de Banach (espacio vectorial normado el cual es completo) presentamos algunos brevemente algunos conceptos fundamentales del análisis matemático.

Un **espacio normado** es un par $(E, \|\cdot\|_E)$ en donde E es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_E$ es una norma en E .¹ Todo espacio normado $(E, \|\cdot\|_E)$ es un **espacio métrico** (E, d) con la función distancia $d := \|x - y\|_E$ con $x, y \in E$. Cuando la función distancia d es completa (esto es, toda sucesión de Cauchy en (E, d) es convergente en (E, d)) se dice que $\|\cdot\|_E$ es completa y que $(E, \|\cdot\|_E)$ es un **espacio de Banach**.

Si E, W son espacios normados y $L : E \rightarrow W$ es un operador lineal, se dice que L es un **homomorfismo** entre E y W si L es una aplicación continua y abierta de E sobre su imagen $L(E) \subset W$, esto es, por un lado, $L^{-1}(V)$ es un abierto en E para todo abierto V de $T(E)$ y por otro lado, $L(U)$ es abierto en $L(E)$ para todo abierto U en E . Un **isomorfismo** entre dos espacios normados E y W es una aplicación lineal y biyectiva $L : E \rightarrow W$ tal que L y L^{-1} son continuas, es decir, L es una biyección que conserva tanto la estructura lineal como topológica de los espacios normados en consideración. Por lo tanto, los isomorfismos de espacios normados no son más que los homomorfismos biyectivos.

¹Cuando no haya riesgo de confusión, se omitirá la segunda componente del par.

Teorema 5: Teorema de la Función Implícita en Espacios de Banach. Sean X, Y y Z espacios de Banach, y sean $U \subset X$, $V \subset Y$ conjuntos abiertos y una función $f : U \times V \rightarrow Z$ de clase C^k . Además suponga que $f(x_0, y_0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) : Y \rightarrow Z$ es un isomorfismo. Entonces existe una vecindad U_0 de x_0 y una única función denominada ϕ de clase C^k , la cual cumple que:

i)

$$\phi(x_0) = y_0 \quad y \quad f(x, \phi(x)) = 0, \quad \forall x \in U_0.$$

ii) Para cada $x \in U_0$, se satisface

$$D\phi(x) = - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) \right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x)) \right).$$

Demostración. Procedemos a presentar una prueba del teorema anteriormente descrito, esta prueba es descrita en [1]. Definimos la función $g : U \times V \rightarrow Z$ dada por:

$$g(x, y) := y - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} f(x, y).$$

Entonces, para cada x , las soluciones de la ecuación $f(x, y) = 0$ son exactamente los puntos fijos de $g(x, \cdot)$. Se observa que g es una función de clase C^k y $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ entonces reduciendo U y V si es necesario podemos suponer que $\|\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\| \leq \alpha < 1$ para todo $(x, y) \in U \times V$.

Sea $c = \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)^{-1} \right\|$, fijamos $\epsilon < 1/c$, y sea

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + R(x, y),$$

seguidamente, fijamos $\delta_x > 0$ y $\delta_y > 0$ tales que $B_{\delta_x}(x_0) \times \overline{B_{\delta_y}(y_0)} \subset U \times Y$ y

$$\|R(x, y)\| \leq \epsilon (\|x - x_0\| + \|y - y_0\|),$$

para $\|x - x_0\| < \delta_x$ y $\|y - y_0\| < \delta_y$. Entonces:

$$\begin{aligned} \|g(x, y) - g(x_0, y_0)\| &= \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + R(x, y) \right) \right\| \\ &\leq ck\|x - x_0\| + c\epsilon(\|x - x_0\| + \|y - y_0\|), \end{aligned}$$

donde $k = \left\| \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \right\|$. Haciendo δ_x más pequeño si es necesario, podemos suponer que $c(k + \epsilon)\delta_x \leq (1 - c\epsilon)\delta_y$. Así, dado que $g(x_0, y_0) = y_0$, se sigue que $g(B_{\delta_x}(x_0) \times \overline{B_{\delta_y}(y_0)}) \subset \overline{B_{\delta_y}(y_0)}$. Es más, como $\|\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\| \leq \alpha < 1$, concluimos que g es una contracción uniforme y, por lo tanto, existe una única función continua $\phi : B_{\delta_x}(x_0) \rightarrow B_{\delta_y}(y_0)$ tal que $\phi(x) = g(x, \phi(x))$ para todo x . Obviamente, $\phi(x_0) = y_0$. Finalmente, la regularidad de la función $\phi(x)$ se desprende del Lema I en el Apéndice, de donde se deduce

$$D\phi(x) = - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) \right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x)) \right), \quad \forall x \in B_{\delta_x}(x_0).$$

□

Nos enfocamos ahora en presentar dos importantes teoremas del análisis funcional que junto con el teorema de la función implícita en espacios de Banach (Teorema 5) darán paso a una estrategia para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación **PI** sobre la existencia de soluciones periódicas para la ecuación (8).

En este punto es conveniente resaltar que una de las primeras consecuencias de la teoría de isomorfismos en espacios normados, nos dice que si E y W espacios normados y $L : E \rightarrow W$ es un operador lineal que satisface $L(E) = W$, entonces L es un homomorfismo sobreyectivo si, y solo si, L es una aplicación abierta. Este importante resultado es directo cuando los espacios normados son en particular espacios de Banach, dan cabida a lo que se conoce como el *teorema de la aplicación abierta* o bien el *teorema de Banach-Schauder*.

Teorema 6: Teorema de la aplicación abierta. *Sean E y W espacios de Banach y $L : E \rightarrow W$ un operador lineal, continuo y sobreyectivo. Entonces L es una aplicación abierta.*

Como caso particular del Teorema 6 obtenemos

Corolario 1: Isomorfismo de espacios de Banach. *Sean E y W espacios de Banach y $L : E \rightarrow W$ un operador lineal, continuo y biyectivo. Entonces L^{-1} es continuo. Por lo tanto, L es un isomorfismo entre espacios de Banach.*

Finalmente, presentamos una versión adaptada de otro importante resultado del análisis matemático aplicado a sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos.

Teorema 7: Alternativa de Fredholm. *Considere el sistema lineal de ecuaciones*

$$\dot{X} = A(t)X + R(t), \tag{24}$$

con $A(t) \in \mathbb{M}_{m \times m}(\mathbb{C})$ y $R(t) \in \mathbb{R}^m$ ambas funciones continuas y T -periódicas.

1. Si la ecuación homogénea $\dot{X} = A(t)X$ no admite soluciones T -periódicas no triviales entonces existe una única solución T -periódica de (24) para toda función $R = R(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$.
2. Si la ecuación homogénea admite soluciones T -periódicas no triviales entonces (24) admite soluciones T -periódicas si y solo si

$$\int_0^T \langle R(t), Y(t) \rangle dt = 0,$$

para toda solución T -periódica $Y(t)$ de la ecuación adjunta $\dot{Y} = -A^* Y$, en donde $A^* = \overline{A^{tr}}$ es la matriz adjunta de A y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno en \mathbb{R}^m .

Como el lector bien puede imaginar. Las demostraciones del Teorema 6 y el Teorema 7 requieren varias líneas de texto. Puesto que el propósito fundamental de este documento no abarca el adentramos en los detalles propios del análisis matemático necesarios para tal fin, invitamos al lector interesado en pruebas rigurosas consultar en [30].

2-4. Método de perturbación. Múltiples escalas

Dada una ecuación diferencial (o bien por ejemplo una ecuación algebraica) la cual admita solución, en general es poco usual determinar una expresión analítica y exacta de la misma. Esta generalizada dificultad da paso a lo que actualmente se conocen como los *métodos de perturbación*. Un método de perturbación tiene como propósito fundamental el determinar una aproximación analítica de una solución a una ecuación (diferencial, algebraica...) cuya expresión explícita no se tiene.

El conjunto de problemas donde los métodos de perturbación son aplicables contempla una familia de problemas uno-paramétricos \mathcal{P}_ϵ en donde el parámetro satisface $\epsilon \ll 1$ y un problema inicial \mathcal{P}_0 para el cual se tiene una solución conocida. La idea fundamental del método es construir soluciones para \mathcal{P}_ϵ las cuáles resultan como “pequeñas correcciones” a la solución conocida de \mathcal{P}_0 . Su único objetivo es calcular explícitamente dichas correcciones y asegurarse de que la primera corrección sea pequeña con respecto a la solución elegida \mathcal{P}_0 , y que la segunda corrección sea pequeña con respecto la primera y así sucesivamente, siempre que $\epsilon \rightarrow 0$.

2-4-1. Sucesiones asintóticas y series

Cuando se utilizan métodos de perturbación, una de las tareas principales es analizar el comportamiento de funciones desconocidas $f(\epsilon)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Una forma de hacer esto, es comparar la función $f(\epsilon)$ con una o varias funciones conocidas cuando ϵ se aproxima a cero.

Definición 1: “O”-grande, “o”-pequeña. Sea $f(\epsilon)$ una función dependiente de ϵ . Entonces

i)

$$f(\epsilon) = O(g(\epsilon)) \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\epsilon)}{g(\epsilon)} \right| \neq 0.$$

ii)

$$f(\epsilon) = o(g(\epsilon)) \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\epsilon)}{g(\epsilon)} \right| = 0.$$

Por lo tanto, $f(\epsilon) = O(g(\epsilon))$ significa que $f(\epsilon)$ y $g(\epsilon)$ “tienen el mismo tamaño” cuando ϵ se aproxima a cero, mientras que $f(\epsilon) = o(g(\epsilon))$ significa que $f(\epsilon)$ es mucho más pequeño que $g(\epsilon)$ cuando ϵ se aproxima a cero.

Ejemplo 5. Los siguientes ejemplos ilustran las anteriores definiciones.

$$1. \quad \text{sen}(\epsilon) = O(\epsilon) \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\text{sen}(\epsilon)}{\epsilon} \right| = 1 \neq 0.$$

$$2. \quad \ln(\epsilon) = o(\epsilon^{-1}) \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\ln(\epsilon)}{\epsilon^{-1}} \right| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon = 0.$$

Definición 2: Sucesión asintótica. Diremos que una sucesión $(\delta_n(\epsilon))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión asintótica si satisface la condición

$$\delta_{n+1}(\epsilon) = o(\delta_n(\epsilon)), \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Las sucesiones $(\epsilon^n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(\text{sen}(\epsilon^n))_{n \in \mathbb{N}}$ son ejemplos de sucesión asintóticas.

Definición 3: Expansión asintótica. Sea $(\delta_n(\epsilon))_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión asintótica. Entonces, una serie formal

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_n(\epsilon),$$

es una expansión asintótica de la función $f(\epsilon)$ cuando ϵ se aproxima a cero si

$$f(\epsilon) - \sum_{n=1}^N a_n \delta_n(\epsilon) = o(\delta_N(\epsilon)), \quad \text{siempre que } \epsilon \rightarrow 0.$$

De la definición de expansión asintótica se deduce que para $N \geq 1$ se cumple

$$a_N = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\epsilon) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \delta_n(\epsilon)}{\delta_N(\epsilon)} \right|.$$

Si la serie formal $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_n(\epsilon)$, es una expansión asintótica de $f(\epsilon)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$, se denota lo anterior en la forma $f(\epsilon) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_n(\epsilon)$ si $\epsilon \rightarrow 0$. Además, en la definición de expansión asintótica, no requiere que $f(\epsilon)$ sea derivable en $\epsilon = 0$ y más aún, la expansión asintótica de una función no es única y depende de la sucesión asintótica que se elige usar.

Ejemplo 6. Considere la función $f(\epsilon) = \text{sen}(3\epsilon)$ y las sucesiones asintóticas $(\epsilon^n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(\ln(1 + \epsilon^n))_{n \in \mathbb{N}}$

Se comprueba directamente que

$$\text{sen}(3\epsilon) \sim 3\epsilon - \frac{9}{2}\epsilon^3 + \frac{81}{4}\epsilon^5 + \dots, \quad \text{al igual que} \quad \text{sen}(3\epsilon) \sim 3\ln(1 + \epsilon) + \frac{3}{2}\ln(1 + \epsilon^2) - \frac{11}{2}\ln(1 + \epsilon^3) + \dots.$$

2-4-2. Expansión asintótica para soluciones ecuaciones diferenciales

Quizás la mejor forma de mostrar como actúa el método de perturbación en la búsqueda de soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales, sea por medio de un ejemplo en donde se muestre paso a paso las ideas fundamentales del método y las dificultades que usualmente aparecen al aplicarlo.

Ejemplo 7. Sea $\epsilon \ll 1$ y considere el siguiente problema de valor inicial (nuestra familia de problemas perturbados)

$$\ddot{y} + \epsilon \dot{y} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad (\mathcal{P}_\epsilon)$$

con $y = y(t)$, $t > 0$. Note que la ecuación diferencial representa la dinámica de un oscilador lineal con pequeño amortiguamiento. El problema no perturbado (\mathcal{P}_0), esta dado por

$$\ddot{y} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad (\mathcal{P}_0)$$

cuya solución general está dada por

$$\begin{aligned} y_0(t) &= A_0 \exp\{it\} + A_0^* \exp\{-it\}, \\ &= A_0 \exp\{it\} + (*), \end{aligned}$$

en donde z^* denota el conjugado de $z \in \mathbb{C}$ y $z + (*)$ significa $z + z^*$. De las condiciones iniciales se deduce que

$$y_0(t) = \frac{1}{2} \exp\{it\} + (*).$$

Ahora bien, queremos una solución de (\mathcal{P}_ϵ) a partir de la solución $y_0(t)$. La solución que buscamos ha de ser una expansión de perturbación para $y_0(t)$ en la forma

$$y(t, \epsilon) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \epsilon^2 y_2(t) + \dots.$$

Como es usual, en este paso se sustituye lo anterior en (\mathcal{P}_ϵ) y se obtiene

$$\frac{d^2}{dt^2}(y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \dots) + \epsilon \frac{d}{dt}(y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \dots) + (y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \dots) = 0.$$

De igual forma se expanden las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y_0(0) + \epsilon y_1(0) + \epsilon^2 y_2(0) + \dots &= 1, \\ \dot{y}_0(0) + \epsilon \dot{y}_1(0) + \epsilon^2 \dot{y}_2(0) + \dots &= 0. \end{aligned}$$

A partir de que aquí se tiene la siguiente secuencia de problemas de valor inicial

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 + y_0 &= 0, & \ddot{y}_1 + y_1 &= -\dot{y}_0, & \ddot{y}_2 + y_2 &= -\dot{y}_1, & \dots \\ y_0(0) = 1, \dot{y}_0(0) &= 0, & y_1(0) = 0, \dot{y}_1(0) &= 0, & y_2(0) = 0, \dot{y}_2(0) &= 0, \end{aligned}$$

Usando métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales lineales, obtenemos que la expansión de perturbación de primer orden (orden $O(\epsilon)$) es

$$y(t, \epsilon) = \frac{1}{2} \exp\{it\} + \epsilon \frac{1}{4} (-i - t) \exp\{it\} + (*).$$

Ahora comparamos la solución aproximada $y(t, \epsilon)$ con la solución explícita (que en este ejemplo particular podemos calcular) de (\mathcal{P}_ϵ) dada por

$$y_\star(t) = \frac{\lambda^*}{\lambda^* - \lambda} \exp\left\{\left(-\frac{1}{2}\epsilon + i\sqrt{1 - \frac{1}{4}\epsilon^2}\right)t\right\}, \quad \text{con } \lambda = -\frac{1}{2}\epsilon + i\sqrt{1 - \frac{1}{4}\epsilon^2}.$$

Se comprueba numéricamente que para pequeños valores de t , $y(t, \epsilon) \sim y_\star(t)$, pero a medida que t aumenta, $y(t, \epsilon)$ pierde toda relación con $y_\star(t)$. El problema radica en que $y_1(t) = \frac{1}{4}(-i - t) \exp\{it\} + (*)$ contiene un término que es proporcional a t . Así que, a medida que t crece también lo hace $y_1(t)$ y cuando $t \sim \frac{1}{\epsilon}$ el segundo término en $y(t, \epsilon)$ es tan grande como el primero, por lo que la primera corrección ϵy_1 , tiene el mismo tamaño que la solución y_0 del problema no perturbado, justamente lo que busca evitar el método de perturbación. Este problema emerge esencialmente por el hecho de que el dominio de la variable independiente t es no acotado.

En el ejemplo 7 vemos que se han buscado expansiones de la forma

$$f(\epsilon, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \delta_n(\epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

en donde $t \in D \subset \mathbb{R}$ con D un dominio no acotado. Con la dependencia de los coeficientes del parámetro t , la pérdida del orden las corrección en la expansión se hace posible en ciertas regiones del dominio D . Estudiar esta situación es el objetivo fundamental del *método de múltiples escalas*.

2-4-3. Método de múltiples escalas

Presentemos un poco más en detalle el método de escalas múltiples usando de nuevo como base el ejemplo 7. Si para la función y_* expandimos la raíz cuadrada con respecto a ϵ , obtenemos

$$y_*(t) \approx \frac{\lambda^*}{\lambda^* - \lambda} \exp \left\{ \left(i - \frac{1}{2}\epsilon - \frac{i}{8}\epsilon^2 \right) t \right\} + (*). \quad (25)$$

Ahora bien, si tenemos una función $h(\epsilon)$ derivable y de orden $O(1)$ entonces la función $g_n(t) := h(\epsilon^n t)$ satisface

$$g_n(t + T_n) - g(t) \approx \epsilon^n \dot{h}(\epsilon^n t) T_n = O(1) \quad \Leftrightarrow \quad T_n \sim \epsilon^{-n}.$$

Se expresa lo anterior diciendo que g_n varía en una escala de tiempo $T_n \sim \epsilon^{-n}$. Si observamos la expresión (25) se nota que la solución aproximada (25) varía en tres escalas de tiempo

$$T_0 = \epsilon^0, \quad T_1 = \epsilon^{-1} \quad \text{y} \quad T_2 = \epsilon^{-2}.$$

Es claro que si se incluyen más términos en la expansión de Taylor de $y_*(t)$ la aproximación resultante dependerá de más escalas de tiempo. A partir de lo anterior, se postula la existencia de una función $h = h(t_0, t_1, t_2, \dots)^2$ que brinda una expansión de perturbación de la forma

$$y(t, \epsilon) = h(t_0, t_1, t_2, \dots)|_{t_n = \epsilon^n t}.$$

A partir de aquí, podemos escribir formalmente

$$\frac{d}{dt} = \partial_{t_0} + \epsilon \partial_{t_1} + \epsilon^2 \partial_{t_2} + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} (\partial_{t_0} + \epsilon \partial_{t_1} + \epsilon^2 \partial_{t_2} + \dots) = \partial_{t_0}^2 + 2\epsilon \partial_{t_0 t_1}^2 + \epsilon^2 (\partial_{t_1}^2 + 2\partial_{t_0 t_2}) + \dots, \quad (\dagger\dagger)$$

y además, la función h se escribe en la forma

$$h = h_0 + \epsilon h_1 + \epsilon^2 h_2 + \dots.$$

Procedemos ahora con el método de escalas múltiples al sustituir (\dagger) y $(\dagger\dagger)$ en (\mathcal{P}_ϵ) y obtener la ecuación formal

$$(\partial_{t_0}^2 + \dots)(h_0 + \epsilon h_1 + \dots) + \epsilon (\partial_{t_0} + \dots)(h_0 + \epsilon h_1 + \dots) + h_0 + \epsilon h_1 + \dots = 0,$$

equivale a tener

$$\partial_{t_0}^2 h_0 + h_0 + \epsilon (\partial_{t_0}^2 h_1 + h_1 + 2\partial_{t_0 t_1}^2 h_0 + \partial_{t_0} h_0) + \epsilon^2 (\partial_{t_0}^2 h_2 + h_2 + 2\partial_{t_0 t_1}^2 h_1 + 2\partial_{t_0 t_2}^2 h_0 + \partial_{t_1}^2 h_0 + \partial_{t_1} h_0 + \partial_{t_0} h_1) + \dots = 0,$$

lo que nos brinda la siguiente pirámide de ecuaciones diferenciales lineales de perturbación respecto a cada orden de ϵ

$$\begin{aligned} \epsilon^0: & \quad \partial_{t_0}^2 h_0 + h_0 = 0, \\ \epsilon^1: & \quad \partial_{t_0}^2 h_1 + h_1 = -[2\partial_{t_0 t_1}^2 h_0 + \partial_{t_0} h_0], \\ \epsilon^3: & \quad \partial_{t_0}^2 h_2 + h_2 = -[2\partial_{t_0 t_1}^2 h_1 + 2\partial_{t_0 t_2}^2 h_0 + \partial_{t_1}^2 h_0 + \partial_{t_1} h_0 + \partial_{t_0} h_1], \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

²Aquí asumimos que h es una función suave, en donde las derivadas parciales de orden superior existen.

En este punto se resalta una de las primeras reglas del método de múltiples escalas, la cual es tener en cuenta las condiciones iniciales en el tiempo inicial tan solo hasta el final de los cálculos de cada uno de los ordenes de aproximación.

Ahora se resuelven cada una de las ecuaciones para cada orden $O(\epsilon)$. Por lo tanto, para el orden ϵ^0 tenemos la ecuación

$$\partial_{t_0}^2 h_0 + h_0 = 0.$$

Cuando se aplica el método de múltiples escalas para ecuaciones diferenciales ordinarias, siempre se calcula la ecuación general de la ecuación correspondiente al orden ϵ^0 . En consecuencia

$$h_0(t_0, t_1, t_2, \dots) = A_0(t_1, t_2, \dots) \exp\{i t_0\} + (*).$$

Aquí se puede apreciar como h_0 depende de la escala de tiempo más rápida t_0 , la dependencia de las otras escalas más lentas t_1, t_2, \dots es arbitraria en este punto, y se refleja en la constante de integración (función a calcular) $A_0 = A_0(t_1, t_2, \dots)$. Calculada la función h_0 tenemos que la ecuación correspondiente al orden 1, queda en la forma

$$\partial_{t_0}^2 h_1 + h_1 = -2i(\partial_{t_1} A_0(t_1, t_2, \dots) + \frac{1}{2} A_0(t_1, t_2, \dots)) \exp\{i t_0\} + (*). \quad (26)$$

Necesitamos una solución particular para el oscilador lineal en resonancia (26), por lo que directamente podemos encontrar $h_1(t_0, t_1, t_2, \dots)$ y obtener

$$h_1(t_0, t_1, t_2, \dots) = -t_0(\partial_{t_1} A_0(t_1, t_2, \dots) + \frac{1}{2} A_0(t_1, t_2, \dots)) \exp\{i t_0\}. \quad (27)$$

Pero aquí se observa que h_1 es proporcional a t_0 y tenemos que la corrección del primer término tendrá el mismo tamaño cuando $t_0 \sim \epsilon^{-1}$. Esto es justo lo que se debe evitar usando el método de escalas múltiples. Por lo tanto se impone la condición

$$\partial_{t_1} A_0 + \frac{1}{2} A_0 = 0,$$

bajo la cual, la ecuación (26) queda en la forma

$$\partial_{t_0}^2 h_1 + h_1 = 0.$$

Términos en la ecuaciones de corrección que llevan a crecimientos lineales como en (27) se llaman tradicionalmente *términos seculares*. Ahora, la segunda regla del método de múltiples escalas, es descartar las solución general de las ecuaciones homogéneas correspondientes a todos los ordenes $O(\epsilon^n)$ excepto para el primer orden. En tal caso, para nuestro ejemplo llegamos a la conclusión $h_1 = 0$. Seguimos con el proceso y obtenemos

$$\partial_{t_0}^2 h_2 + h_2 = -2i(\partial_{t_2} A_0 - \frac{i}{2} \partial_{t_1}^2 A_0 - \frac{i}{2} \partial_{t_1} A_0) \exp\{i t_0\} + (*), \quad (28)$$

por lo tanto aparece un nuevo término secular el cual debemos anular. En consecuencia,

$$\partial_{t_2} A_0 - \frac{i}{2} \partial_{t_1}^2 A_0 - \frac{i}{2} \partial_{t_1} A_0 = 0.$$

De esta forma, se llega a la ecuación $\partial_{t_0}^2 h_2 + h_2 = 0$ y por lo tanto de acuerdo al método de escalas múltiples se deduce $h_2 = 0$. Hemos obtenido así que

$$h(t_0, t_1, t_2, \dots) = A_0(t_1, t_2, \dots) \exp\{i t_0\} + (*) + O(\epsilon^3),$$

en donde

$$\begin{aligned} \partial_{t_1} A_0 &= -\frac{1}{2} A_0, & \partial_{t_1} A_0 &= -\frac{1}{2} A_0, \\ \partial_{t_2} A_0 &= \frac{i}{2} \partial_{t_1}^2 A_0 + \frac{i}{2} \partial_{t_1} A_0. & \partial_{t_2} A_0 &= -\frac{i}{8} A_0. \end{aligned} \quad (29)$$

La clave ahora es que el sistema (29) admite solución dado el simple criterio de derivación cruzada

$$\partial_{t_2 t_1}^2 A_0 = \partial_{t_1 t_2}^2 A_0 = \frac{i}{16} A_0.$$

Esto quiere decir que la función h existe al menos como una función de dos variables t_1 y t_2 . Para estar seguros de que existe como función de más variables debemos ir a las ecuaciones de orden superior $O(\epsilon^3), O(\epsilon^4), \dots$. En consecuencia, para la *función amplitud* $A(t) = A_0(t_1, t_2, \dots)|_{t_n = \epsilon^n t}$ se puede deducir la *ecuación de amplitud*

$$\dot{A} = -\epsilon \frac{1}{2} A - \epsilon^2 \frac{i}{8} A,$$

la cual es una ecuación lineal fácil de resolver y cuya solución está dada por $A(t) = C \exp\left\{\left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8}\right)t\right\}$ con C una constante. En consecuencia,

$$y(t, \epsilon) = C \exp\left\{\left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + i\right)t\right\} + (*).$$

Es justo en este punto en donde se ajusta la constante C para satisfacer las condiciones iniciales del problema. En resumen, iniciamos con una ecuación de segundo orden no lineal y terminamos analizando una ecuación de primer orden no lineal sobre una función compleja $A(t)$, de la cual podemos encontrar una solución analítica. En general no siempre es posible tener una solución analítica del problema original, es aquí donde el método de escalas múltiples es muy útil.

Ejemplo 8. *Considere la ecuación de Mathieu*

$$\ddot{y} + (1 + \delta + \epsilon \cos 2t)y = 0, \quad (30)$$

donde (δ, ϵ, k) son parámetros constantes, y la derivada se toma con respecto al tiempo t . Esta ecuación describe un oscilador lineal paramétricamente forzado donde la frecuencia es sinusoidal en el tiempo. El equilibrio $y = 0$ es inestable cuando la frecuencia externa $\Omega = 2$ del forzado paramétrico está lo suficientemente cerca de la frecuencia de resonancia $\sqrt{1 + \delta}$ del oscilador no forzado ($\epsilon = 0$). Vamos a suponer que $\epsilon \ll 1$ y $\delta = \epsilon \delta_1$, donde $\delta_1 = O(1)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Consideremos una solución de la forma

$$y(t, \epsilon) = h(t_0, t_1, t_2, \dots) + \epsilon h_1(t_0, t_1, t_2, \dots) + \epsilon^2 h_2(t_0, t_1, t_2, \dots) + \dots,$$

de donde al proceder como en el ejemplo anterior se obtiene la pirámide de ecuaciones diferenciales respecto a cada orden de ϵ . Con el fin de no extendernos en los cálculos, vamos a estudiar la perturbación

asintótica de orden 1 ($O(\epsilon)$)

$$\begin{aligned}\epsilon^0: \quad & \partial_{t_0}^2 h_0 + h_0 = 0, \\ \epsilon^1: \quad & \partial_{t_0}^2 h_1 + h_1 = -[2\partial_{t_0 t_1}^2 h_0 + (\delta_1 + \cos 2t_0) h_0], \\ & \vdots\end{aligned}$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación de orden $O(\epsilon^0)$ se deduce

$$h_0(t_0, t_1) = A(t_1) \exp\{i t_0\} + (*),$$

y la ecuación para h_1 es ahora dada por

$$\partial_{t_0}^2 h_1 + h_1 = -\frac{1}{2} A \exp\{i 3 t_0\} - \left(2i \partial_{t_1} A + \delta_1 A - \frac{1}{2} A^*\right) \exp\{i t_0\} + (*),$$

con $A = A(t_1)$. El término secular acompaña el término resonante $\exp\{i t_0\}$ y por lo tanto se debe anular. En consecuencia

$$2i \partial_{t_1} A + \delta_1 A - \frac{1}{2} A^* = 0. \quad (31)$$

De aquí llegamos a la ecuación

$$\partial_{t_0}^2 h_1 + h_1 = -\frac{1}{2} A \exp\{i 3 t_0\},$$

cuya solución la podemos expresar en la forma

$$h_1(t_0, t_1) = \frac{1}{4} (\text{sen } t_0)^2 \left(- (A(t_1) + A^*(t_1)) \cos t_0 + (A(t_1) - A^*(t_1)) \text{sen } t_0 \right).$$

Hemos obtenido entonces

$$y(t, \epsilon) = A(t_1) \exp\{i 3 t_0\} + (*) + \epsilon \frac{1}{4} (\text{sen } t_0)^2 \left(- (A(t_1) + A^*(t_1)) \cos t_0 + (A(t_1) - A^*(t_1)) \text{sen } t_0 \right) + o(\epsilon),$$

en donde $A(t_1)$ satisface (31). Escribiendo $A = u + i v$ en términos de sus partes reales e imaginarias, tenemos que la ecuación de amplitud (que este caso queda un sistema de ecuaciones)

$$\begin{aligned}\partial_{t_1} u &= -\left(\frac{1}{4} + \frac{\delta_1}{2}\right) v, \\ \partial_{t_1} v &= \left(\frac{\delta_1}{2} - \frac{1}{4}\right) u.\end{aligned} \quad (32)$$

En consecuencia, las soluciones de (32) son de la forma

$$\begin{aligned}u(t_1) &= c_1 \exp\{\rho t_1\} + c_2 \exp\{-\rho t_1\}, \\ v(t_1) &= \hat{c}_1 \exp\{\rho t_1\} + \hat{c}_2 \exp\{-\rho t_1\}\end{aligned} \quad \text{con } \rho = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - \delta_1^2},$$

con $c_i, \hat{c}_i, i = 1, 2$ constantes. Así que, la solución $y(t, \epsilon)$ no es estable si $\rho \in \mathbb{R}$ es decir, $\frac{1}{4} - \delta_1^2 > 0$ lo que equivale a tener

$$|\delta_1| < 1/2 \quad \Leftrightarrow \quad \delta < \frac{1}{2} |\epsilon|.$$

En caso contrario, la solución $y(t, \epsilon)$ es periódica. Las ideas presentadas para la ecuación de Mathieu (30) serán utilizadas para las ecuación (6) en el caso autónomo al considerar una pequeña perturbación de los estados de equilibrio con $v_0 = O(1)$, $\delta = O(\epsilon^2)$ y $G = O(\epsilon^3)$.

2-4-4. Oscilaciones periódicas de signo constante en MEMS

A continuación vamos a presentar algunos de resultados sobre la existencia y estabilidad de soluciones periódicas de signo constante para actuadores tipo MEMS sin efectos de retraso ($\tau = 0$). En particular, vamos a considerar el actuador tipo Nathanson y el actuador tipo Comb-drive con o sin desplazamiento (ver [11, 20, 22, 4, 27]). Con respecto a la existencia de soluciones periódicas en ecuaciones no lineales tipo Liénard, una de las técnicas para el problema existencia (y en algunos casos especiales para la estabilidad), es el método de súper y sub soluciones. Para una lectura más rigurosa al respecto invitamos al lector ver [6, 14]. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y considere una ecuación diferencial tipo Liénard de la forma

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}) + h(t, x) = 0, \quad (33)$$

con $F :]a, b[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable y $h : \mathbb{R} \times]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en x y T -periódica en t . Como el lector puede apreciar la ecuación (6) es un caso especial de ecuaciones tipo (33) con

$$F(x, \dot{x}) = \gamma \dot{x}, \quad \text{y} \quad h(t, x) = x - u - \frac{4\beta V^2(t)x}{(1-x^2)^2},$$

presentando dos singularidades en -1 y 1 . Debido a la segunda ley de Newton, las ecuaciones tipo Liénard (33) son frecuentemente utilizadas para analizar la dinámica de diversos dispositivos mecánicos y en particular estudiar la existencia de posibles estados de equilibrio y posibles movimientos recurrentes: Soluciones periódicas de periodo $T > 0$ también llamadas armónicas, soluciones periódicas de periodo minimal nT , ($n \geq 2$) llamadas también sub-armónicas, soluciones cuasi-periódicas, entre otras. Entre todas ellas las más simples son las soluciones periódicas de periodo T . En consecuencia, uno de los problemas más estudiados en la teoría de osciladores no lineales es el problema de contorno periódico

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x} + F(x, \dot{x}) + h(t, x) = 0 \\ x(0) = x(T), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \end{array} \right\} \quad (34)$$

para el cual es claro que toda solución es una función T -periódica. Quizás uno de los métodos más utilizados para la búsqueda de soluciones de clase $C^2[0, T]$ del problema de contorno (34) es el conocido método de súper y sub-soluciones [6, 14], el cual permite en algunos casos determinar la estabilidad lineal de las soluciones periódicas de (34). No daremos todos los detalles del método, pero a continuación presentamos el concepto de súper y sub-solución sobre el siguiente problema de contorno

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x} + f(t, x, \dot{x}) = 0 \\ x(0) = x(T), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \end{array} \right\} \quad (35)$$

en donde $D \subset \mathbb{R} \times]l_1, l_2[\times \mathbb{R}$ es un dominio con $-\infty \leq l_1 \leq l_2 \leq \infty$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua (o diferenciable).

Definición 4: Súper y sub-soluciones. Una función $\delta \in C^2(]0, T[) \cap C^1(]0, T[)$ es llamada una súper-solución para el problema de contorno (35) relativa al dominio D si

I)

$$\ddot{\delta} + f(t, \delta(t), \dot{\delta}(t)) \leq 0, \quad \forall t \in]0, T[.$$

II)

$$\delta(t) \in]l_1, l_2[, \quad \forall t \in]0, T[, \quad \text{y} \quad \delta(0) = \delta(T), \quad \dot{\delta}(0) \leq \dot{\delta}(T).$$

Una función $\zeta \in C^2(]0, T[) \cap C^1(]0, T[)$ es llamada una sub-solución para el problema de contorno (35) relativa al dominio D si

I)

$$\ddot{\zeta} + f(t, \zeta(t), \dot{\zeta}(t)) \geq 0, \quad \forall t \in]0, T[.$$

II)

$$\zeta(t) \in]l_1, l_2[, \quad \forall t \in]0, T[, \quad \text{y} \quad \zeta(0) = \zeta(T), \quad \dot{\zeta}(0) \geq \dot{\zeta}(T).$$

Las súper y sub-soluciones están bien ordenadas si:

$$\zeta(t) \leq \delta(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

En ese sentido, las sub y súper soluciones están en orden inverso si:

$$\delta(t) \leq \zeta(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Entre las súper y sub-soluciones más simples están claramente las funciones constantes. En tal caso, súper y sub-soluciones constantes $\delta(t) = \delta$ y $\zeta(t) = \zeta$ para el problema de contorno (35) relativa al dominio D si satisfacen respectivamente

$$f(t, \delta, 0) \leq 0, \quad \text{y} \quad f(t, \zeta, 0) \geq 0.$$

En [10, 15, 20, 4] los autores demuestran el existencia de soluciones periódicas de signo constante para diversos actuadores tipo MEMS, entre ellos el actuador tipo Nathanson

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x = \frac{\beta V^2(t)}{(1-x)^2}, \quad x \in]-\infty, 1[, \quad (36)$$

y el actuador tipo Comb-drive desplazado

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x - u = \frac{4\beta V^2(t)x}{(1-x^2)^2}, \quad x \in]-1, 1[, \quad (37)$$

con $u \in [0, 1[$. Para las dos últimas ecuaciones, la función $V(t)$ satisface las misma condición (7). Más aún, en [4] se extiende dicho resultado para osciladores tipo

$$\ddot{x} + c(x)\dot{x} + K(x) = \frac{F(t)}{G(x)}, \quad (38)$$

donde $c(x)$, K y G son funciones continuas con $G(x) \neq 0$ para todo x en un subconjunto de $]l_1, l_2[$ y F es una función periódica y continua en \mathbb{R} . Este resultado incluye el actuador Atomic force microscopy (AFM) cuya ecuación de movimiento esta dada por

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{(1+x)^3} \dot{x} + x = \mathcal{F}(t) + \frac{B_1}{(1+x)^8} - \frac{B_2}{(1+x)^2}, \quad x \in]-1, \infty[, \quad (39)$$

A continuación presentamos en detalle los resultados de existencia y estabilidad de soluciones periódicas para el modelo de Nathanson (36) y el modelo de Comb-drive desplazado (39) establecidos en [4, 27]. Se define

$$\Gamma_{p,\gamma} = \{a \in L^p(0, T) : \|(a - \gamma^2/4)_+\|_{L^p} < K(2p_*)\},$$

con $p \in [1, \infty]$ y $K(q)$ la mejor constante Sobolev que satisface en la desigualdad

$$K \|u\|_{L^q}^2 \leq \| \dot{u} \|_{L^2}^2, \quad \forall u = u(t) \in H_0^1([0, T]).$$

Teorema 8. *Para el modelo de Nathanson (36) asuma las siguientes condiciones*

- $0 < V_{\min}^2 < V_{\max}^2 \leq 4/27\beta$.
- $1 - 2\beta V^2(t) \in \Gamma_{p,\gamma}$ y $\gamma^2/4 + 2\beta V^2(t) < 1$ para todo $t \in [0, T]$ para algún $p \in [1, \infty]$.

Entonces, la ecuación (36) tiene exactamente dos soluciones T -periódicas y positivas, ψ_1 y ψ_2 tales que

$$0 < \eta_1 \leq \psi_1(t) \leq \xi_1 \leq 1/3 \leq \xi_2 \leq \psi_2(t) \leq \eta_2, \quad \forall t \in [0, T],$$

con η_i, ξ_i , $i = 1, 2$ las respectivas soluciones de

$$x(1-x)^2 = \beta V_{\min}^2, \quad y \quad x(1-x)^2 = \beta V_{\max}^2,$$

en $[0, 1]$. Más aún, ψ_1 es asintóticamente estable y ψ_2 es inestable. Adicionalmente, si

$$\frac{\gamma^2}{4} < \frac{1-3\xi_1}{1-\xi_1},$$

entonces $\psi_1(t)$ es localmente exponencialmente asintóticamente estable con tasa de decaimiento exponencial $\gamma/2$.

Ahora, para el modelo de Comb-drive desplazado (37), para cada $u \in [0, 1[$ se definen

$$\vartheta_{\min} := 4\beta V_{\min}^2, \quad \vartheta_{\max} := 4\beta V_{\max}^2, \quad \vartheta_*(u) = (1 - \zeta(u)^2)(5\zeta(u)^2 - 4u\zeta(u) - 1).$$

en donde las cantidades $\zeta(u)$ y $\psi(u)$ están dadas por

$$\zeta(u) = \frac{u^{1/3}}{4} \left(u^{2/3} + \psi(u) + \frac{u^{4/3}}{\psi(u)} \right) \quad y \quad \psi(u) = \left(u^2 + 4u\sqrt{u^2 + 4} + 8 \right)^{1/3}. \quad (40)$$

Lema 2. *Considere la ecuación (37) con $u \in]0, 1[$ fijo. Asuma que*

$$0 < \vartheta_{\min} \leq \vartheta_{\max} \leq \vartheta_*(u),$$

con $\vartheta_*(u)$ dado en (40) y defina $\phi(x, u) = (x - u)(1 - x^2)^2$. Entonces, existen tres súper-soluciones constantes δ_i , $i = 0, 1, 2$ que satisfacen

$$\phi(\delta_0, u) = \vartheta_{\max}\delta_0, \quad \phi(\delta_i, u) = \vartheta_{\min}\delta_i, \quad i = 1, 2,$$

y tres sub-soluciones ξ_j , $j = 0, 1, 2$ que satisfacen

$$\phi(\xi_0, u) = \vartheta_{\min}\xi_0, \quad \phi(\xi_i, u) = \vartheta_{\max}\xi_i, \quad i = 1, 2.$$

Más aún,

$$-1 < \xi_0 \leq \delta_0 < 0, \quad y \quad 0 < \delta_1 \leq \xi_1 < \zeta(u) < \xi_2 \leq \delta_2 < 1.$$

Teorema 9. Sea $u \in [0, 1[$ fijo. Bajo los supuestos del Lema 2 y las condiciones

$$M := 1 - \vartheta_{\min} < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \quad \text{y} \quad \gamma \leq \gamma^* := \max_{L \in [M, \pi^2/T^2]} \frac{L - M}{\sqrt{L}} \cot\left(\frac{\sqrt{L}T}{2}\right). \quad (41)$$

Entonces existen al menos tres soluciones T -periódicas no triviales $\hat{\rho}(t)$, $\hat{\psi}_1(t)$ y $\hat{\psi}_2(t)$ de (37) tales que

$$\xi_0 \leq \hat{\rho}(t) \leq \delta_0, \quad \delta_1 \leq \hat{\psi}_1(t) \leq \xi_1 \quad \text{y} \quad \xi_2 \leq \hat{\psi}_2(t) \leq \delta_2,$$

para todo $t \in [0, T]$. Más aún,

- Si $u = 0$ entonces $\hat{\psi}_1(t) = 0$ y $\hat{\rho}(t) = -\hat{\psi}_2(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- Bajo las condiciones (41) y para $u \ll 1$, las únicas soluciones positivas, T -periódicas no triviales de (37) son $\hat{\psi}_1(t)$ y $\hat{\psi}_2(t)$ y la única solución negativa, T -periódicas no trivial es $\hat{\rho}(t)$.
- Si $\gamma \leq \gamma^*$ y $u \ll 1$ entonces $\hat{\rho}(t)$ y $\hat{\psi}_2$ son inestables, mientras que si $\gamma \leq \min\{\gamma^*, \gamma^{**}\}$ con

$$\gamma^{**} = 2\sqrt{1 - \vartheta_{\max} s'(\xi_1)}, \quad s(x) = \frac{x}{(1 - x^2)^2},$$

$\hat{\psi}_1(t)$ es localmente asintóticamente estable.

Observación 1. Es importante resaltar que una consecuencia directa de las condiciones (41) es que el sistema linealizado de (37) en $\hat{\psi}_1(t)$ dado por

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4\hat{\psi}_1(t)^3 - 3u\hat{\psi}_1(t)^2 - u}{\hat{\psi}_1(t)(1 - \hat{\psi}_1(t)^2)} & -\gamma \end{pmatrix} X(t),$$

no admite soluciones T -periódicas no triviales. (La misma conclusión se deduce $\hat{\psi}_2(t)$ y $\hat{\rho}(t)$ para $u \ll 1$). La demostración de esta afirmación se deduce de los resultados presentes en [8] y la monotonía de las funciones $\partial_x g(t, x)$ y $\partial_x^2 g(t, x)$ con

$$g(t, x) = x - u - \frac{4\beta V^2(t)x}{(1 - x^2)^2},$$

en los conjuntos

$$E_0 = \{(t, x, \dot{x}) \in [0, T] \times]-1, 0] \times \mathbb{R} : \xi_0 \leq x \leq \delta_0\},$$

$$E_1 = \{(t, x, \dot{x}) \in [0, T] \times]0, \zeta(u) \times \mathbb{R} : \delta_1 \leq x \leq \xi_1\},$$

y

$$E_2 = \{(t, x, \dot{x}) \in [0, T] \times]\zeta(u), 1[\times \mathbb{R} : \xi_2 \leq x \leq \delta_2\}.$$

En este trabajo, se demostrará que bajo condiciones adecuadas, en el modelo del Comb-drive desplazado y con retraso (8) existen de soluciones periódicas para $\tau > 0$. La misma demostración puede extenderse a otro tipo de actuadores, como por ejemplo el AFM (39) bajo el efecto de un controlador ($\hat{\mathcal{F}}(t) = \mathcal{F}(t) + G(\dot{x}_\tau - \dot{x})$) o en particular el actuador tipo Nathanson (36) y sus variantes (ver [19, 28]), también bajo el efecto de un controlador ($\hat{V}(t) = V(t) + G(\dot{x}_\tau - \dot{x})$).

3. Resultados

En este capítulo se establecen y se demuestran los resultados matemáticos del presente trabajo de grado en relación con la dinámica del actuador electrostático tipo peine (ver [27]) y bajo los efectos de controlador realimentado

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x - u = \frac{4\beta V^2(t, \varphi(\dot{x}(t), \dot{x}_\tau(t)))x}{(1-x^2)^2}, \quad x \in]-1, 1[, \quad u \in [0, 1[, \quad (42)$$

en el cual

$$V(t, \varphi(\dot{x}, \dot{x}_\tau)) = v_0 + \delta v(t) + \varphi(\dot{x}, \dot{x}_\tau) \quad \text{y} \quad \varphi(\dot{x}, \dot{x}_\tau) = G(\dot{x}_\tau - \dot{x}).$$

Los parámetros v_0 , δ , G y la función $V(t)$ satisfacen las mismas condiciones presentadas en la introducción. Nuestro punto de partida será un análisis de la estabilidad local de las posibles soluciones de equilibrio correspondientes al caso autónomo asociado. Entre otras cosas, se demostrará la existencia de un único equilibrio localmente asintóticamente estable y se dará una cota explícita para los valores del retraso τ donde dicha propiedad cualitativa persiste. Estos resultados darán respuesta a la pregunta de investigación **P2**. Seguidamente, respecto a la pregunta de investigación **P3**, por medio del método de múltiples escalas, se demuestra la existencia de soluciones periódicas para una pequeña perturbación de (42) cerca del equilibrio estable del caso autónomo. Posteriormente, se demuestra la existencia y estabilidad de tres soluciones periódicas para (42) que emergen como continuación local a partir del caso $\tau = 0$, dándose así una respuesta a la pregunta de investigación **P1**.

3-1. Efectos de un retraso temporal en el actuador Comb-drive desplazado

Iniciamos nuestro análisis de (42) considerando el caso $\delta = 0$, en cuyo caso tenemos la ecuación autónoma con retraso

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x - u = \frac{4\beta(v_0 + G(\dot{x}_\tau - \dot{x}))^2 x}{(1-x^2)^2}, \quad x \in]-1, 1[, \quad (43)$$

Para cada $u \in [0, 1[$, se definen las siguientes cantidades

$$\zeta(u) = \frac{u^{1/3}}{4} \left(u^{2/3} + \psi(u) + \frac{u^{4/3}}{\psi(u)} \right) \quad \text{con} \quad \psi(u) = \left(u^2 + 4\sqrt{u^2 + 4} + 8 \right)^{1/3}.$$

junto con

$$\vartheta_*(u) = (1 - \zeta(u)^2)(-5\zeta(u)^2 + 4u\zeta(u) + 1).$$

Proposición 1. *Para cada $u \in [0, 1[$ fijo, suponga que $0 < v_0 < \sqrt{\frac{\vartheta_*(u)}{4\beta}}$ con $\vartheta_*(u)$ definido anteriormente. La ecuación diferencial (43) admite dos equilibrios \hat{x}_1, \hat{x}_2 en $]0, 1[$ con el orden $0 < \hat{x}_1 < (2u - \sqrt{4u^2 + 5})/5 < \hat{x}_2 < 1$. Más aún, si $\tau = 0$ el equilibrio \hat{x}_2 es inestable, por otro lado si se cumple que $0 < \gamma < 2\sqrt{\frac{-4\hat{x}_1^3 + 3u\hat{x}_1^2 + u}{\hat{x}_1(1-\hat{x}_1^2)}}$ el equilibrio \hat{x}_1 es localmente asintóticamente estable.*

Demostración. En la primera parte de la demostración, seguimos las ideas presentes en (ver [22, 27]). Un cálculo directo muestra que los equilibrios $x(t) = x, \forall t \in \mathbb{R}$ de (43) satisfacen la ecuación uno-paramétrica

$$\phi(x, u) - \vartheta x = 0, \quad \phi(x, u) = (x - u)(1 - x^2)^2, \quad \vartheta = 4\beta v_0^2, \quad \vartheta > 0. \quad (44)$$

Nos interesa determinar un intervalo abierto de parámetros el cual garantice la existencia de al menos dos soluciones de equilibrios de (43) en $]0, 1[$. Por lo tanto, debemos analizar los posibles puntos de bifurcación asociados a (44). Esto es, analizamos el sistema

$$\left. \begin{array}{l} \phi(x, u) = \vartheta x \\ \partial_x \phi(x, u) = \vartheta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (x - u)(1 - x^2)^2 = \vartheta x \\ (1 - x^2)(-5x^2 + 4ux + 1) = \vartheta \end{array} \right\} \quad (45)$$

El sistema (45) nos deja la ecuación $(1 - x^2)(4x^3 - 3ux^2 - u) = 0$, la cual tiene soluciones en $x = \pm 1$ y las raíces del polinomio $w(x) = 4x^3 - 3ux^2 - u$, el cual tiene una raíz real positiva $0 < \zeta(u) < 1$ dada por

$$\zeta(u) = \frac{u^{1/3}}{4} \left(u^{2/3} + \psi(u) + \frac{u^{4/3}}{\psi(u)} \right), \quad \text{con} \quad \psi(u) = \left(u^2 + 4\sqrt{u^2 + 4} + 8 \right)^{1/3}.$$

De la segunda ecuación en (45), el parámetro ϑ_* es determinado por

$$\vartheta_*(u) = (1 - \zeta(u)^2)(-5\zeta(u)^2 + 4u\zeta(u) + 1). \quad (46)$$

En este punto, nos interesa determinar los extremos relativos asociados a $\phi(x, u)$. Por lo que estudiamos las derivadas

$$\partial_x \phi(x, u) = (1 - x^2)(-5x^2 + 4ux + 1) \quad \text{y} \quad \partial_{xx} \phi(x, u) = 20x^3 - 12ux^2 - 12x + 4u.$$

Resolviendo $\partial_x \phi(x, u) = 0$ obtenemos $x = \pm 1$ y $x = \xi_{\pm}(u)$ dadas por

$$\xi_+(u) = \left(2u + \sqrt{4u^2 + 5} \right) / 5,$$

$$\xi_-(u) = \left(2u - \sqrt{4u^2 + 5} \right) / 5.$$

Dado que $\partial_{xx} \phi(\xi_+(u), u) < 0$ y $\partial_{xx} \phi(\xi_-(u), u) > 0$ entonces $\phi(\xi_+(u), u)$ es un máximo local de $\phi(x, u)$ en $[0, 1]$ y $\phi(\xi_-(u), u)$ es un mínimo local de $\phi(x, u)$ en $[-1, 0]$. En la siguiente figura se visualizan dos posibles casos. Del Lema 3.1 en [27] para $0 < \vartheta < \vartheta_*$ la ecuación (44) admite tres raíces (lo que equivale a decir que (43) admite tres soluciones de equilibrio) \hat{x}_0, \hat{x}_1 y \hat{x}_2 que satisface el orden

$$\hat{x}_0 < \xi_- < 0 < \hat{x}_1 < \zeta < \xi_+ < \hat{x}_2 < 1.$$

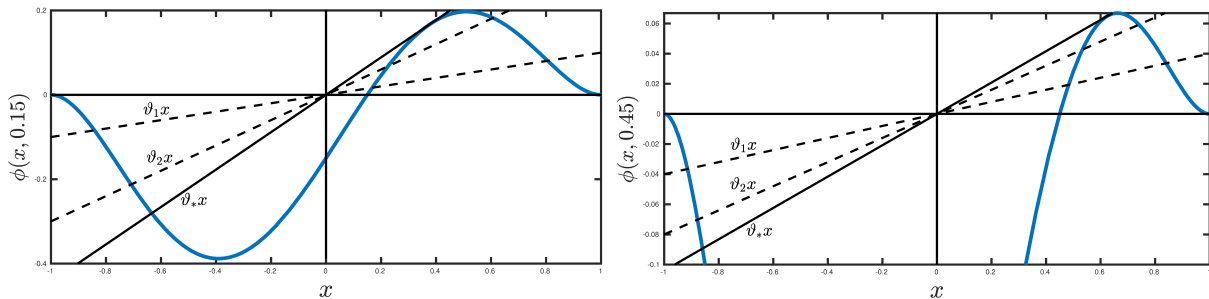


Figura 6. Gráfica de $\phi(x, u) = (x - u)(1 - x^2)^2$. En la izquierda observamos el caso $u = 0.15$ en el cual tenemos $\vartheta_* \approx 0.4431$, $\xi_+ \approx 0.5112$ y $\xi_- \approx -0.3912$. A la derecha el caso $u = 0.45$ el cual nos deja con $\vartheta_* \approx 0.1040$, $\xi_+ \approx 0.6621$ y $\xi_- \approx -0.3021$.

En el caso $\tau = 0$, la ecuación linealizada asociada a cada equilibrio $\hat{x}(t) = \hat{x}_i$, $i = 1, 2$ esta dada por

$$\ddot{y} + \gamma \dot{y} + \left(\frac{\partial_x \phi(\hat{x}_i, u) - \vartheta}{(1 - \hat{x}_i^2)^2} \right) y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} + \gamma \dot{y} + \left(1 - \frac{\vartheta(1 + 3\hat{x}_i^2(u))}{(1 - \hat{x}_i^2(u))^3} \right) y = 0, \quad i = 1, 2, \quad (\star)$$

un cálculo directo muestra que los valores propios ρ_j^i , $j = 1, 2$ asociados a (\star) están dados por

$$2\rho_{1,2}^i = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4 \left(1 - \frac{\vartheta(1 + 3\hat{x}_i^2(u))}{(1 - \hat{x}_i^2(u))^3} \right)}, \quad i = 1, 2.$$

En este punto cabe mencionar que se puede comprobar directamente que la función $f(x, \vartheta) = \vartheta - \phi(x, u)$, presenta una bifurcación tipo Fold en $(\zeta(u), \vartheta_*)$ (ver Apéndice) Por lo tanto, dado que $\hat{x}_1 < \zeta(u) < \hat{x}_2$ se deduce que

- En \hat{x}_2 se verifica

$$\frac{\partial_x \phi(\hat{x}_2, u) - \vartheta}{(1 - \hat{x}_2^2)^2} = 1 - \frac{\vartheta(1 + 3\hat{x}_2^2(u))}{(1 - \hat{x}_2^2(u))^3} < 0.$$

Por lo tanto $\rho_{1,2}^2 \in \mathbb{R}$ con $\text{sgn}(\rho^1) = -\text{sgn}(\rho^2)$ concluyéndose así que \hat{x}_2 es un equilibrio inestable.

- En \hat{x}_1 se verifica

$$\frac{\partial_x \phi(\hat{x}_1, u) - \vartheta}{(1 - \hat{x}_1^2)^2} = 1 - \frac{\vartheta(1 + 3\hat{x}_1^2(u))}{(1 - \hat{x}_1^2(u))^3} > 0.$$

Por lo tanto, bajo la condición

$$0 < \gamma < 2 \sqrt{\frac{-4\hat{x}_1^3 + 3u\hat{x}_1^2 + u}{\hat{x}_1(1 - \hat{x}_1^2)}},$$

se deduce directamente que $\rho_{1,2}^1 \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(\rho_{1,2}^1) = -\gamma < 0$. En consecuencia, \hat{x}_1 es un equilibrio localmente asintóticamente estable.

□

Siguiendo las mismas ideas presentes en la demostración de la Proposición 1 se sigue directamente el siguiente resultado.

Corolario 2. *Considere el actuador electrostático tipo Comb-drive desplazado*

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x - u = \frac{4\beta v_0^2 x}{(1 - x^2)^2}, \quad x \in]-1, 1[, \quad (47)$$

con $0 < v_0 < \sqrt{\frac{\vartheta_*(u)}{4\beta}}$ y $u \in [0, 1[$. Entonces existen exactamente dos soluciones de equilibrio $\hat{x}_1(u), \hat{x}_2(u) \in]0, 1[$ con $0 < \hat{x}_1 < (2u + \sqrt{4u^2 + 5})/5 < \hat{x}_2 < 1$. Más aún, $\hat{x}_2(u)$ es un equilibrio tipo silla y $\hat{x}_1(u)$ es un equilibrio tipo centro cuyo periodo mínimo de oscilación (periodo del problema linealizado asociado) esta dado por

$$\hat{\mathcal{T}} = 2\pi/\hat{\omega}, \quad \text{con} \quad \hat{\omega}^2 = 1 - \frac{4\beta v_0^2(1 + 3\hat{x}_1^2(u))}{(1 - \hat{x}_1^2(u))^3}.$$

¹Note que para el actuador tipo peine (47) el voltaje pull-in, es justamente $v_{pull} = \sqrt{\frac{\vartheta_*(u)}{4\beta}}$.

Este valor será un valor de referencia para un hipotético intervalo de valores positivos del delay donde la estabilidad del equilibrio persista, incluso existan posibles soluciones periódicas del dispositivo cuando el voltaje sea una función periódica. Por lo tanto, el siguiente resultado nos brinda condiciones para garantizar la estabilidad del equilibrio $(\hat{x}_1, 0)$ del sistema (49) para valores de $\tau > 0$.

Nuestra atención ahora se enfoca en extender los resultados de la Proposición 1, para valores no cero del retraso ($\tau > 0$). Con este propósito en mente, hacemos el siguiente cambio de variables

$$z_1 = x, \quad z_2 = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad z_{1\tau}(t) = x(t - \tau), \quad z_{2\tau}(t) = \dot{x}(t - \tau). \quad (48)$$

En consecuencia, la ecuación (43) queda en la forma

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{4\beta(v_0 + G(z_{2\tau} - z_2))^2 z_1}{(1 - z_1^2)^2} - \gamma z_2 - z_1 + u \end{aligned} \right\}. \quad (49)$$

Note que (49) es un sistema autónomo no lineal y con retraso de la forma

$$\dot{Z} = F(Z, Z_\tau), \quad \text{con} \quad F(Z, Z_\tau) = \left(\begin{array}{c} z_2 \\ \frac{4\beta(v_0 + G(z_{2\tau} - z_2))^2 z_1}{(1 - z_1^2)^2} - \gamma z_2 - z_1 + u \end{array} \right),$$

en donde $Z = (z_1, z_2)^{tr}$, y $Z_\tau = (z_{1\tau}, z_{2\tau})^{tr}$. Como bien se ha dicho antes, cuando un actuador electrostático se encuentra en presencia del controlador, los dos parámetros claves que entran en escena para analizar la dinámica del electrodo móvil son justamente la *ganancia* G y el delay τ . El siguiente resultado nos brinda un cota explícita para los valores del retraso τ en donde la estabilidad asintótica del equilibrio $Z_* = (\hat{x}_1, 0)$ de (49) persiste para $\tau > 0$.

Teorema 10. *Sea $Z_* = (\hat{x}_1, 0)$ el punto de equilibrio del sistema (49) con \hat{x}_1 dado en la Proposición 1. Se define*

$$a = \frac{4\hat{x}_1^3 - u\hat{x}_1^2 - u}{\hat{x}_1(1 - \hat{x}_1^2)}, \quad g = \frac{2(\hat{x}_1 - u)G}{v_0} \quad \text{y} \quad \chi = -\frac{a^2 + \gamma^2 + 1 - \sqrt{(a^2 + \gamma^2 + 1)^2 - 4a^2}}{2a}.$$

Entonces $Z_* = (\hat{x}_1, 0)$ es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable para todo $0 \leq \tau < \tau_0$ con

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{\chi}|a|}{|g| \max\left\{1, \frac{1-a}{\gamma}\right\} \left(\max\{1, |a| + |\gamma + g|\} + |g|\right)}. \quad (50)$$

Demostración. De la Proposición 1 es claro que $(\hat{x}_1, 0)$ es un equilibrio de (49). Por lo tanto, el sistema linealizado de (49) asociado a $(\hat{x}_1, 0)$, el cual esta dado por

$$\dot{Y} = D_Z F(\hat{x}_1, 0)Y + D_{Z_\tau} F(\hat{x}_1, 0)Y_\tau. \quad (51)$$

Un cálculo directo muestra que

$$D_Z F(\hat{x}_1, 0) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{4\hat{x}_1^3 - 3u\hat{x}_1^2 - u}{\hat{x}_1(1 - \hat{x}_1^2)} & -\gamma - \frac{8G\beta v_0 \hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^2} \end{array} \right) \quad \text{y} \quad D_{Z_\tau} F(\hat{x}_1, 0) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \frac{8G\beta v_0 \hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^2} \end{array} \right).$$

3-1 Efectos de un retraso temporal en el actuador Comb-drive desplazado 43

Por lo tanto, (51) es un sistema lineal con retraso de la forma (ver marco teórico 2 en la sección 2-2-2) dado por

$$\dot{Y} = AY + BY_\tau, \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4\hat{x}_1^3 - 3u\hat{x}_1^2 - u}{\hat{x}_1(1-\hat{x}_1^2)} & -\gamma - \frac{8G\beta v_0 \hat{x}_1}{(1-\hat{x}_1^2)^2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{8G\beta v_0 \hat{x}_1}{(1-\hat{x}_1^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Escribimos las matrices A y B en la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -\gamma - g \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}.$$

De la Proposición 1 la solución trivial de

$$\dot{Z} = (A + B)Z,$$

es asintóticamente estable. Ahora, definamos la matriz $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$ con

$$c_{11} = c_{1,2} \left(\frac{\gamma^2 - a(1-a)}{\gamma} \right), \quad c_{22} = c_{12} \left(\frac{1-a}{\gamma} \right), \quad \text{y} \quad c_{12} = c_{21} = -\frac{1}{2a},$$

Afirmamos que $a < 0$, en efecto

$$a = \frac{4\hat{x}_1^3 - 3u\hat{x}_1^2 - u}{\hat{x}_1(1-\hat{x}_1^2)} = -\left(1 - \frac{\vartheta(1+3\hat{x}_1^2(u))}{(1-\hat{x}_1^2(u))^3} \right) < 0.$$

Un cálculo directo muestra que $c_{11} > 0$ y $\det C > 0$. Por lo tanto, por el criterio de Sylvester la matriz C real y simétrica es definida positiva. Más aún, C satisface la ecuación matricial

$$(A + B)^T C + C(A + B) = \begin{pmatrix} 2ac_{12} & c_{11} - \gamma c_{12} + ac_{22} \\ c_{11} - \gamma c_{12} + ac_{22} & 2(c_{12} - \gamma c_{22}) \end{pmatrix} = -I_2.$$

Las condiciones anteriores corresponden precisamente a las hipótesis del Teorema (II) de la sección del Apéndice (I-II). En consecuencia, la solución trivial de (51) es asintóticamente estable para todo $0 \leq \tau < \tau_0$ con

$$\tau_0 = \left(2(\|A\| + \|B\|)\|CB\| \right)^{-1} \left(\chi_{\min}(C) / \chi_{\max}(C) \right)^{1/2},$$

en donde $\chi_{\min}(C)$ y $\chi_{\max}(C)$ respectivamente denotan el valor propio más pequeño y el valor propio más grande de C . Considerando la normal matricial $\|P\|_\infty = \max\{|p_{11}| + |p_{12}|, |p_{21}| + |p_{22}|\}$ para una matriz real $p = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$, se comprueba directamente que

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max\{1, |a| + |\gamma + g|\}, & \|B\|_\infty &= |g|, \\ \|CB\|_\infty &= \frac{|g|}{2|a|} \max\left\{1, \frac{1-a}{\gamma}\right\}, & \frac{\chi_{\min}(C)}{\chi_{\max}(C)} &= -\frac{a^2 + \gamma^2 + 1 - \sqrt{(a^2 + \gamma^2 + 1)^2 - 4a^2}}{2a}. \end{aligned}$$

En conclusión, el punto de equilibrio $Z_* = (\hat{x}_1, 0)$ de (49) es localmente asintóticamente estable para todo $0 \leq \tau < \tau_0$ con τ_0 dado por (12). Esto completa la demostración. \square

En este punto es conveniente recordar el comentario posterior al Corolario 2, en el donde se menciona que si el actuador (43) opera sin fuerza de amortiguamiento y sin controlador, el equilibrio $(\hat{x}_1, 0)$ es un equilibrio tipo centro con periodo mínimo $\hat{\mathcal{T}} = 2\pi/\hat{\omega}$. A diferencia del Teorema 10 el siguiente resultado presenta otra estrategia para garantizar la estabilidad del equilibrio $(\hat{x}_1, 0)$ en termino de los parámetros $G \in \mathbb{R}$ y $\tau \in \mathbb{R}^+$.

Teorema 11. Sea $\tau \in \mathcal{I} \subseteq [0, \hat{\mathcal{T}}]$ y $Z_* = (\hat{x}_1, 0)$ el punto de equilibrio de (49) con \hat{x}_1 dado en la Proposición 1, además $0 < \gamma < 2\sqrt{\frac{-4\hat{x}_1^3 + 3u\hat{x}_1^2 + u}{\hat{x}_1(1-\hat{x}_1^2)}}$. Para cada $\tau \in \mathcal{I}$, sea $\kappa = \kappa(\tau)$ la solución de la ecuación

$$\kappa \left(\kappa - \frac{\gamma \operatorname{sen}(\kappa\tau)}{1 - \cos(\kappa\tau)} \right) = \frac{-4\hat{x}_1^3 + 3u\hat{x}_1^2 + u}{\hat{x}_1(1-\hat{x}_1^2)},$$

en el dominio $\{(\tau, \kappa) : 0 < \kappa\tau < 2\pi\}$. Si la ganancia del controlador satisface la condición

$$G > -\frac{\eta}{1 - \cos(\kappa\tau)}, \quad \text{con} \quad \eta = \frac{\gamma(1-\hat{x}_1^2)^2}{8\beta v_0 \hat{x}_1},$$

entonces $Z_* = (\hat{x}_1, 0)$ es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable del sistema (49). Más aún, el mínimo valor de G donde se garantiza estabilidad asintótica es $G_{\min} = -\eta/2$.

Demostración. Consideremos de nuevo el sistema linealizado de (49) asociado a $(\hat{x}_1, 0)$ dado por (51). Sabemos bien que la búsqueda de soluciones de tipo $Y(t) = e^{\lambda t} Y$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ y $Y = (v_1, v_2)^{tr}$, $v_i \in \mathbb{C}$, invoca el estudio de la ecuación característica

$$\det(\lambda I - A - e^{-\lambda\tau} B) = 0,$$

la cual para el caso de un sistema lineal con retraso en el plano, sabemos que se puede expresar en forma extendida como

$$\lambda^2 - (tr A)\lambda + \det A + e^{-2\tau\lambda} \det B + e^{-\tau\lambda} (C - \lambda tr B) = 0,$$

en donde

$$C = \det(a^1|b^2) + \det(b^1|a^2) \quad \text{con} \quad (a^1|b^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{4\hat{x}_1^3 - 3u\hat{x}_1^2 - u}{\hat{x}_1(1-\hat{x}_1^2)} & \frac{8G\beta v_0 \hat{x}_1}{(1-\hat{x}_1^2)^2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (b^1|a^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\gamma - \frac{8G\beta v_0 \hat{x}_1}{(1-\hat{x}_1^2)^2} \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica queda de la forma

$$\lambda^2 + (\gamma + \alpha_1(1 - e^{-\lambda\tau}))\lambda + \alpha_2 = 0, \tag{52}$$

con

$$\alpha_1 = \frac{8G\beta v_0 \hat{x}_1}{(1-\hat{x}_1^2)^2} \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \frac{-4\hat{x}_1^3 + 3u\hat{x}_1^2 + u}{\hat{x}_1(1-\hat{x}_1^2)} = \hat{\omega}^2.$$

Sea $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$, con $\lambda_s \in \mathbb{R}$, $s = 1, 2$.

$$\lambda^2 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 i, \\ e^{-\lambda\tau} \lambda = e^{-\lambda_1\tau} (\cos(\lambda_2\tau)\lambda_1 + \operatorname{sen}(\lambda_2\tau)\lambda_2) + e^{-\lambda_1\tau} (\cos(\lambda_2\tau)\lambda_2 - \operatorname{sen}(\lambda_2\tau)\lambda_1) i.$$

De la ecuación característica se deduce el siguiente sistema de ecuaciones en \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \gamma\lambda_1 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2 - \alpha_1 e^{-\lambda_1\tau}(\cos(\lambda_2\tau)\lambda_1 + \text{sen}(\lambda_2\tau)\lambda_2) &= 0, \\ 2\lambda_1\lambda_2 + \gamma\lambda_2 + \alpha_1\lambda_2 - \alpha_1 e^{-\lambda_1\tau}(\cos(\lambda_2\tau)\lambda_2 - \text{sen}(\lambda_2\tau)\lambda_1) &= 0.\end{aligned}\tag{53}$$

Recordar que nuestro objetivo es determinar condiciones donde la solución de equilibrio $(\hat{x}_1, 0)$ continúe siendo localmente asintóticamente estable para valores positivos del delay. Por lo tanto, queremos que las soluciones $Y(t)$ sean acotadas y que su modulo tienda a cero, en tal caso buscamos que se verifique la condición $\lambda_1 < 0$. Sea $0 < \lambda_2$, y considere la segunda ecuación en (53) la cual bajo el supuesto la podemos escribir en la forma

$$2\lambda_1 + \gamma + \alpha_1(1 - e^{-\lambda_1\tau} \cos(\lambda_2\tau)) + \frac{\alpha_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_1\tau} \text{sen}(\lambda_2\tau)\lambda_1 = 0.$$

Dado que

$$\lambda_1 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha_1(1 - e^{-\lambda_1\tau} \cos(\lambda_2\tau)) \leq \alpha_1(1 - \cos(\lambda_2\tau)),$$

se sigue directamente

$$0 = 2\lambda_1 + \gamma + \alpha_1(1 - e^{-\lambda_1\tau} \cos(\lambda_2\tau)) + \frac{\alpha_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_1\tau} \text{sen}(\lambda_2\tau)\lambda_1 \leq \gamma + \alpha_1(1 - \cos(\lambda_2\tau)) \Leftrightarrow \lambda_1 \leq 0.$$

Por lo tanto, analizando el caso límite $\lambda_1 = 0$ podemos determinar una región abierta \mathcal{R} de parámetros críticos, cuya frontera esta dada por el sistema de ecuaciones (derivado de (53))

$$\begin{aligned}\lambda_2(\lambda_2 + \alpha_1 \text{sen}(\lambda_2\tau)) &= \alpha_2, \\ \lambda_2(\gamma + \alpha_1(1 - \cos(\lambda_2\tau))) &= 0.\end{aligned}$$

Claramente, si $\lambda_2 = 0$ entonces $\alpha_2 = 0$ lo cual es una contradicción. De manera que, para $\lambda_2 \neq 0$, llegamos a la relación

$$\gamma + \alpha_1(1 - \cos(\lambda_2\tau)) = 0, \Leftrightarrow \gamma + \frac{8G\beta v_0 \hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^2}(1 - \cos(\lambda_2\tau)) = 0.$$

Considerando el dominio $\Gamma = \{(\tau, \lambda_2) : 0 < \lambda_2\tau < 2\pi\}$ para cada valor del delay $\tau > 0$ fijo, encontramos el valor de la frecuencia $\lambda_2 = \lambda_2(\tau)$ por medio de la ecuación

$$\lambda_2 \left(\lambda_2 - \frac{\gamma \text{sen}(\lambda_2\tau)}{1 - \cos(\lambda_2\tau)} \right) = \frac{-4\hat{x}_1^3 + 3u\hat{x}_1^2 + u}{\hat{x}_1(1 - \hat{x}_1^2)} = \hat{\omega}^2.\tag{54}$$

Un cálculo directo muestra que la función $f :]0, 2\pi/\tau[\rightarrow \mathbb{R}, \lambda_2 \rightarrow f(\lambda_2)$ dada por

$$f(\lambda_2) = \lambda_2 \left(\lambda_2 - \frac{\gamma \text{sen}(\lambda_2\tau)}{1 - \cos(\lambda_2\tau)} \right),$$

es monótona creciente y $f(\lambda_2) \rightarrow +\infty$ si $\lambda_2 \rightarrow 2\pi/\tau$. Por lo tanto, para cada τ la ecuación (54) determina un único $\lambda_2 = \lambda_2(\tau)$ que satisface $f(\lambda_2) = \hat{\omega}^2$. A partir de lo anterior, para cada γ, β , y v_0 fijos, se verifica entonces que $\lambda_1 \leq 0$ siempre que (G, τ) se encuentre en el dominio

$$\mathcal{R} = \left\{ (G, \tau) : G \geq -\frac{\eta}{1 - \cos(\lambda_2\tau)} \right\}, \quad \text{con} \quad \eta = \frac{\gamma(1 - \hat{x}_1^2)^2}{8\beta v_0 \hat{x}_1},$$

La frontera de \mathcal{R} es la gráfica de la función

$$G:]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^-, \quad G(m) = -\frac{\eta}{1 - \cos(m)},$$

la cual satisface

$$\lim_{m \rightarrow 0} G(m) = \lim_{m \rightarrow 2\pi} G(m) = -\infty,$$

y además tiene un valor máximo de $-\eta/2$ en $m = \pi$. En efecto, se calculan las derivadas

$$G'(m) = \frac{\sin(m)}{(\cos(m) - 1)^2} \quad \text{y} \quad G''(m) = -\frac{\eta(2 + \cos(m))}{4} \csc^4\left(\frac{m}{2}\right),$$

y se deduce que $G'(m) = 0$ si $m = \pi$. Puesto que $G''(\pi) = -\eta/4 < 0$ entonces $G(\pi) = -\eta/2$ es un máximo local. Esto completa la demostración. \square

Observación 2. *Bajo las condiciones del Teorema 11 si la ganancia del controlador satisface la condición*

$$G + \eta/2 > 0, \quad \Leftrightarrow \quad G + \frac{\gamma(1 - \hat{x}_1^2)^2}{16\beta v_0 \hat{x}_1} > 0,$$

el equilibrio $(\hat{x}_1, 0)$ es localmente asintóticamente estable para todo $\tau \in \mathcal{I} \subseteq [0, \hat{\mathcal{T}}]$. En particular para $\tau = \pi/\hat{\omega}$ se tiene

$$\lambda_2 \left(\lambda_2 - \frac{\gamma \sin\left(\frac{\pi \lambda_2}{\hat{\omega}}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi \lambda_2}{\hat{\omega}}\right)} \right) = \hat{\omega}^2, \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2^2 - \hat{\omega}^2 = \frac{\gamma \lambda_2 \sin\left(\frac{\pi \lambda_2}{\hat{\omega}}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi \lambda_2}{\hat{\omega}}\right)},$$

cuya única solución es $\lambda_2 = \hat{\omega}$. Por lo tanto, de la primera ecuación en (53) λ_1 satisface

$$2\lambda_1 + \gamma + \alpha_1(1 - e^{-\frac{\pi}{\hat{\omega}}\lambda_1}) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-\frac{2\pi}{\hat{\omega}}\lambda_1} = -\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha_1} + \frac{\gamma}{\alpha_1}\right),$$

ecuación que admite una única solución $\lambda_1^* < 0$. En consecuencia, las soluciones $Y^*(t)$ de (51) serían de la forma

$$Y^*(t) = e^{(\lambda_1^* + i\hat{\omega})t} \Upsilon, \quad \text{con} \quad \Upsilon = (v_1, v_2)^{tr}, \quad v_i \in \mathbb{C}.$$

Observación 3: Extensión de resultados a otros modelos tipo MEMS. *En particular consideramos la ecuación de movimiento para el electrodo móvil del actuador electrostático tipo Nathanson basado en grafeno (ver [19, 28]), dada por*

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x(1 - \zeta|x|) = \frac{\beta V^2(t, \varphi(\dot{x}, \dot{x}_\tau))}{(1-x)^2}, \quad x \in]-\infty, 1[, \quad (55)$$

en donde $\zeta \in \mathbb{R}^{+2}$, $V(t, \varphi(\dot{x}, \dot{x}_\tau)) = v_0 + \delta v(t) + \varphi(\dot{x}, \dot{x}_\tau)$ y $\varphi(\dot{x}, \dot{x}_\tau) = G(\dot{x}_\tau - \dot{x})$. Considerando el caso $\delta = 0$ de (55) y bajo el cambio de variable (48) expresamos (55) como un sistema de ecuaciones de primer orden con retraso en la forma

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{\beta(v_0 + G(z_{2\tau} - z_2))^2}{(1 - z_1)^2} - \gamma z_2 - z_1(1 - \zeta|z_1|) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

²Note que en el caso $\zeta = 0$, recuperamos el actuador tipo Nathanson (36).

3-1 Efectos de un retraso temporal en el actuador Comb-drive desplazado 47

En [19] se demuestra la existencia de exactamente tres soluciones de equilibrio $(\tilde{x}_i, 0)$, $i = 0, 1, 2$ para (56) en donde en donde \tilde{x}_i , $i = 0, 1, 2$ son soluciones de la ecuación uno-paramétrica

$$\tilde{\phi}_\zeta(x) - \tilde{\vartheta} = 0, \quad \text{con} \quad \tilde{\phi}_\zeta(x) = x(1 - \zeta|x|)(1 - x)^2, \quad \tilde{\vartheta} = \beta v_0^2, \quad (57)$$

siempre que $\tilde{\vartheta} < \mathcal{K}_\zeta$, con

$$\mathcal{K}_\zeta = \max_{x \in]0, S_\zeta[} \tilde{\phi}_\zeta(x) > 0, \quad \text{en donde} \quad S_\zeta = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < \zeta \leq 1, \\ 1/\zeta & \text{si } \zeta > 1. \end{cases}$$

Más aún, \tilde{x}_i , $i = 0, 1, 2$ satisfacen

$$\tilde{x}_0 \in]-\infty, -\frac{1}{\zeta}[, \quad \tilde{x}_1 \in]0, C_\zeta[\quad \text{y} \quad \tilde{x}_2 \in]C_\zeta, S_\zeta[\quad \text{en donde} \quad \mathcal{K}_\zeta = \tilde{\phi}_\zeta(C_\zeta), \quad C_\zeta \in]0, S_\zeta[.$$

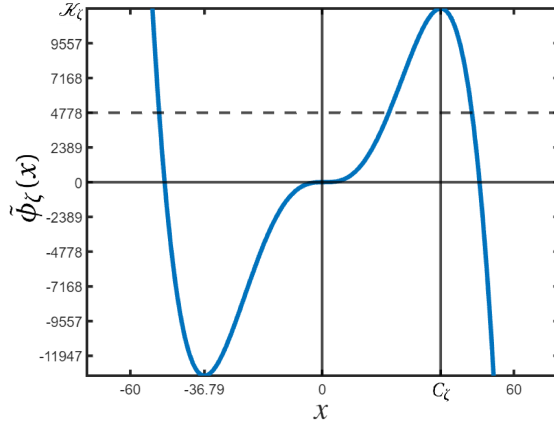


Figura 7. Gráfico de $\tilde{\phi}_\zeta(x) = x(1 - \zeta|x|)(1 - x)^2$ en el caso $\zeta = 2.0294 \cdot 10^{-2}$ con $x \in [-73.5828, 74.2494]$.

De otro lado, definiendo la función

$$h :]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow h(x) = \frac{\tilde{\phi}_\zeta(x)}{(1 - x)^2},$$

la ecuación linealizada asociada a cada equilibrio $(\tilde{x}_i, 0)$, $i = 1, 2$ (expresada como una ecuación de segundo orden) esta dada por

$$\ddot{y} + \gamma \dot{y} + h'(x_i)y = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} + \gamma \dot{y} + \left(\frac{(1 - \tilde{x}_i)\hat{\phi}'_\zeta(\tilde{x}_i) + 2\tilde{v}}{(1 - \tilde{x}_i)^3} \right) y = 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (\star\star)$$

Cálculos directos muestran que $\hat{\phi}'_\zeta(x) > 0$ en $]0, C_\zeta[$. en particular, para el equilibrio $(\tilde{x}_1, 0)$ con $\tilde{x}_1 \in]0, C_\zeta[$ los valores propios $\tilde{\rho}_j^i$, $j = 1, 2$ asociados a $(\star\star)$ dados por

$$2\tilde{\rho}_{1,2}^1 = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4 \left(\frac{(1 - \tilde{x}_1)\hat{\phi}'_\zeta(\tilde{x}_1) + 2\tilde{v}}{(1 - \tilde{x}_1)^3} \right)},$$

Por lo tanto, bajo la condición

$$0 < \gamma < 2 \sqrt{\frac{(1 - \tilde{x}_1)\hat{\phi}'_\zeta(\tilde{x}_1) + 2\tilde{v}}{(1 - \tilde{x}_1)^3}},$$

se deduce que $\tilde{\rho}_{1,2}^1 \in \mathbb{C}$ y además $\text{Re}(\tilde{\rho}_{1,2}^1) = -\gamma < 0$, por lo tanto $(\tilde{x}_1, 0)$ es un equilibrio localmente asintóticamente estable (tipo foco atractor). Al igual que en el actuador tipo Peine, se comprueba que para el caso $\tau > 0$ el sistema linealizado en el equilibrio $(\tilde{x}_1, 0)$ es

$$\dot{Y} = \tilde{A}Y + \tilde{B}Y_\tau, \quad \text{con} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -h'(\hat{x}_1) & -\gamma - \frac{2G\beta v_0}{(1-\tilde{x}_1)^2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2G\beta v_0}{(1-\tilde{x}_1)^2} \end{pmatrix}.$$

Además, cuando el actuador (55) opere sin fuerza de amortiguamiento y sin controlador, el equilibrio $(\hat{x}_1, 0)$ es de tipo centro con periodo mínimo $\tilde{\mathcal{T}} = 2\pi/\tilde{\omega}$, con $\tilde{\omega}^2 = h'(\hat{x}_1)$.

A partir de aquí, y siguiendo las mismas ideas presentes para el actuador tipo peine (43) se obtienen los siguientes resultados.

Teorema 12. Sea $\tilde{Z}_* = (\tilde{x}_1, 0)$ el punto de equilibrio del sistema (56) con $0 < \hat{x}_1 < C_\zeta$. Se definen las matrices

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a} & -\gamma - \tilde{g} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{g} \end{pmatrix},$$

siendo en este caso

$$\tilde{a} = -h'(\hat{x}_1), \quad \tilde{g} = \frac{2(1-\tilde{x}_1)G}{v_0}, \quad \tilde{\chi} = -\frac{\tilde{a}^2 + \gamma^2 + 1 - \sqrt{(\tilde{a}^2 + \gamma^2 + 1)^2 - 4\tilde{a}^2}}{2\tilde{a}}.$$

Entonces $Z_* = (\hat{x}_1, 0)$ es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable para todo $0 \leq \tau < \tilde{\tau}_0$ con

$$\tilde{\tau}_0 = \frac{\sqrt{\tilde{\chi}}|\tilde{a}|}{|\tilde{g}|\text{máx}\left\{1, \frac{1-\tilde{a}}{\gamma}\right\}(\text{máx}\{1, |\tilde{a}| + |\gamma + \tilde{g}|\} + |\tilde{g}|)}.$$

Sin entrar en detalles, podemos afirmar que la versión equivalente del Teorema 11 para el modelo de Nathanson basado en grafeno (55) en el caso $\delta = 0$, afirma que para cada γ, β y v_0 fijos, el equilibrio $(\tilde{x}_1, 0)$ es localmente asintóticamente estable si G y τ se encuentra en la región

$$\tilde{\mathcal{R}} = \left\{ (G, \tau) : G \geq -\frac{\tilde{\eta}}{1 - \cos(\tilde{\lambda}\tau)}, \tau \in [0, \tilde{\mathcal{T}}] \right\},$$

en donde $\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}(\tau)$ se determina por medio de la ecuación

$$\tilde{\kappa} \left(\tilde{\kappa} - \frac{\gamma \text{sen}(\tilde{\kappa}\tau)}{1 - \cos(\tilde{\kappa}\tau)} \right) = \frac{(1 - \tilde{x}_i)\hat{\phi}_\zeta(\tilde{x}_i) + 2\beta v_0^2}{(1 - \tilde{x}_i)^3},$$

cuya la frontera de \mathcal{R} es la gráfica de la función

$$G :]0, 2\pi/\tilde{\omega}[\rightarrow \mathbb{R}^-, \quad G(\tau) = -\frac{\tilde{\eta}}{1 - \cos(\lambda_2\tau)}, \quad \text{siendo} \quad \tilde{\eta} = \frac{\gamma(1 - \tilde{x}_1)^2}{2\beta v_0}.$$

Si la ganancia del controlador satisface la condición

$$G + \tilde{\eta}/2 > 0, \quad \Leftrightarrow \quad G + \frac{\gamma(1 - \tilde{x}_1)^2}{4\beta v_0} > 0,$$

el equilibrio $(\tilde{x}_1, 0)$ es localmente asintóticamente estable para todo $\tau \in]0, \tilde{\mathcal{T}}[$. En particular para $\tau = \pi/\tilde{\omega}$ se tiene $\tilde{\kappa} = \tilde{\omega}$. Esto completa nuestra observación.

3-1-1. Método de múltiples escalas para el actuador tipo peine

A partir de los resultados de la sección 1-2-2 sobre el actuador tipo peine, en esta sección nos disponemos a estudiar analíticamente la dinámica del oscilador tipo peine cerca del equilibrio $(\hat{x}_1(u), 0)$ determinado por la Proposición 1 y en particular asumiendo pequeñas perturbaciones del modelo conservativo dado en el Corolario 2. De forma más precisa, supondremos que el actuador (47) se modifica por medio de una pequeña fuerza de amortiguamiento y que además opera en presencia de una pequeña fuente de fuente de voltaje periódica y un controlador realimentado con pequeña ganancia G . Nuestro análisis se basa en el técnica de perturbación conocida como el método de múltiples escalas (ver [25]), siguiendo el procedimiento estándar presente en la sección 2-4-2. En particular el lector puede encontrar la idea fundamental en el ejemplo 30 y en [25].

Sea $x(t)$ cualquier solución de (42) con condiciones iniciales cerca de $(\hat{x}_1, 0)$, con $\hat{x}_1 = \hat{x}_1(u)$. Considere la función $y(t, u) = x(t, u) - \hat{x}_1(u)$. Note que $y = y(t)$ satisface la ecuación

$$\ddot{y} + \gamma \dot{y} + y + \hat{x}_1 - u = \frac{4\beta(y + \hat{x}_1)S^2(t)}{(1 - (y + \hat{x}_1)^2)^2}.$$

Expandiendo el término no lineal $\frac{y + \hat{x}_1}{(1 - (y + \hat{x}_1)^2)^2}$ en $y = 0$ obtenemos

$$\frac{y + \hat{x}_1}{(1 - (y + \hat{x}_1)^2)^2} = \frac{\hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^2} + \frac{(1 + 3\hat{x}_1^2)y}{(1 - \hat{x}_1^2)^3} + \frac{6\hat{x}_1(1 + \hat{x}_1^2)y^2}{(1 - \hat{x}_1^2)^4} + \left(\frac{1}{(1 + \hat{x}_1)^5} + \frac{1}{(1 - \hat{x}_1)^5} \right) y^3 + \dots \quad (58)$$

De igual forma, para la función $S^2(t)$ se tiene

$$S^2(t) = (v_0 + \delta v(t) + G(\dot{y}_\tau - \dot{y}))^2 = v_0^2 + 2\delta v_0 v(t) + 2v_0 G(\dot{y}_\tau - \dot{y}) + \dots \quad (59)$$

En adelante, para $\epsilon > 0$ y pequeño, se asume que $y = O(\epsilon)$ y que además se cumple

- i) La fuente de voltaje directa satisface $v_0 = O(1)$
- ii) Para la fuente de voltaje variable $\delta v(t)$ se supone que $\delta = O(\epsilon^3)$
- iii) La ganancia del controlador realimentado satisface $G = O(\epsilon^2)$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} L[y] &= 4\beta \left(v_0^2 + 2v_0 G(\dot{y}_\tau - \dot{y})\epsilon^2 + 2\delta v_0 v(t)\epsilon^3 + \dots \right) \left(\frac{\hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^2} + \frac{(1 + 3\hat{x}_1^2)y}{(1 - \hat{x}_1^2)^3} + \frac{6\hat{x}_1(1 + \hat{x}_1^2)y^2}{(1 - \hat{x}_1^2)^4} + \left(\frac{1}{(1 + \hat{x}_1)^5} + \dots \right) \right) \\ &= \frac{4\beta v_0^2 \hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^2} + \frac{4\beta v_0^2 (1 + 3\hat{x}_1^2)y}{(1 - \hat{x}_1^2)^3} + \frac{24\beta v_0^2 \hat{x}_1 (1 + \hat{x}_1^2)y^2}{(1 - \hat{x}_1^2)^4} + \left(\frac{1}{(1 + \hat{x}_1)^5} + \frac{1}{(1 - \hat{x}_1)^5} \right) y^3 + \\ &\quad \frac{8v_0 \beta \hat{x}_1 G(\dot{y}_\tau - \dot{y})}{(1 - \hat{x}_1^2)^4} \epsilon^2 + \frac{8\beta v_0^2 \delta \hat{x}_1 v(t)}{(1 - \hat{x}_1^2)^2} \epsilon^3 + \dots \end{aligned}$$

en donde $L[y] = \ddot{y} + \gamma \dot{y} + y + \hat{x}_1 - u$. De esta forma, re-escalando el coeficiente de amortiguamiento, agrupando términos y considerando términos hasta de orden tres se tiene finalmente

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \epsilon^2 \left(\gamma_0 + \frac{8\beta v_0 G \hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^2} \right) \dot{y} - \epsilon^2 \frac{8\beta v_0 G \hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^2} \dot{y}_\tau + \\ \left(1 - \frac{4\beta v_0^2 (1 + 3\hat{x}_1^2)}{(1 - \hat{x}_1^2)^3} \right) y - \frac{24\beta v_0^2 (1 + \hat{x}_1^2) \hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^4} y^2 - \left(\frac{1}{(1 + \hat{x}_1)^5} + \frac{1}{(1 - \hat{x}_1)^5} \right) y^3 = \frac{8\beta v_0^2 \delta \hat{x}_1 v(t)}{(1 - \hat{x}_1^2)^2} \epsilon^3 \end{aligned}$$

Bajo la notación

$$\begin{aligned} \xi &= \gamma + \frac{8\beta\nu_0 G \hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^2}, \quad g = -\frac{8\beta\nu_0 G \hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^4}, \quad \hat{\omega} = \sqrt{\frac{-4\hat{x}_1^3 + 3u\hat{x}_1^2 + u}{\hat{x}_1(1 - \hat{x}_1^2)}} \\ \hat{\omega}_2 &= -\frac{24\beta\nu_0^2(1 + \hat{x}_1^2)\hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^4}, \quad \hat{\omega}_3 = -\left(\frac{1}{(1 + \hat{x}_1)^5} + \frac{1}{(1 - \hat{x}_1)^5}\right), \quad \alpha = \frac{8\beta\nu_0^2 \delta \hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^2}. \end{aligned} \quad (60)$$

tenemos la familia de ecuaciones

$$\ddot{y} + \epsilon^2(\xi \dot{y} + g \dot{y}_\tau) + \hat{\omega}^2 y + \hat{\omega}_2 y^2 + \hat{\omega}_3 y^3 = \alpha v(t) \epsilon^3.$$

A continuación consideramos frecuencias de oscilación cercanas a la frecuencia natural $\hat{\omega}$. Por lo tanto, si $v(t) = v\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ con $v(s)$ una función 2π -periódica con $\bar{v} = 0$, suponemos que $2\pi/T = \hat{\omega} + \epsilon^2 \rho$ en donde ρ se conoce como parámetro de no sintonización. Al sustituir lo anterior en (\mathcal{P}_ϵ) obtenemos

$$\ddot{y} + \epsilon^2(\xi \dot{y} + g \dot{y}_\tau) + \hat{\omega}^2 y + \hat{\omega}_2 y^2 + \hat{\omega}_3 y^3 = \alpha v((\hat{\omega} + \epsilon^2 \rho)t) \epsilon^3. \quad (\mathcal{P}_\epsilon)$$

Método de múltiples escalas sobre el actuador tipo peine

Suponemos que las soluciones de (\mathcal{P}_ϵ) son de la forma

$$y(t, \epsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \epsilon^s y_s(t_0, t_1, t_2), \quad \text{en donde } t_0 = t, \quad t_1 = \epsilon t, \quad \text{y } t_2 = \epsilon^2 t. \quad (\dagger)$$

Siguiendo los pasos de la Sección 2-4-2 y en [25] se asume que el término de delay $y_\tau(t)$ es de la forma

$$y_\tau(t, \epsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \epsilon^s y_s(t_{0,\tau}, t_{1,\tau}, t_{2,\tau}), \quad \text{en donde } t_{0,\tau} = t_0 - \tau, \quad t_{1,\tau} = t_1 - \epsilon\tau, \quad \text{y } t_{2,\tau} = t_2 - \epsilon^2\tau,$$

expresión la cuál para $\epsilon\tau$ pequeño, $t_{1,\tau} \approx t_1$ y $\epsilon^2\tau$ pequeño, $t_{2,\tau} \approx t_2$ se tiene

$$y_\tau(t, \epsilon) = \sum_{s=1}^3 \epsilon^s \hat{y}_s(t_{0,\tau}, t_1, t_2) - \epsilon^2 \tau \partial_{t_1} y_1(t_{0,\tau}, t_{1,\tau}, t_{2,\tau}) - \epsilon^3 \tau \partial_{t_2} y_1(t_{0,\tau}, t_{1,\tau}, t_{2,\tau}) + \dots$$

A continuación, usando la regla de la cadena se tiene directamente

$$\dot{y}(t, \epsilon) = \frac{dy}{dt} = \{(\partial_{t_0} + \epsilon \partial_{t_1} + \epsilon^2 \partial_{t_2} + \dots)y\} \Big|_{t_j = \epsilon^j t}, \quad j = 1, 2, 3.$$

A partir de aquí, podemos escribir formalmente

$$\frac{d}{dt} = \partial_{t_0} + \epsilon \partial_{t_1} + \epsilon^2 \partial_{t_2} + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\partial_{t_0} + \epsilon \partial_{t_1} + \epsilon^2 \partial_{t_2} + \dots) = \partial_{t_0}^2 + 2\epsilon \partial_{t_0 t_1}^2 + \epsilon^2(\partial_{t_1}^2 + 2\partial_{t_0 t_2}) + \dots, \quad (\dagger\dagger)$$

Procedemos ahora con el método de escalas múltiples al sustituir (\dagger) y $(\dagger\dagger)$ en (\mathcal{P}_ϵ) y obtener la ecuación formal

$$\begin{aligned} (\partial_{t_0}^2 + \dots)(\epsilon y_1(t_0, t_1, t_2) + \dots) + \epsilon^2(\xi(\partial_{t_0} + \dots)(\epsilon y_1(t_0, t_1, t_2) + \dots) + g(\partial_{t_0} + \dots)\left(\sum_{s=1}^3 \epsilon^s \hat{y}_s(t_{0,\tau}, t_1, t_2) - \dots\right)) + \\ \hat{\omega}^2(\epsilon y_1(t_0, t_1, t_2) + \dots) + \hat{\omega}_2(\epsilon y_1(t_0, t_1, t_2) + \dots)^2 + \hat{\omega}_3(\epsilon y_1(t_0, t_1, t_2) + \dots)^3 = \alpha v(\hat{\omega} t_0 + \rho t_2) \epsilon^3. \end{aligned}$$

Lo que nos brinda la siguiente pirámide de ecuaciones diferenciales lineales de perturbación respecto al orden de ϵ

$$\begin{aligned} \epsilon: & \quad \partial_{t_0}^2 y_1 + \hat{\omega}^2 y_1 = 0, \\ \epsilon^2: & \quad \partial_{t_0}^2 y_2 + \hat{\omega}^2 y_2 = -[2\partial_{t_0 t_1} y_1 + \hat{\omega}_2 y_1^2], \\ \epsilon^3: & \quad \partial_{t_0}^2 y_3 + \hat{\omega}^2 y_3 = -[2\partial_{t_0 t_1} y_2 + 2\partial_{t_0 t_2} y_1 + \partial_{t_1}^2 y_1 + \xi \partial_{t_0} y_1 + \hat{\omega}_2 y_1 y_2 + g \partial_{t_0} \hat{y}_{1,\tau} + \hat{\omega}_3 y_1^3 - \alpha v(\omega t_0 + \rho t_2)], \\ \epsilon^4: & \quad \partial_{t_0}^2 y_4 + \hat{\omega}^2 y_4 = -[2\partial_{t_0 t_1}^2 y_3 + 2\partial_{t_0 t_2}^2 y_2 + \dots], \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

Estudiamos ahora el sistema de ecuaciones correspondientes a los órdenes $O(1)$, $O(2)$ y $O(3)$. Por lo tanto, para el orden ϵ tenemos la ecuación

$$\partial_{t_0}^2 y_1 + \hat{\omega}^2 y_1 = 0,$$

cuya solución general esta dada por

$$\begin{aligned} y_1(t_0, t_1, t_2) &= \mathcal{K}(t_1, t_2) \exp\{i\hat{\omega} t_0\} + \mathcal{K}^*(t_1, t_2) \exp\{-i\hat{\omega} t_0\}, \\ &= \mathcal{K}(t_1, t_2) \exp\{i\hat{\omega} t_0\} + (*), \end{aligned} \quad (61)$$

en donde $\mathcal{K} \in \mathbb{C}$ con $|\mathcal{K}|$ el módulo de y_1 . Además, z^* denota el conjugado de $z \in \mathbb{C}$ y $z + (*)$ significa $z + z^*$. Sustituyendo (61) en la ecuación correspondiente al orden ϵ^2 se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_{t_0}^2 y_2 + \hat{\omega}^2 y_2 &= -[2\partial_{t_0 t_1} y_1 + \hat{\omega}_2 y_1^2], \\ &= -[2i\hat{\omega} \partial_{t_1} \mathcal{K} \exp\{i\omega t_0\} + \hat{\omega}_2 (\mathcal{K}^2 \exp\{i2\hat{\omega} t_0\} + |\mathcal{K}|^2) + (*). \end{aligned} \quad (62)$$

Dado que el término $\mathcal{K} = \mathcal{K}(t_1, t_2)$ solo depende de las escalas de tiempo t_1 y t_2 , la (62) es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico el resonancia. Por lo tanto, con el fin de evitar términos de crecimiento de la forma $t_0 \exp\{i\hat{\omega} t_0\}$ se impone la condición (se anula el término secular)

$$\partial_{t_1} \mathcal{K}(t_1, t_2) = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}(t_2). \quad (\mathbf{C}_0)$$

Como una consecuencia directa de la condición (\mathbf{C}_0) es que la función y_1 no depende de t_1 . Por lo tanto $y_1 = y_1(t_0, t_2)$ con

$$y_1(t_0, t_2) = \mathcal{K}(t_2) \exp\{i\hat{\omega} t_0\} + (*).$$

Además, un cálculo directo muestra que la solución particular de (62) esta dada por

$$\begin{aligned} y_2(t_0, t_2) &= \frac{2\hat{\omega}_2 \mathcal{K}(t_2) (\mathcal{K}(t_2) \cos(2\hat{\omega} t_0) - 3\mathcal{K}^*(t_2))}{3\hat{\omega}^2}, \\ &= \frac{\hat{\omega}_2}{3\hat{\omega}^2} \left(\mathcal{K}^2(t_2) \exp\{i2\hat{\omega} t_0\} - 3|\mathcal{K}(t_2)|^2 \right) + (*). \end{aligned} \quad (63)$$

Ahora pasamos a la ecuación diferencial correspondiente al orden ϵ^3 sustituyendo (61) y (63) respectivamente

$$\partial_{t_0}^2 y_3 + \hat{\omega}^2 y_3 = -[2\partial_{t_0 t_2} y_1 + \xi \partial_{t_0} y_1 + \hat{\omega}_2 y_1 y_2 + g \partial_{t_0} \hat{y}_{1,\tau} + \hat{\omega}_3 y_1^3 - \alpha v(\hat{\omega} t_0 + \rho t_2)]. \quad (64)$$

El término a la derecha en la ecuación (64) explícitamente esta dado por

$$- [2i\hat{\omega}\partial_{t_2}\mathcal{K}\exp\{i\hat{\omega}t_0\} + \xi i\hat{\omega}\mathcal{K}\exp\{i\hat{\omega}t_0\} + \frac{\hat{\omega}_2^2}{3\hat{\omega}^2}(\mathcal{K}^3\exp\{i3\hat{\omega}t_0\} - 5\mathcal{K}|\mathcal{K}|^2\exp\{i\hat{\omega}t_0\}) + ig\hat{\omega}y_{1,\tau} + \hat{\omega}_3(\mathcal{K}^3(t_2)\exp\{i3\hat{\omega}t_0\} + 3\mathcal{K}|\mathcal{K}|^2\exp\{i\hat{\omega}t_0\}) - \alpha v(\hat{\omega}t_0 + \rho t_2)] + (*).$$

En este punto es conveniente escribir la serie de Fourier de la función $v(s)$ en su forma compleja

$$v(s) = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \exp\{ims\} + c_{-m} \exp\{-ims\}), \quad \text{en donde } c_m = \int_{-\pi}^{\pi} v(s)e^{-ims} ds, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

en donde $c_0 = \bar{v} = 0$. Lo que implica

$$\begin{aligned} v(\hat{\omega}t_0 + \rho t_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \exp\{im(\hat{\omega}t_0 + \rho t_2)\} + (*), \\ &= c_1 \exp\{i\rho t_2\} \exp\{i\hat{\omega}t_0\} + c_2 \exp\{i2(\hat{\omega}t_0 + \rho t_2)\} + \dots (*), \\ &= c_1 \exp\{i\rho t_2\} \exp\{i\hat{\omega}t_0\} + \hat{v}(t_0, t_2) + (*). \end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación (64) queda en la forma

$$\begin{aligned} \partial_{t_0}^2 y_3 + \hat{\omega}^2 y_3 &= - [2i\hat{\omega}\partial_{t_2}\mathcal{K}\exp\{i\hat{\omega}t_0\} + \xi i\hat{\omega}\mathcal{K}\exp\{i\hat{\omega}t_0\} + \frac{\hat{\omega}_2^2}{3\hat{\omega}^2}(\mathcal{K}^3\exp\{i3\hat{\omega}t_0\} - 5\mathcal{K}|\mathcal{K}|^2\exp\{i\hat{\omega}t_0\}) + \\ &ig\hat{\omega}\hat{y}_{1,\tau} + \hat{\omega}_3(\mathcal{K}^3\exp\{i3\hat{\omega}t_0\} + 3\mathcal{K}|\mathcal{K}|^2\exp\{i\hat{\omega}t_0\}) - \alpha c_1 \exp\{i\rho t_2\} \exp\{i\hat{\omega}t_0\} - \dots] + (*). \end{aligned} \quad (65)$$

Al igual que antes eliminamos el término secular en (65) al considerar la condición

$$2i\hat{\omega}\partial_{t_2}\mathcal{K} + i\xi\hat{\omega}\mathcal{K} - \frac{5\hat{\omega}_2^2}{3\hat{\omega}^2}\mathcal{K}|\mathcal{K}|^2 + ig\hat{\omega}\mathcal{K}\exp\{-i\hat{\omega}\tau\} + 3\hat{\omega}_3\mathcal{K}|\mathcal{K}|^2 - \alpha c_1 \exp\{i\rho t_2\} = 0. \quad (\mathbf{C}_1)$$

Con el fin de analizar la ecuación (\mathbf{C}_1) (como se puede apreciar es una ecuación en variables complejas), escribimos la función $\mathcal{K} = \mathcal{K}(t_2)$ en forma polar

$$\mathcal{K} = k \exp\{if\}, \quad \text{con } k = k(t_2) \quad \text{y} \quad f = f(t_2).$$

Las funciones $k(t_2)$ y $f(t_2)$ son derivables y satisfacen

$$\partial_{t_2}\mathcal{K}(t_2) = k'(t_2) \exp\{if\} + ik(t_2)f'(t_2) \exp\{if\},$$

lo que nos lleva a la ecuación diferencial en variables complejas

$$\begin{aligned} i\hat{\omega}(2k'(t_2) + i2k(t_2)f'(t_2) + \xi k(t_2) - \frac{5\hat{\omega}_2^2}{3\hat{\omega}^2}k^3(t_2) + gk(t_2)\exp\{-i\hat{\omega}\tau\}) \exp\{if\} + \\ 3\hat{\omega}_3 k^3(t_2) \exp\{if\} - \alpha c_1 \exp\{i\rho t_2\} = 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Bajo el cambio de variable $\rho = \rho t_2 - f$, la ecuación diferencial (66) se divide en el sistema de ecuaciones diferenciales autónomo en variables reales

$$\begin{aligned} k\rho' - (\rho - \frac{g}{2}\sin(\hat{\omega}\tau))k + \left(\frac{3\hat{\omega}_3}{2\hat{\omega}} - \frac{5\hat{\omega}_2^2}{6\hat{\omega}^3}\right)k^3 - \frac{\alpha c_1}{2\hat{\omega}}\cos\rho = 0, \\ k' + \left(\frac{\xi}{2} + \frac{g}{2}\cos(\hat{\omega}\tau)\right)k - \frac{\alpha c_1}{2\hat{\omega}}\sin\rho = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

En este punto, cabe mencionar que las soluciones de equilibrio del sistema (67) brindan soluciones periódicas de (\mathcal{P}_e). Por lo tanto, es importante hacer un análisis de los puntos de equilibrio y su estabilidad para el sistema (67).

Proposición 2. Sea (k_*, ρ_*) un punto de equilibrio de (67). Entonces,

- k_* es solución de la ecuación polinomial

$$\left(\frac{\alpha c_1}{2\hat{\omega}}\right)^2 = k^2 \left[\left(\left(\frac{3\hat{\omega}_3}{2\hat{\omega}} - \frac{5\hat{\omega}_2^2}{6\hat{\omega}^3} \right) k^2 - \left(\rho - \frac{g}{2} \text{sen}(\hat{\omega}\tau) \right) \right)^2 + \left(\frac{\xi}{2} + \frac{g}{2} \text{cos}(\hat{\omega}\tau) \right)^2 \right],$$

mientras que ρ_* satisface

$$\text{sen } \rho = \frac{\hat{\omega}}{\alpha c_1} (\xi + g \text{cos}(\hat{\omega}\tau)) k_*$$

- (k_*, ρ_*) localmente estable si

$$\left(\frac{\xi}{2} + \frac{g}{2} \text{cos}(\hat{\omega}\tau) \right)^2 k_* > \frac{\alpha c_1}{2\hat{\omega}} \text{cos } \rho_* \left(\rho - \frac{g}{2} \text{sen}(\hat{\omega}\tau) - 3 \left(\frac{3\hat{\omega}_3}{2\hat{\omega}} - \frac{5\hat{\omega}_2^2}{6\hat{\omega}^3} \right) k_*^2 \right) \quad \text{y} \quad \xi + g \text{cos}(\hat{\omega}\tau) > 0.$$

Demostración. Un cálculo directo muestra que las soluciones de equilibrio para el sistema (67) están dados por el sistema no lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} -\left(\rho - \frac{g}{2} \text{sen}(\hat{\omega}\tau) \right) k + \left(\frac{3\hat{\omega}_3}{2\hat{\omega}} - \frac{5\hat{\omega}_2^2}{6\hat{\omega}^3} \right) k^3 &= \frac{\alpha c_1}{2\hat{\omega}} \text{cos } \rho, \\ \left(\frac{\xi}{2} + \frac{g}{2} \text{cos}(\hat{\omega}\tau) \right) k &= \frac{\alpha c_1}{2\hat{\omega}} \text{sen } \rho. \end{aligned}$$

Del cual se deduce la ecuación polinomial

$$\left(\frac{\alpha c_1}{2\hat{\omega}} \right)^2 = k^2 \left[\left(\left(\frac{3\hat{\omega}_3}{2\hat{\omega}} - \frac{5\hat{\omega}_2^2}{6\hat{\omega}^3} \right) k^2 - \left(\rho - \frac{g}{2} \text{sen}(\hat{\omega}\tau) \right) \right)^2 + \left(\frac{\xi}{2} + \frac{g}{2} \text{cos}(\hat{\omega}\tau) \right)^2 \right], \quad (\ddagger)$$

la cual tiene a lo más tres soluciones en $]0, \infty[$, como consecuencia de la familia paramétrica de polinomios de grado seis en la ecuación. Note que dada una solución k_* de (\ddagger) , la segunda coordenada del punto de equilibrio (k_*, ρ_*) satisface

$$\text{sen } \rho_* = \frac{\hat{\omega}}{\alpha c_1} (\xi + g \text{cos}(\hat{\omega}\tau)) k_*. \quad (\Delta)$$

Con el propósito de estudiar la estabilidad local de los equilibrios, analizamos (67) en el dominio $\Omega = \{(k, \rho) : k > 0\}$, por medio del sistema

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{1}{k} h_1(\rho, k) & \text{con} & & h_1(\rho, k) &= \left(\rho - \frac{g}{2} \text{sen}(\hat{\omega}\tau) \right) k - \left(\frac{3\hat{\omega}_3}{2\hat{\omega}\omega} - \frac{5\hat{\omega}_2^2}{6\hat{\omega}^3} \right) k^3 + \frac{\alpha c_1}{2\hat{\omega}} \text{cos } \rho, \\ k' &= h_2(\rho, k) & & & h_2(\rho, k) &= -\left(\frac{\xi}{2} + \frac{g}{2} \text{cos}(\hat{\omega}\tau) \right) k + \frac{\alpha c_1}{2\hat{\omega}} \text{sen } \rho. \end{aligned} \quad (68)$$

Ahora bien, el sistema linealizado en (k_*, ρ_*) asociado a (68) esta dado por

$$W' = AW, \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_*} \partial_\rho h_1(\rho_*, k_*) & \frac{1}{k_*} \partial_k h_1(\rho_*, k_*) \\ \partial_\rho h_2(\rho_*, k_*) & \partial_k h_2(\rho_*, k_*) \end{pmatrix} \quad (69)$$

Es bien conocido que la estabilidad local del equilibrio (k_*, ρ_*) queda determinada por el determinante d_A y la traza tr_A de la A respectivamente. Más aún, se comprueba directamente que bajo la condición

$$d_A > 0 \quad \text{y} \quad tr_A < 0,$$

el equilibrio $(0,0)$ es asintóticamente estable para el sistema lineal (69), lo que equivale a decir que (k_*, ρ_*) es localmente asintóticamente estable para el sistema autónomo no lineal (68). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d_A > 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{k_*} \left(\partial_\rho h_1(\rho_*, k_*) \partial_k h_2(\rho_*, k_*) - \partial_k h_1(\rho_*, k_*) \partial_\rho h_2(\rho_*, k_*) \right) > 0, \\ tr_A < 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{k_*} \partial_\rho h_1(\rho_*, k_*) + \partial_k h_2(\rho_*, k_*) < 0. \end{aligned}$$

Cálculos directos muestran que

$$\begin{aligned} \partial_\rho h_1(\rho_*, k_*) &= -\frac{\alpha c_1}{2\hat{\omega}} \operatorname{sen} \rho_*, & \partial_\rho h_2(\rho_*, k_*) &= \frac{\alpha c_1}{2\hat{\omega}} \cos \rho_*, \\ \partial_k h_1(\rho_*, k_*) &= \rho - \frac{g}{2} \operatorname{sen}(\hat{\omega}\tau) - 3\left(\frac{3\hat{\omega}_3}{2\hat{\omega}} - \frac{5\hat{\omega}_2^2}{6\hat{\omega}^3}\right)k_*^2, & \partial_k h_2(\rho_*, k_*) &= -\left(\frac{\xi}{2} + \frac{g}{2} \cos(\hat{\omega}\tau)\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el equilibrio (k_*, ρ_*) es localmente asintóticamente estable si se satisface

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha c_1}{2\hat{\omega}} \operatorname{sen} \rho_*\right) \left(\frac{\xi}{2} + \frac{g}{2} \cos(\hat{\omega}\tau)\right) - \frac{\alpha c_1}{2\hat{\omega}} \cos \rho_* \left(\rho - \frac{g}{2} \operatorname{sen}(\hat{\omega}\tau) - 3\left(\frac{3\hat{\omega}_3}{2\hat{\omega}} - \frac{5\hat{\omega}_2^2}{6\hat{\omega}^3}\right)k_*^2\right) &> 0, \\ -\frac{\alpha c_1}{2\hat{\omega}k_*} \operatorname{sen} \rho_* - \left(\frac{\xi}{2} + \frac{g}{2} \cos(\hat{\omega}\tau)\right) &< 0. \end{aligned}$$

A partir de (Δ) las desigualdades anteriores equivalen a tener

$$\begin{aligned} \left(\frac{\xi}{2} + \frac{g}{2} \cos(\hat{\omega}\tau)\right)^2 k_* - \frac{\alpha c_1}{2\hat{\omega}} \cos \rho_* \left(\rho - \frac{g}{2} \operatorname{sen}(\hat{\omega}\tau) - 3\left(\frac{3\hat{\omega}_3}{2\hat{\omega}} - \frac{5\hat{\omega}_2^2}{6\hat{\omega}^3}\right)k_*^2\right) &> 0, \\ \xi + g \cos(\hat{\omega}\tau) &> 0. \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. \square

De regreso a la ecuación (65), si (k_*, ρ_*) es un equilibrio de (67), la ecuación queda en la forma

$$\partial_{t_0}^2 y_3 + \hat{\omega}^2 y_3 = -\left[\left(\frac{\hat{\omega}_2^2}{3\hat{\omega}^2} + \frac{\hat{\omega}_2^2 \hat{\omega}_3}{3\hat{\omega}^2}\right)k_*^3 \exp\{i3(\hat{\omega}t_0 + \rho t_2 - \rho_*)\} + \hat{v}(t_0, t_2)\right] + (*).$$

Así por lo tanto, las funciones y_1 y y_2 están dadas por

$$\begin{aligned} y_1(t_0, t_2) &= k_* \exp\{i(\hat{\omega}t_0 + \rho t_2 - \rho_*)\} + (*), & y_2(t_0, t_2) &= \frac{\hat{\omega}_2}{3\hat{\omega}^2} \left(\mathcal{K}^2(t_2) \exp\{i2\hat{\omega}t_0\} - 3|\mathcal{K}(t_2)|^2 \right) + (*), \\ &= k_* \exp\{i((\epsilon^2 \rho + \hat{\omega})t - \rho_*)\} + (*), & &= \frac{\hat{\omega}_2}{3\hat{\omega}^2} \left(k_*^2 \exp\{i2(\rho t_2 - \rho_* + \hat{\omega}t_0)\} - 3k_*^2 \right), \\ &= 2k_* \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \rho_*\right), & &= \frac{\hat{\omega}_2}{3\hat{\omega}^2} \left(2k_* \cos\left(\frac{4\pi}{T}t - 2\rho_*\right) - 3k_*^2 \right). \end{aligned}$$

en donde $t_0 = t$ y $t_2 = \epsilon^2 t$, y la función y_3 queda dada por

$$\begin{aligned} y_3(t_0, t_2) &= \left(\frac{\hat{\omega}_2^2}{24\hat{\omega}^4} + \frac{\hat{\omega}_2^2 \hat{\omega}_3}{24\hat{\omega}^4}\right)k_*^3 \exp\{i3(\hat{\omega}t_0 + \rho t_2 - \rho_*)\} + Y(t_0, t_2) + (*), \\ &= \left(\frac{\hat{\omega}_2^2}{24\hat{\omega}^4} + \frac{\hat{\omega}_2^2 \hat{\omega}_3}{24\hat{\omega}^4}\right)k_*^3 \exp\{i3((\epsilon^2 \rho + \hat{\omega})t - \rho_*)\} + Y(t_0, t_2) + (*), \\ &= \left(\frac{\hat{\omega}_2^2}{12\hat{\omega}^4} + \frac{\hat{\omega}_2^2 \hat{\omega}_3}{12\hat{\omega}^4}\right)k_*^3 \cos\left(\frac{6\pi}{T}t - 3\rho_*\right) + Y(t_0, t_2) + (*). \end{aligned}$$

en donde $Y(t_0, t_2)$ es una solución particular de $\partial_{t_0}^2 y_3 + \hat{\omega}^2 y_3 = \hat{v}(t_0, t_2)$. En consecuencia, hemos encontrado una solución T -periódica $y_*(t, \epsilon)$ de (†) la cual se puede expresar en la forma

$$y_*(t, \epsilon) = \epsilon y_1(t_0, t_2) + \epsilon^2 y_2(t_0, t_2) + \epsilon^3 y_3(t_0, t_2) + \dots, \\ = 2\epsilon k_* \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \rho_*\right) + 2\epsilon^2 \frac{\hat{\omega}_2}{3\hat{\omega}^2} \left(k_* \cos\left(\frac{4\pi}{T} t - 2\rho_*\right) - 3k_*^2\right) + \epsilon^3 \left(\frac{\hat{\omega}_2^2}{12\hat{\omega}^4} + \frac{\hat{\omega}_2^2 \hat{\omega}_3}{12\hat{\omega}^4}\right) k_*^3 \cos\left(\frac{6\pi}{T} t - 3\rho_*\right) + \dots.$$

Los anteriores resultados demuestran el siguiente resultado

Teorema 13. *Sea $\epsilon > 0$ fijo y pequeño. Para el set de parámetros (60) considere la ecuación diferencial con retraso*

$$\ddot{y} + \epsilon^2 (\xi \dot{y} + g \dot{y}_\tau) + \hat{\omega}^2 y + \hat{\omega}_2 y^2 + \hat{\omega}_3 y^3 = \alpha v((\hat{\omega} + \epsilon^2 \rho) t) \epsilon^3, \quad (70)$$

en donde $v(s)$ es una función 2π -periódica y con promedio $\bar{v} = 0$. Entonces, (70) admite una solución T -periódica $y_*(t, \epsilon)$ con expansión asintótica de la forma

$$y_*(t, \epsilon) = 2\epsilon k_* \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \rho_*\right) + 2\epsilon^2 \frac{\hat{\omega}_2}{3\hat{\omega}^2} \left(k_* \cos\left(\frac{4\pi}{T} t - 2\rho_*\right) - 3k_*^2\right) + \epsilon^3 \left(\frac{\hat{\omega}_2^2}{12\hat{\omega}^4} + \frac{\hat{\omega}_2^2 \hat{\omega}_3}{12\hat{\omega}^4}\right) k_*^3 \cos\left(\frac{6\pi}{T} t - 3\rho_*\right) + O(\epsilon^3),$$

cuya frecuencia de oscilación satisface $\frac{2\pi}{T} - \hat{\omega} = O(\epsilon)$, siendo $\hat{\omega}$ la frecuencia natural del oscilador lineal $\ddot{y} + \hat{\omega}^2 y = 0$. Más aún, $y_*(t, \epsilon)$ es localmente estable si se verifica la condición

$$\xi + g \cos(\hat{\omega}\tau) > 0, \quad \Leftrightarrow \quad G(1 - \cos(\hat{\omega}\tau)) + \frac{\gamma(1 - \hat{x}_1^2)^2}{8\beta v_0 \hat{x}_1} > 0,$$

además el punto (k_*, ρ_*) satisface

$$\left(\frac{\xi}{2} + \frac{g}{2} \cos(\hat{\omega}\tau)\right)^2 k_*^2 > \frac{\alpha c_1}{2\hat{\omega}} \cos \rho_* \left(\rho - \frac{g}{2} \sin(\hat{\omega}\tau) - 3\left(\frac{3\hat{\omega}_3}{2\hat{\omega}} - \frac{5\hat{\omega}_2^2}{6\hat{\omega}^3}\right) k_*^2\right),$$

siendo $c_1 = \int_{-\pi}^{\pi} v(s) e^{-is} ds$ el segundo coeficiente de Fourier de $v(s)$.

3-1-2. Sobre la existencia y estabilidad de soluciones periódicas

Como contribución final de este trabajo presentamos la existencia de soluciones periódicas para el modelo de Comb-drive desplazado (42) como continuación local a partir del caso sin retraso. La idea central consiste en el uso del teorema de la función implícita en espacios de Banach (Teorema 5) en conjugación con la existencia y estabilidad de soluciones periódicas para el caso sin retraso (Teorema 9). Iniciamos escribiendo la ecuación (42) como un sistema en el plano en la forma

$$\dot{X}(t) = H(t, X(t), X_\tau(t), G), \quad \text{con} \quad H(t, X, X_\tau, G) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ u - x - \gamma \dot{x} + \frac{4\beta(\tilde{v}(t) + G(\dot{x}_\tau - \dot{x}))^2 x}{(1-x^2)^2} \end{pmatrix}, \quad (71)$$

en donde $\tilde{v}(t) = v_0 + \delta v(t)$, $X(t) = (x(t), \dot{x}(t))^T$ y $X_\tau(t) = X(t - \tau)$. La función $H : \mathbb{R} \times \Omega \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida en $\Omega = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \in]-1, 1[\}$. Recordemos que el caso $G = 0$, a partir del Teorema 9 el sistema (71) admite tres soluciones periódicas $\Psi_j = \Psi_j(t)$, $j = 0, 1, 2$ (aisladas) dadas por

$$\Psi_0(t) = \begin{pmatrix} \hat{\rho}(t) \\ \hat{\rho}(t) \end{pmatrix}, \quad \Psi_1(t) = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1(t) \\ \hat{\psi}_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Psi_2(t) = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_2(t) \\ \hat{\psi}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Teorema 14. Sean $\Psi_j(t)$, $j \in \{0, 1, 2\}$ las soluciones T -periódicas de (37) dadas por el Teorema 9 con $u \ll 1$. Entonces, para cada $j \in \{0, 1, 2\}$ fijo, existe $\hat{\delta} > 0$, y una única función $X_G(t) = X(t, G)$ con $G \in J =]-\hat{\delta}, \hat{\delta}[$ y $X(\cdot, G) \in U$ con $U \subset C_T^1$ un entorno de $\Psi_j(t)$, la cual es T -periódica en t y es solución de (42) para todo $G \in J$, es decir,

$$\star \dot{X}_G(t) = H(t, X(t), X_\tau(t), G), \quad X_\tau(t+T) = X_\tau(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } G \in J.$$

$$\star X_0(t) = \Psi_j(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ con } \Psi_j \in \{\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2\}.$$

Demostración. Consideremos los espacios de Banach³ y definamos el funcional $\mathcal{H} : C_T^1 \times \mathbb{R} \rightarrow C_T^0$

$$C_T^1 = \{X \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) : X(t+T) = X(t)\} \quad \text{y} \quad C_T^0 = \{X \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) : X(t+T) = X(t)\},$$

dado por

$$\mathcal{H}(X, G) := \dot{X} - H(\cdot, X, X_\tau, G), \quad \text{con} \quad H(t, X, X_\tau, G) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ u - x - \gamma \dot{x} + \frac{4\beta(\bar{v}(t) + G(\dot{x}_\tau - \dot{x}))^2 x}{(1-x^2)^2} \end{pmatrix}.$$

La función \mathcal{H} está bien definida y es continua. Más aún, $\partial_X \mathcal{H}(X, \tau) \in L(C_T^1, C_T^0)$ y $\partial_G \mathcal{H}(X, \tau) \in L(\mathbb{R}, C_T^0)$ son dados por

$$\partial_X \mathcal{H}(X, G)(Y) := \dot{Y} - \partial_X H(\cdot, X, X_\tau, G)Y \quad \text{y} \quad \partial_G \mathcal{H}(X, G)(\hat{G}) = -\partial_G H(\cdot, X, X_\tau, G)\hat{G},$$

son continuas, por lo tanto \mathcal{H} es continuamente diferenciable con $D\mathcal{H} : C_T^1 \times \mathbb{R} \rightarrow L(C_T^1 \times \mathbb{R}, C_T^0)$ y además

$$D\mathcal{H}(X, \tau)(Y, G) = \dot{Y} - \partial_X H(\cdot, X, X_\tau, G)Y - \partial_G H(\cdot, X, X_\tau, G)\hat{G}.$$

Note que la ecuación $\mathcal{H}(X, 0) = 0$ tiene tres soluciones no triviales T -periódicas $\Psi_{0,1,2} = \Psi_{0,1,2}(t)$. Sea $\Psi^* \in \{\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2\}$ y considere por ejemplo la función $\Psi^*(t) = \Psi_1(t)$. Por el Teorema 9 se sigue directamente que el operador $\partial_X \mathcal{H}(\Psi^*, 0) : C_T^1 \rightarrow C_T^0$ con

$$\begin{aligned} \partial_X \mathcal{H}(\Psi^*, 0)(X(t)) &= \dot{X}(t) - \partial_X H(t, \Psi^*, \Psi_0^*)X(t), \\ &= \dot{X}(t) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4\beta V^2(t)(1+3\psi_1^2(t))}{(1-\psi_1^2(t))^3} - 1 & -\gamma \end{pmatrix} X(t), \end{aligned}$$

es inyectivo. Esto es, se sigue del hecho de que la ecuación

$$\partial_X \mathcal{H}(\Psi^*, 0)(X(t)) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \dot{X}(t) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4\beta V^2(t)(1+3\psi_1^2(t))}{(1-\psi_1^2(t))^3} - 1 & -\gamma \end{pmatrix} X(t) = 0,$$

no admite soluciones T -periódicas no triviales. (Ver la observación 1). Por lo tanto, por el Teorema 7 (Alternativa de Fredholm) el operador lineal y continuo $\partial_X \mathcal{H}(\Psi^*, 0)$ es invertible, esto es, para cada $Y \in C_T^0$ existe una única función $W \in C_T^1$ tal que $\partial_X \mathcal{H}(\Psi^*, 0)(W) = Y$. Ahora, invocando el Teorema 6 (teorema de la aplicación abierta), se garantiza que $(\partial_X \mathcal{H}(\Psi^*, 0))^{-1} : C_T^1 \rightarrow C_T^0$, $Y \rightarrow W$ es continua, vale decir, que $\partial_X \mathcal{H}(\Psi^*, 0)$ es un isomorfismo. En consecuencia, por el Teorema 5 (teorema de la función implícita) existe $\hat{\delta} > 0$ y una única función C^1 función $\Gamma : J =]-\hat{\delta}, \hat{\delta}[\rightarrow C_T^1$ tal que

$$\Gamma(0) = \Psi^* \quad \text{y} \quad \mathcal{H}(\Gamma(G), G) = 0, \tag{72}$$

para todo $\tau \in J$. La misma conclusión se obtiene si $\Psi^* = \Psi_0$ o bien $\Psi^* = \Psi_2$. Finalmente, la demostración se sigue si definimos $X_G = \Gamma(G)$. \square

³La norma en C_T^1 esta dada por $\|x\| = \|x\|_0 + \|\dot{x}\|_0$ con $\|\cdot\|_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$. La norma en C_T^0 esta dada por $\|\cdot\|_0$.

Quizás una de las primeras preguntas que surgen a partir del Teorema 14 y su posterior demostración, es si se podría hacer continuación sobre el parámetro del retraso $\tau \geq 0$. Vamos a dar respuesta a esta inquietud, pero antes vamos a necesitar de los siguientes resultados.

Lema 3. Sea $\psi = \psi(t)$ una solución T -periódica de (37), y supongamos que $0 < \varsigma \leq \psi(t) \leq \varrho$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$|\dot{\psi}(t)| \leq \Lambda(\varsigma, \varrho), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{en donde} \quad \Lambda(\varsigma, \varrho) := \gamma(\varrho - \varsigma) + \max \left\{ \left| \varrho - u - \frac{4\beta V_{\min}^2 \varsigma}{(1 - \varsigma^2)^2} \right|, \left| \varsigma - u - \frac{4\beta V_{\max}^2 \varrho}{(1 - \varrho^2)^2} \right| \right\} T.$$

Demostración. Dado que $\psi(t)$ es una función T -periódica, existe $t_0 \in [0, T]$ tal que $\dot{\psi}(t_0) = 0$. Por lo integrando (42) entre t_0 y t se tiene,

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= -\gamma(\psi(t) - \psi(t_0)) - \int_{t_0}^t \left(\psi(s) - u - \frac{4\beta V^2(s)\psi(s)}{(1 - \psi^2(s))^2} \right) ds, \\ |\dot{\psi}(t)| &\leq \gamma|\psi(t) - \psi(t_0)| + \int_{t_0}^t \left| \psi(s) - u - \frac{4\beta V^2(s)\psi(s)}{(1 - \psi^2(s))^2} \right| ds, \end{aligned}$$

Sabemos que $0 < \varsigma \leq \psi(t) \leq \varrho$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo tanto,

$$\varrho - u - \frac{4\beta V_{\min}^2 \varsigma}{(1 - \varsigma^2)^2} \geq \psi(t) - u - \frac{4\beta V^2(t)\psi(t)}{(1 - \psi(t)^2)^2} \geq \varsigma - u - \frac{4\beta V_{\max}^2 \varrho}{(1 - \varrho^2)^2},$$

en consecuencia

$$|\dot{\psi}(t)| \leq \gamma(\varrho - \varsigma) + \max \left\{ \left| \varrho - u - \frac{4\beta V_{\min}^2 \varsigma}{(1 - \varsigma^2)^2} \right|, \left| \varsigma - u - \frac{4\beta V_{\max}^2 \varrho}{(1 - \varrho^2)^2} \right| \right\} T,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Lema 4. Sea $\gamma > 0$ y $a, b \in C^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$. Suponga que

$$4a(t) \geq (\gamma + b(t))^2 + 2(\dot{b}(t))^2, \quad \text{y} \quad \|a(t) - \frac{1}{4}(\gamma + b(t))^2 - \frac{1}{2}(\dot{b}(t))^2\|_{L^\infty} \leq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces la ecuación de Hill

$$\ddot{y} + (\gamma + b(t))\dot{y} + a(t)y = 0, \tag{73}$$

no admite soluciones T -periódicas no triviales.

Demostración. Sea $y = y(t)$ cualquier solución de (73). Un cálculo directo muestra que la función $z = z(t)$ dada por

$$z(t) = y(t)w(t), \quad \text{en donde} \quad w(t) = \exp^{1/2 \int_0^t (\gamma + b(s)) ds},$$

satisface la ecuación de Hill

$$\ddot{z} + Q(t)z = 0, \quad \text{en donde} \quad Q(t) = a(t) - \frac{1}{4}(\gamma + b(t))^2 - \frac{1}{2}(\dot{b}(t))^2. \tag{74}$$

Por hipótesis la función $Q(t)$ satisface

$$0 < Q(t), \quad \text{y} \quad \|Q\|_{L^\infty} \leq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2.$$

Por el criterio de estabilidad de Lyapunov-Borg (ver Teorema 5 en [5]) sabemos que $z = z(t)$ de (74) es acotada. En consecuencia, $y(t)$ no puede ser acotada, pues en caso contrario $w(t) = z(t)/y(t)$ sería una función acotada lo cual es una contradicción. En particular, $y(t)$ no puede ser una solución periódica. \square

Teorema 15. Sea $\Psi_j(t) = (\hat{\psi}_j(t), \dot{\hat{\psi}}_j(t))^{tr}$ con $j \in \{0, 1, 2\}$, las soluciones T -periódicas de (37) dadas por el Teorema 9 con $u \ll 1$, para la cual se verifica $0 \leq \delta_j \leq \hat{\psi}_j(t) \leq \xi_j$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponga que

$$\frac{1}{4}(\gamma + b^*)^2 + \frac{1}{2}(b^*)^2 \leq 1 - \frac{4\beta V_{\max}^2(1 + 3\xi_1^2)}{(1 - \xi_1^2)^3}, \quad y \quad 1 - \frac{4\beta V_{\min}^2(1 + 3\delta_1^2)}{(1 - \delta_1^2)^3} \leq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2, \quad (75)$$

en donde b^*, \dot{b}^* están dados por

$$b^* = \frac{2G}{V_{\max}} \frac{(\xi_1 - u)\xi_1}{(1 - \xi_1^2)}, \quad y \quad \dot{b}^* := 8G\beta \left(\frac{\|\dot{V}\|_{\infty}\xi_1}{(1 - \xi_1^2)^3} + \frac{V_{\max}(1 + 5\xi_1^2)}{(1 - \xi_1^2)^4} \Lambda(\delta_1, \xi_1) \right),$$

con $\Lambda(\delta_1, \xi_1)$ dado como en el Lema 3. Entonces existe un $\hat{\delta} > 0$, y una única función $X_\tau(t) = X(t, \tau)$ con $\tau \in I =] - \hat{\delta}, \hat{\delta}[$ y $X(\cdot, \tau) \in U$ con $U \subset C_T^1$ un entorno de $\Psi_1(t)$, la cual es T -periódica en t y es solución de (42) para todo $\tau \in J$, es decir,

$$\star \quad \dot{X}_\tau(t) = H(t, X(t), X_\tau(t), \tau), \quad X_\tau(t + T) = X_\tau(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } \tau \in I.$$

$$\star \quad X_0(t) = \Psi_1(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Es claro que la prueba sigue las mismas líneas de la demostración del Teorema 14 con la sustitución $G \rightarrow \tau$. La diferencia ahora radica en demostrar $\partial_X \mathcal{H}(\Psi^*, 0) : C_T^1 \rightarrow C_T^0$ con $\Psi^* = \Psi_1$, el cual esta dado por

$$\partial_X \mathcal{H}(\Psi^*, 0)(X(t)) = \dot{X}(t) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4\beta V^2(t)(1 + 3\hat{\psi}_1^2(t))}{(1 - \hat{\psi}_1^2(t))^3} - 1 & -\gamma - \frac{8GV(t)\hat{\psi}_1(t)}{(1 - \hat{\psi}_1^2(t))^3} \end{pmatrix} X(t),$$

es inyectivo. Lo anterior equivale a demostrar que la ecuación de Hill

$$\ddot{y} + \left(\gamma + \frac{8G\beta V(t)\hat{\psi}_1(t)}{(1 - \hat{\psi}_1^2(t))^3} \right) \dot{y} + \left(1 - \frac{4\beta V^2(t)(1 + 3\hat{\psi}_1^2(t))}{(1 - \hat{\psi}_1^2(t))^3} \right) y = 0, \quad (76)$$

no admite soluciones T -periódicas no triviales. Definamos entonces

$$a(t) = 1 - \frac{4\beta V^2(t)(1 + 3\hat{\psi}_1^2(t))}{(1 - \hat{\psi}_1^2(t))^3}, \quad y \quad b(t) = \frac{8G\beta V(t)\hat{\psi}_1(t)}{(1 - \hat{\psi}_1^2(t))^3}.$$

Ahora bien, sabemos para todo $t \in \mathbb{R}$, la función periódica $\hat{\psi}_1(t)$ se encuentra en el dominio

$$E_1 = \{(t, x, \dot{x}) \in [0, T] \times]0, \zeta(u)[\times \mathbb{R} : \delta_1 \leq x \leq \xi_1\},$$

más aún, sobre E_1 se verifica que

$$0 < a_* < a(t) < a^*, \quad \text{con} \quad a_* = 1 - \frac{4\beta V_{\max}^2(1 + 3\xi_1^2)}{(1 - \xi_1^2)^3}, \quad y \quad a^* = 1 - \frac{4\beta V_{\min}^2(1 + 3\delta_1^2)}{(1 - \delta_1^2)^3} < 1 - 4\beta V_{\min}^2,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. De otro lado, dado que

$$(\delta_1 - u)(1 - \delta_1^2)^2 = 4\beta V_{\min}^2, \quad y \quad (\xi_1 - u)(1 - \xi_1^2)^2 = 4\beta V_{\max}^2,$$

se deduce que

$$0 < b_* < b(t) < b^*, \quad \text{con} \quad b_* = \frac{2G}{V_{\min}} \frac{(\delta_1 - u)\delta_1}{(1 - \delta_1^2)}, \quad y \quad b^* = \frac{2G}{V_{\max}} \frac{(\xi_1 - u)\xi_1}{(1 - \xi_1^2)},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. De manera similar se puede comprobar que para la función

$$\dot{b}(t) = 8G\beta \left(\frac{\dot{V}(t)\hat{\psi}_1}{(1 - \hat{\psi}_1^2)^3} + \frac{V(t)(1 + 5\hat{\psi}_1^2)}{(1 - \hat{\psi}_1^2)^4} \hat{\psi}_1(t) \right),$$

se cumple que

$$0 < \dot{b}(t) < \dot{b}^*, \quad \text{en donde} \quad \dot{b}^* := 8G\beta \left(\frac{\|\dot{V}\|_{\infty}\xi_1}{(1 - \xi_1^2)^3} + \frac{V_{\max}(1 + 5\xi_1^2)}{(1 - \xi_1^2)^4} \Lambda(\delta_1, \xi_1) \right).$$

De lo anterior y las condiciones (75) se sigue directamente

$$4a(t) \geq (\gamma + b(t))^2 + 2(\dot{b}(t))^2, \quad y \quad \|a(t) - \frac{1}{4}(\gamma + b(t))^2 - \frac{1}{2}(\dot{b}(t))^2\|_{L^{\infty}} \leq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2.$$

Por lo tanto, del Lema 4 se sigue que la ecuación de Hill (76) no admite soluciones T -periódicas no triviales, lo que prueba que el operador $\partial_X \mathcal{H}(\Psi^*, 0)$ es inyectivo. El resto de la demostración es análoga a la demostración del Teorema 14. \square

Observación 4. En el caso $G < 0$ tenemos

$$0 < b_* < |b(t)| < b^*, \quad \text{con} \quad b_* = \frac{2|G|}{V_{\min}} \frac{(\delta_1 - u)\delta_1}{(1 - \delta_1^2)}, \quad y \quad b^* = \frac{2|G|}{V_{\max}} \frac{(\xi_1 - u)\xi_1}{(1 - \xi_1^2)},$$

$$0 < |\dot{b}(t)| < \dot{b}^*, \quad \text{en donde} \quad \dot{b}^* := 8|G|\beta \left(\frac{\|\dot{V}\|_{\infty}\xi_1}{(1 - \xi_1^2)^3} + \frac{V_{\max}(1 + 5\xi_1^2)}{(1 - \xi_1^2)^4} \Lambda(\delta_1, \xi_1) \right).$$

Observación 5. Cabe mencionar que el Teorema 15 es aún válido si se consideran las soluciones T -periódicas $\Psi_0(t)$, y $\Psi_2(t)$ de (37) dadas por el Teorema 9 con $u \ll 1$. Adicionalmente, por continuidad, las soluciones $X_{\tau}(t) = X(t, \tau)$ con $\tau \in I =] - \hat{\sigma}, \hat{\sigma}[$ preservan la estabilidad correspondiente del caso $t = 0$. Esto es, $\Psi_0(t)$, y $\Psi_2(t)$ son inestables y $\Psi_1(t)$ es asintóticamente estable siempre que $\gamma \leq \min\{\gamma^*, \gamma^{**}\}$ con γ^* y γ^{**} dados en el Teorema 9. Además, de la segunda condición en se verifica que

$$a(t) < 1 - \frac{4\beta V_{\min}^2 (1 + 3\delta_1^2)}{(1 - \delta_1^2)^3} < \left(\frac{\pi}{T}\right)^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esta condición es más débil que la presente en el Teorema 9 en donde se pide que $1 - 4\beta V_{\min}^2 < \left(\frac{\pi}{T}\right)^2$, puesto que

$$a(t) < 1 - \frac{4\beta V_{\min}^2 (1 + 3\delta_1^2)}{(1 - \delta_1^2)^3} < 1 - 4\beta V_{\min}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

4. Validación Numérica

En esta sección presentamos algunos ejemplos numéricos de los resultados analíticos presentes en la Sección 3-1 sobre el modelo Comb-drive desplazado (43),

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x - u = \frac{4\beta(v_0 + G(\dot{x}_\tau - \dot{x}))^2 x}{(1 - x^2)^2}, \quad x \in]-1, 1[.$$

Nuestra validación numérica de algunos de los resultados principales obtenidos en este documento inicia con los correspondientes al modelo de referencia sin retraso (caso $\tau = 0$). Para tal fin, hemos tomado de [11] los siguientes valores de referencia para los parámetros físicos que conforman el modelo Comb-drive desplazado (4), los cuáles registramos en la siguiente tabla

ϵ [F/m]	Le [m ²]	d [m]	c [Kg/s]	m [Kg]	k [N/m]
8.85×10^{-12}	1.6×10^{-9}	3.5×10^{-6}	1.78×10^{-6}	3.5×10^{-11}	0.17

Tabla 1. Valores de los parámetros físicos para el modelo Comb-drive desplazado (43).

En adelante fijamos un desplazamiento $u = 0.05$. Por lo que se llega al conjunto de parámetros

$$\beta \approx 9.7135 \times 10^{-4}, \quad \gamma \approx 0.7297, \quad \xi_+ \approx 0.4677, \quad \text{y} \quad \vartheta_* \approx 0.7032.$$

De esta forma se establece el valor de voltaje crítico $v_{\text{pull}} \approx 13.4529$. En consecuencia se consideran valores del voltaje de corriente directa $0 < v_0 < v_{\text{pull}}$ apropiados. A partir de aquí, el equilibrio $0 < \hat{x}_1 < \xi_+$ está dado por la raíz del polinomio

$$p(x) := \phi(x, 0.05) - \vartheta x = (x - 0.05)(1 - x^2)^2 - 4\beta v_0^2 x,$$

ubicada en $[0, \xi_+]$. Las siguientes tablas presentan los valores de $\hat{\omega}$, \hat{x}_1 , a , χ y g para distintos valores distintos de v_0 en el caso $G = -95$ y $G = -50$ respectivamente.

v_0	\hat{x}_1	$\hat{\omega}$	a	χ	G	η	g	τ_0
2.5	0.051	0.987	-0.975	0.485	-95	729.795	-0.0950	1.547
5	0.055	0.949	-0.901	0.468	-95	336.931	-0.2058	0.705
7.5	0.064	0.880	-0.775	0.431	-95	193.729	-0.3580	0.388
10	0.082	0.771	-0.595	0.355	-95	112.420	-0.6173	0.162
13	0.162	0.481	-0.231	0.149	-95	42.048	-1.6486	0.011

Tabla 2. Valores asociados a los parámetros presentados en los Teoremas 10 y 11 con el set de parámetros físicos vistos en la Tabla 1 variando la fuente de voltaje constante. Caso $G = -95$.

v_0	\hat{x}_1	$\hat{\omega}$	a	χ	G	η	g	τ_0
2.5	0.051	0.987	-0.975	0.485	-50	729.795	-0.049	3.000
5	0.055	0.949	-0.901	0.468	-50	336.931	-0.108	1.340
7.5	0.064	0.880	-0.775	0.431	-50	193.729	-0.188	0.737
10	0.082	0.771	-0.595	0.355	-50	112.420	-0.324	0.377
13	0.162	0.481	-0.231	0.149	-50	42.048	-0.867	0.032

Tabla 3. Valores asociados a los parámetros presentados en los Teoremas 10 y 11 con el set de parámetros físicos vistos en la Tabla 1 variando la fuente de voltaje constante. Caso $G = -50$.

Vemos en la Tabla 3 que para una fuente de voltaje constante $v_0 = 2.5$, el equilibrio $\hat{x}_1 \approx 0.0825$. Con esto se define

$$\hat{\omega}^2 = \frac{-4\hat{x}_1^3 + 3u\hat{x}_1^2 + u}{\hat{x}_1(1 - \hat{x}_1^2)} \approx 0.9753,$$

con lo cual se comprueba que se cumple con la condición $0 < \gamma < 2\sqrt{0.9753} \approx 1.9751$, por lo tanto, el equilibrio \hat{x}_1 es localmente asintóticamente estable para este set de parámetros elegidos. El equilibrio $(\hat{x}_1, 0)$ es un equilibrio tipo centro con periodo mínimo $\hat{\mathcal{T}} = 2\pi/\hat{\omega}$, en nuestro caso $\hat{\omega} \approx 0.9876$ así que $\hat{\mathcal{T}} \approx 6.36207$. Por lo tanto $\tau \in \mathcal{I} \subseteq [0, 6.36207]$.

Siguiendo los resultados del Teorema 10, fijando $G = -50$ se calculan los parámetros

$$a \approx -0.9753, \quad g \approx -0.0490, \quad \chi \approx 0.4850,$$

y estimamos el valor crítico del parámetro τ_0 , en tal caso se obtiene $\tau_0 \approx 3.0008$. Es decir, la ecuación (43) tiene un estado de equilibrio \hat{x}_1 localmente asintóticamente estable para todo $0 \leq \tau < 3.0008$.

Ahora nos ocupamos en las condiciones asociadas a la ganancia G descritas en el Teorema 11, se calcula

$$\eta = \frac{\gamma(1 - \hat{x}_1^2)^2}{8\beta v_0 \hat{x}_1} \approx 729.0599,$$

dado que $G_{\min} = -\eta/2$ decimos que se debe cumplir $G > -364.529$, lo cual se cumple en nuestro caso.

Llegados a este punto se inician las simulaciones para el sistema (49) con los valores de los parámetros descritos en la Tabla 1, es decir el sistema (49) toma la forma

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{38.8539 \times 10^{-4} (2.5 - 50(z_{2\tau} - z_2))^2 z_1}{(1 - z_1^2)^2} - 0.7297z_2 - z_1 + 0.05 \end{aligned} \right\}. \quad (77)$$

Utilizamos el paquete `jitcdde` de Python con el cual determinaremos soluciones numéricas asociadas al sistema (77), se le pide al lector revisar [16] para más información acerca de la simulación de soluciones para un sistema de ecuaciones diferenciales con retraso. Con este propósito en mente, se le será asignada como función histórica el punto $hist = (\hat{x}_1 + \tilde{t}_1, 0 + \tilde{t}_2)$ donde $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in \mathbb{R}$ representa una cierta distancia que se tiene con el punto de equilibrio $(\hat{x}_1, 0)$.

Empezaremos determinando las soluciones en el caso sin retraso $\tau = 0$ y seguidamente planteamos casos donde $\tau > 0$, la idea será caracterizar los efectos que nos deja la variación de los distintos parámetros descritos en el documento.

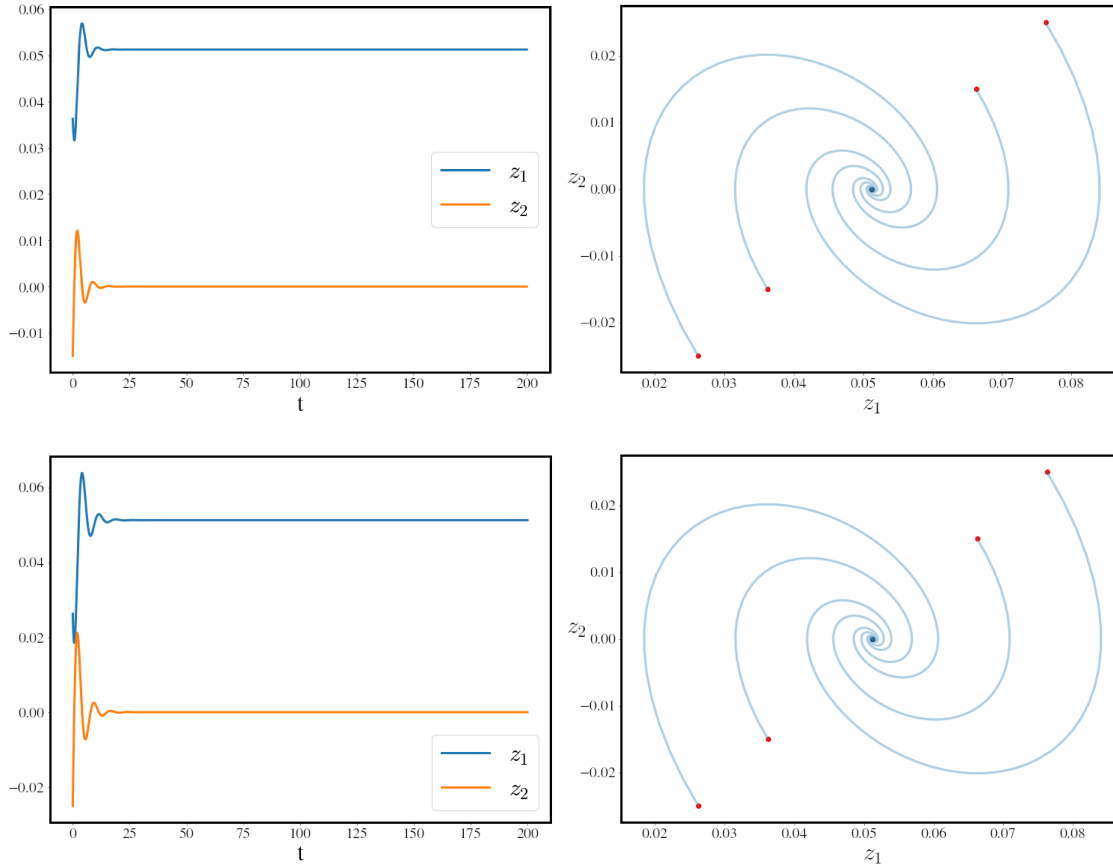


Figura 8. En la izquierda las soluciones z_1 y z_2 del sistema (77) a lo largo del tiempo t , a la derecha un plano fase con cuatro soluciones con los valores $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_2 \in \{-0.25, -0.15, 0.15, 0.25\}$. Caso $\tau = 0$ en la fila superior y el caso $\tau = 1.75$ en la fila inferior.

Se puede evidenciar en la figura anterior como para valores de \tilde{t}_1 y \tilde{t}_2 cercanos a cero nos deja con soluciones que se estabilizan hacia el equilibrio estable $(\hat{x}_1, 0)$. Ahora queremos mostrar el efecto que genera los valores grandes de τ en el sistema (77). Se calcularon las soluciones con las mismas características pero con valores de τ ascendentes, las soluciones se expresan en un plano fase que se extiende en el eje τ . En la Figura 8 se observaron los efectos del retraso en las soluciones de (77). Nos preguntamos ahora sobre el efecto en los cambios asociados a la fuente de voltaje constante v_0 con este fin hemos generado soluciones con los valores de los parámetros idénticos pero con fuentes de voltaje cada vez más altos, esto nos permitirá describir el efecto que genera un cambio de voltaje en las soluciones de (43).

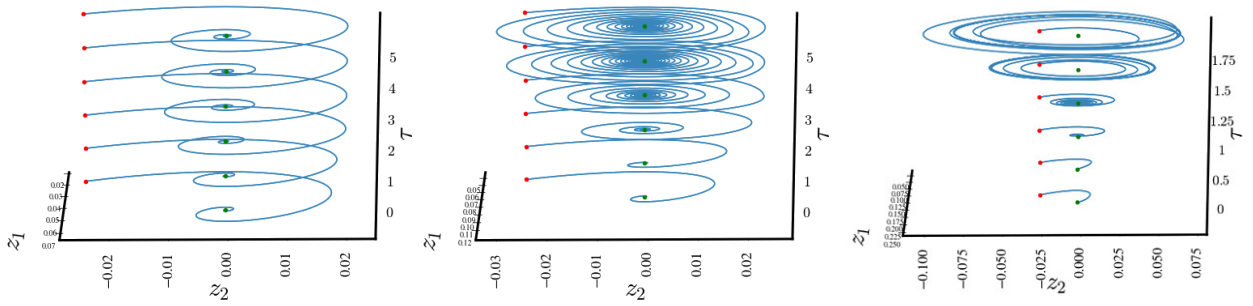


Figura 9. Planos fases de las soluciones asociadas a diferentes fuentes de voltaje constantes ν_0 a lo largo del eje τ con $\nu_0 \in \{5, 10, 13\}$ de izquierda a derecha respectivamente, se usaron los parámetros físicos vistos en la Tabla 1 en todas las soluciones.

Evidenciamos que al aumentar el retraso y la fuente de voltaje constante las soluciones oscilan cada vez más del equilibrio. Ahora se analizará el caso donde la fuente de voltaje constante toma el valor $\nu_0 = 13 < \nu_{\text{pull}} \approx 13.4529$, notese que el ν_0 es cercano al voltaje crítico ν_{pull} , con una ganancia fija $G = -50$. Para este nuevo caso tenemos el siguiente sistema

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{38.8539 \times 10^{-4} (13 - 50(z_{2\tau} - z_2))^2 z_1}{(1 - z_1^2)^2} - 0.7297 z_2 - z_1 + 0.05 \end{aligned} \right\}. \quad (78)$$

Según la Tabla 3 el equilibrio en este caso es $\hat{x}_1 \approx 0.1628$ y $\hat{\omega}^2 = 0.2316$ se comprueba que se cumple la condición $0 < \gamma < 2\sqrt{0.2316} = 0.9624$ por lo tanto el equilibrio \hat{x}_1 es asintóticamente estable.

El equilibrio $(\hat{x}_1, 0)$ es un equilibrio tipo centro con periodo mínimo $\hat{\mathcal{T}} = 2\pi/\hat{\omega}$, en nuestro caso $\hat{\omega} \approx 0.4812$ así que $\hat{\mathcal{T}} \approx 13.0573$. Por lo tanto $\tau \in \mathcal{I} \subseteq [0, 13.0573]$. En la Tabla 3 se nos da los parámetros $a \approx -0.2316$, $g \approx -0.8677$, $\chi \approx 0.1493$, y estimamos el valor crítico del parámetro τ_0 , en tal caso se obtiene $\tau_0 \approx 0.0327$. Es decir, la ecuación (43) tiene un estado de equilibrio \hat{x}_1 localmente asintóticamente estable para todo $0 \leq \tau < 0.0327$.

Revisamos las condiciones del Teorema 11, se calcula

$$\eta = \frac{\gamma(1 - \hat{x}_1^2)^2}{8\beta\nu_0\hat{x}_1} \approx 42.0484,$$

dado que $G_{\text{mín}} = -\eta/2$ decimos que se debe cumplir $G > -21.0242$, debido a que previamente hemos fijado un valor $G = -50$ esta condición no se cumple en este caso. Iniciamos la simulación de soluciones para el sistema (78) en la Figura 10 la tercera ilustración de izquierda a derecha muestra el comportamiento del sistema (78) al aumentar el retraso τ , queremos profundizar en el comportamiento oscilatorio que se consiguió en dicho caso, procederemos a observar el comportamiento de las soluciones en este caso.

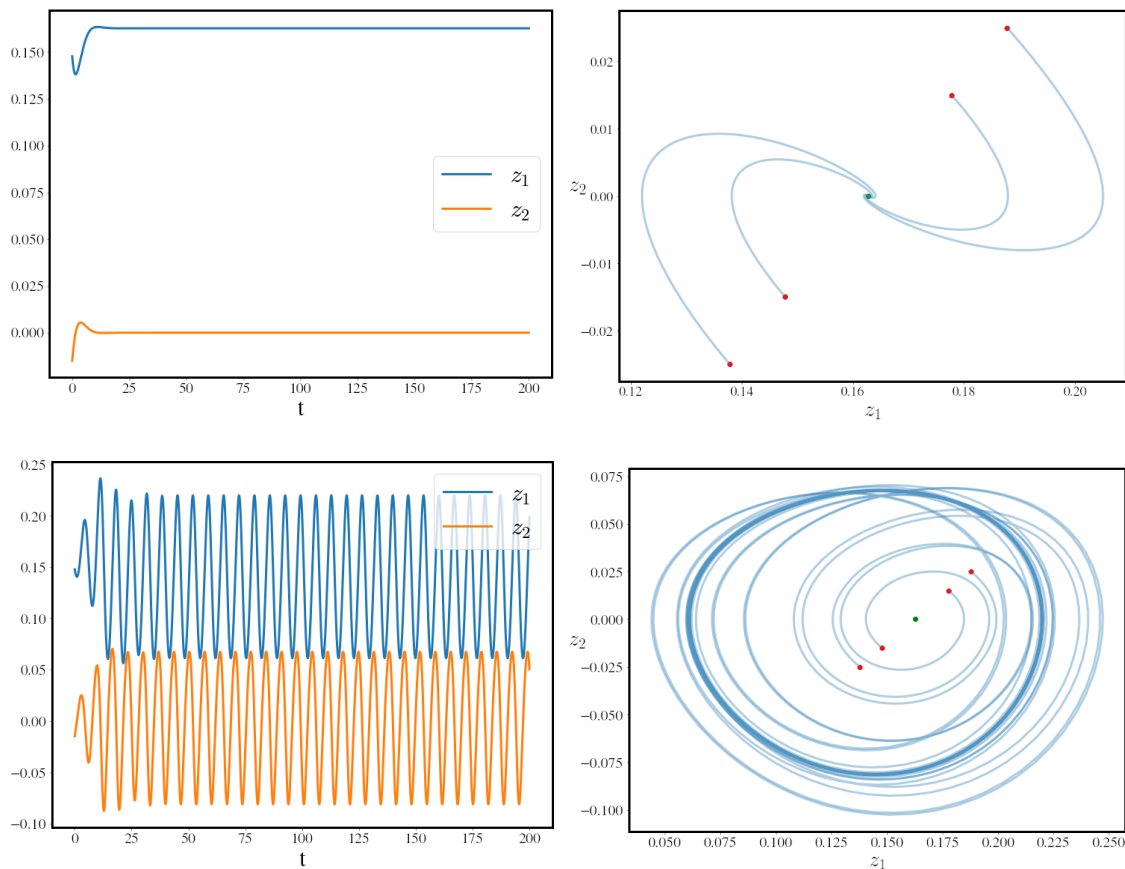


Figura 10. A la izquierda se observan las soluciones z_1 y z_2 del sistema (78) a lo largo del tiempo t , a la derecha un plano fase con cuatro soluciones con los valores $\bar{t}_1 = \bar{t}_2 \in \{-0.25, -0.15, 0.15, 0.25\}$. Caso $\tau = 0$ en la fila superior y el caso $\tau = 1.75$ en la fila inferior.

No es posible caracterizar soluciones con valores para el retraso τ mayores a 2 usando el paquete `jitcdde` del software Python, esto nos dice algo sobre la sensibilidad que tiene el sistema (78) con los valores que puede tomar el retraso τ , además se ha dicho que en este caso la ganancia esta por debajo al mínimo impuesto en el Teorema 11 esto se relaciona con la incapacidad de determinar soluciones con un retraso τ alto. Comparando los resultados obtenidos en las soluciones a los sistemas (77) y (78) evidenciamos un mayor efecto de oscilación alrededor del equilibrio estable a fuentes de voltaje de valor cercanas al voltaje crítico y a valores del retraso τ también altos, dicho retraso τ se mantiene en valores menores que en casos con fuentes de voltajes más lejanas al voltaje crítico.

Con esto cerramos la validación numérica de nuestros resultados principales.

Conclusiones

En este documento se estudia analíticamente los efectos de un controlador realimentado con retraso $\tau \geq 0$ en el tiempo, sobre un actuador microelectromecánico tipo peine, modelado por la ecuación

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x - u = \frac{4\beta V^2(t, \varphi(\dot{x}(t), \dot{x}_\tau(t)))x}{(1-x^2)^2},$$

con $x \in]-1, 1[$ y $u \in [0, 1[$ fijo. El efecto de retraso se ve reflejado en la ecuación por medio de la función

$$\varphi(\dot{x}(t), \dot{x}_\tau(t)) = G(\dot{x}_\tau(t) - \dot{x}(t)) = G(\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}(t)),$$

con $|G| \in \mathbb{R}^+$ la amplitud de la velocidad del controlador. Nuestro punto de inicio consistió en analizar la dinámica del sistema cerca al punto de equilibrio asintóticamente estable $\hat{x}_1 \in]0, 1[$, del caso autónomo correspondiente. Esto nos permitió establecer dos criterios distintos para que la estabilidad asintótica de \hat{x} la cual bajo condiciones apropiadas se tiene en el caso sin retraso ($\tau = 0$), persista aún para el caso $\tau > 0$.

Un primer criterio (Teorema 10) brinda un valor explícito y computable del retraso en términos de los parámetros de construcción del dispositivo β , γ , el voltaje de corriente directa v_0 y la velocidad del controlador $|G|$. Los resultados numéricos muestran que en el caso sin retraso ($\tau = 0$), las soluciones que convergen al equilibrio más rápido que aquellas con retardo $\tau > 0$, y en particular estas últimas presentan una mayor amplitud respecto que las primeras. Cabe aclarar que las validaciones numéricas que se han hecho, muestran que nuestro resultado analítico es correcto pero esta lejos de estimar de forma óptima una cota superior para el retraso, en la cual se garantice la estabilidad del equilibrio \hat{x}_1 . Esto nos motiva a pensar para futuros trabajos, otras estrategias de estimación para el retraso. Por ahora, este resultado explícito sobre el actuador tipo peine (e incluso sobre muchos MEMS similares como el actuador de Nathanson) hasta donde sabemos no se había obtenido previamente.

El segundo criterio (Teorema 11), se establece una relación funcional entre la ganancia $G \in \mathbb{R}$ y el retraso $\tau \in [0, 2\pi/\hat{\omega}]$ ($\hat{\omega}$ es la frecuencia de oscilación natural del dispositivo cerca del equilibrio estable), que brinda condiciones suficientes para que el equilibrio \hat{x}_1 sea asintóticamente estable para todo $\tau \in [0, 2\pi/\hat{\omega}]$. En este caso, se logró determinar explícitamente una cota mínima y negativa para G (mínimo feedback), en términos de los parámetros de construcción del dispositivo β , el voltaje de corriente directa v_0 y el coeficiente de amortiguamiento γ . Cabe resaltar que esta cota mínima G_{\min} y si criterio de estabilidad asintótica dado por

$$G > G_{\min} := \frac{-\gamma(1-x^2)^2}{16\beta v_0 \hat{x}_1}, \quad \forall \tau \in [0, 2\pi/\hat{\omega}]$$

guarda una cercana relación con la condición de estabilidad de la solución T -periódica del problema perturbado obtenido por medio del método de múltiples escalas, al asumir como una pequeña perturbación del equilibrio \hat{x}_1 (caso conservativo), asumiendo pequeños efectos del controlador realimentado, pequeña amplitud de la fuente de voltaje periódico y pequeña constante de amortiguamiento. Dicha condición de estabilidad establece que

$$G(1 - \cos \hat{\omega}\tau) + \frac{\gamma(1 - \hat{x}_1^2)^2}{8\beta\nu_0\hat{x}_1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad G(1 - \cos(\hat{\omega}\tau)) + 2G_{\min} > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}^+$$

por lo que esta condición de estabilidad de la solución periódica implica la condición de estabilidad del equilibrio dada en el Teorema 11. Numéricamente se ha verificado esta afirmación en el capítulo de validación numérica.

Finalmente, se ha mostrado que para pequeños valores de G y cualquier valor de τ existe exactamente 3 soluciones periódicas (cuya estabilidad persiste). Esperamos obtener muy pronto un análogo resultado de continuación de soluciones periódicas, pero esta vez utilizando como parámetro de continuación el retraso τ (no es el parámetro G). Se espera validar numéricamente que en este escenario, el intervalo de continuación sea por lo menos tan grande como el intervalo $[0, \tau_0]$ con τ_0 dado en el Teorema 10.

Se propone para futuras investigaciones las siguientes cuestiones: ¿Que efectos tendría un retraso τ no constante?, dichos retrasos se pueden pensar como funciones dependientes del tiempo t en los sistemas trabajados en este documento. Aquí no se profundizó en la posibilidad de integrar funciones históricas que hagan las veces de condiciones iniciales para los sistemas trabajados en el documento, para solucionar los sistemas (77) y (78) hemos usado el vector $[\hat{x}_1 + \tilde{i}_1, 0 + \tilde{i}_2]$ como condición inicial, ¿como cambian dichas soluciones al implementar una condición inicial no constante?.

Bibliografía

- [1] Pablo Amster, *Topological methods in the study of boundary value problems*, 01 2014.
- [2] ———, *Cursos y seminarios de matemáticas serie B. ecuaciones diferenciales con retardo*, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires., 01 2017.
- [3] Pablo Amster and Lev Idels, *Periodic solutions in general scalar non-autonomous models with delays*, *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA* **20** (2013).
- [4] Juan P. Berón V., *Existence, uniqueness and stability of periodic solutions of Lienard type equations*, (2020).
- [5] A. Cabada, J. Cid, and L. Somoza, *Maximum principles for the hill's equation*, Elsevier Science, 2017.
- [6] Colette De Coster and Patrick Habets, *Upper and lower solutions in the theory of Ode boundary value problems: Classical and recent results*, 1996.
- [7] O. Diekmann, S.A. van Gils, S.M. Verduyn Lunel, and H.-O. Walther, *Delay equations: Functional-, complex-, and nonlinear analysis*, Springer, 1995.
- [8] P. Fitzpatrick, M. Furi, M. Martelli, P. Zecca, J. Mawhin, and R. Nussbaum, *Topological methods for ordinary differential equations*, C.I.M.E. Foundation Subseries. Springer, 1993.
- [9] K. Gopalsamy, *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*, *Mathematics and Its Applications* **74** (1992), 1–502.
- [10] Alexánder Gutiérrez, Daniel Núñez, and Andrés Rivera Acevedo, *Effects of voltage change on the dynamics in a comb-drive finger of an electrostatic actuator*, *International Journal of Non-Linear Mechanics* **95** (2017), 224–232.
- [11] Alexánder Gutiérrez and Pedro Torres, *Nonautonomous saddle-node bifurcation in a canonical electrostatic MemS*, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **23** (2013), 50088–.
- [12] J.K. Hale and S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Springer, 1993.
- [13] Carlos Ivorra, *Las fórmulas de Cardano-Ferrari*, <https://www.uv.es/~ivorra/Libros/Ecuaciones.pdf>, accessed: 2023-03-11.
- [14] Steven G. Krantz and Harold R. Parks, *The implicit function theorem, history, theory and applications*, (1992), 163.
- [15] Jaume Llibre, Daniel Núñez, and Andrés Rivera Acevedo, *Periodic solutions of the Nathanson's and the Comb-drive models*, *International Journal of Non-Linear Mechanics* **104** (2018).

- [16] Ettore Messina, *Solving delay differential equations using numerical methods in Python*, <https://computationalmindset.com/en/mathematics/solving-delay-differential-equations-in-python-using-numerical-methods.html>, 2022, accessed: 2023-01-27.
- [17] Harvey C. Nathanson, William E. Newell, Robert A Wickstrom, and J. R. Davis, *The resonant gate transistor*, IEEE Transactions on Electron Devices **14** (1967), 117–133.
- [18] A.H. Nayfeh, *Introduction to perturbation techniques*, Wiley Classics Library, Wiley, 2011.
- [19] D. Nuñez, L. Murcia, and J. Galán, *Stable periodic oscillations in simple parallel-plate Mems bases on a family of graphene-ike materials*, International Journal of Non-linear Mechanics **149** (2023).
- [20] Daniel Núñez, Oscar Perdomo, and Andrés Rivera, *On the stability of periodic solutions with defined sign in Mems via lower and upper solutions*, Nonlinear Analysis: Real World Applications (2019).
- [21] Kestutis Pyragas, *Continuous control of chaos by self-controlling feedback*, Physics Letters A **170** (1992), no. 6, 421–428.
- [22] Andrés Rivera, J. Thibodeaux, and Johan S. Sánchez, *Existence and stability of periodic solutions of a shifted Comb-drive finger actuator*, Journal of Applied Nonlinear Dynamics 11(1) (2022) 247–269 (2022).
- [23] Lawrence Shampine and Skip Thompson, *Solving delay differential equations with dde23*, (2000).
- [24] L.F. Shampine and P. Gahinet, *Delay-differential-algebraic equations in control theory*, Applied Numerical Mathematics **56** (2006), no. 3, 574–588, Selected Papers, The Third International Conference on the Numerical Solutions of Volterra and Delay Equations.
- [25] Shuai Shao, Karim Masri, and Mohammad Younis, *The effect of time-delay feedback controller on an electrically actuated resonator*, Nonlinear Dynamics **74** (2013).
- [26] Hal L. Smith, *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*, Texts in Applied Mathematics (2011), 1–185.
- [27] Johan S. Sánchez V., *Existencia y estabilidad de soluciones periódicas en un actuador electrostático tipo peine con electrodo móvil desplazado*, (2018).
- [28] D. Wei, S. Kadyrov, and Z. Kazbek, *Periodic solutions of a graphene based model in micro-electromechanical pull-in device.*, Computational Mechanics **11** (2017), no. 1.
- [29] M.I. Younis, *MEMS linear and nonlinear statics and dynamics*, Microsystems, Springer US, 2011.
- [30] Eberhard Zeidler, *Applied functional analysis. Main principles and their applications*, Springer-Verlag, 1995.
- [31] Wen-Ming Zhang, Han Yan, Zhi-Ke Peng, and Guang Meng, *Electrostatic pull-in instability in MEMS/NEMS: A review*, Sensors and Actuators A: Physical **214** (2014), 187–218.

I. Apéndice

I-I. Sobre las raíces de ecuaciones cúbicas

Los resultados acerca de las raíces de una ecuación cúbica ha sido sin lugar a dudas una de las estrategias de la teoría algebraica de los números reales. Dada su importancia y su utilidad en este trabajo presentamos brevemente este importante resultado.

Teorema I: Fórmula de Cardano-Vietta. [13]. *Considere una ecuación cúbica de la forma*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad (\dagger)$$

con $a, b, c \in K$, con K un cuerpo de característica distinta a 2 o 3. Entonces las raíces de (\dagger) están dadas por

$$x = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{\Delta}} - a/3,$$

en donde

$$p = \frac{3b - a^2}{3}, \quad q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}, \quad \Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

la raíz cuadrada de Δ se escoge de forma arbitraria y, fijada ésta, las raíces cúbicas u y v se elijen de manera que $p = -3uv$. Más aún, si $\Delta < 0$ entonces las tres raíces son reales y simples dadas por

$$x_k = 2 \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right) \sqrt{-\frac{p}{3} - \frac{a}{3}}, \quad k = 0, 1, 2$$

en donde el ángulo $0 < \theta < \pi$ está determinado por

$$\cos\theta = \frac{-q/2}{\sqrt{-(p/3)^3}}.$$

I-II. Sobre la estimación del parámetro de retraso

Consideremos el sistema diferencial de retardo matricial [9]

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BX(t - \tau), \quad (\text{I})$$

si la solución trivial de (I) es asintóticamente estable cuando $\tau = 0$, para qué valores positivos de τ se mantiene tal estabilidad. Hay varias formas posibles de responder a la pregunta anterior, cada una de las cuales conduce a una estimación diferente de τ_0 .

$$\dot{Y} = (A + B)Y \quad (\text{II})$$

El siguiente resultado proporciona una estimación alternativa del parámetro de retardo τ en (I) para mantener la asintótica estabilidad de la solución trivial de (III).

Teorema II. Sean A y B matrices reales $n \times n$ constantes tales que la solución trivial de:

$$\dot{Y} = AY + BY_\tau, \quad (\text{III})$$

es asintóticamente estable. Sea C una matriz simétrica real definida positiva que satisface:

$$(A + B)^T C + C(A + B) = -I \quad (\text{IV})$$

siendo

$$A = D_x F|_{(X^*, 0)} \quad y \quad B = D_{x_\tau} F|_{(X^*, 0)}.$$

Sea τ_0 la constante positiva definida por

$$\tau_0 = (2(\|A\| + \|B\|) \|C \cdot B\|)^{-1} \cdot \sqrt{\left(\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(C)} \right)} \quad (\text{V})$$

donde $\lambda_{\min}(C)$ y $\lambda_{\max}(C)$ denotan el valor propio más pequeño y más grande de la matriz C . Entonces podemos decir que existen soluciones triviales de (III) que son asintóticamente estables para todo $\tau < \tau_0$.

Demostración. Se remite al lector a consultar la demostración del Teorema 3.6.3 en [9]. \square

I-III. Sobre la regularidad de la función implícita.

Lema I. Sea $F : U \times \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ una función de clase C^k , en donde $U \subset X$ y $V \subset Y$ con X, Y espacios de Banach. Si f es una contracción uniforme, entonces la función $y : U \rightarrow \bar{V}$ definida implícitamente por la ecuación $y = f(x, y)$ es una función de clase C^k .

Demostración. Se remite al lector a consultar la demostración del Lema 2.5 en [3]. \square

I-IV. Bifurcación en el plano tipo Fold

Proposición I. (Bifurcación tipo Fold). Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, una familia uno-paramétrica de transformaciones de clase C^2 que satisfacen

$$(1) \quad f(0, \mu_0) = 0; \quad (2) \quad \partial_x f(0, \mu_0) = 0; \quad (3) \quad \partial_{xx} f(0, \mu_0) > 0 \quad y \quad (4) \quad \partial_\mu f(0, \mu_0) > 0.$$

Entonces existen intervalos $I_1 = (\mu_1, \mu_0)$ y $I_2 = (\mu_0, \mu_2)$ y $\epsilon > 0$ tal que

- ▷ Si $\mu \in I_1$ entonces $f(x, \mu)$ tiene exactamente dos ceros si $x \in (-\epsilon, \epsilon)$.
- ▷ Si $\mu \in I_2$ entonces $f(x, \mu)$ no tiene ceros en $(-\epsilon, \epsilon)$.

Demostración. Por la primera y la última propiedad junto con el teorema de la función implícita, existe un abierto $\mathcal{I} = (-\epsilon, \epsilon)$ de \mathbb{R} y una única función g de clase C^2 , $g : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu = g(x)$ tal que

$$g(0) = \mu_0, \quad y \quad f(x, g(x)) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathcal{I}.$$

Derivando respecto a x esta última ecuación tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, g(x)) + \partial_\mu f(x, g(x)) \frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=0} &= 0, \\ \partial_{xx} f(x, g(x)) + 2\partial_{x\mu} f(x, g(x)) \frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=0} + \partial_{\mu\mu} f(x, g(x)) \left[\frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=0} \right]^2 + \partial_\mu f(x, g(x)) \frac{d^2g(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} &= 0.\end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$ tenemos que

$$\frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \text{y} \quad \frac{d^2g(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} < 0.$$

Por lo tanto $g(x)$ tiene un máximo en $x = 0$, demostrándose así la existencia de los intervalos I_1 y I_2 . \square