

Modelo para la deflexión de una cuerda sujeta en sus extremos

Leidy Yasmín Hoyos Parra,
yasminhoyos25@javerianacali.edu.co

Resumen—En este artículo estudiamos el modelo matemático para la deflexión de una cuerda sujeta en sus extremos. Presentamos algunos resultados clásicos del análisis funcional relacionados con la existencia y unicidad de soluciones, y exploramos la configuración geométrica del conjunto de puntos críticos de la solución del problema lineal de la cuerda en relación con la distribución de carga que se aplica sobre esta.

Palabras clave—cuerda, distribución de carga, puntos críticos, existencia y unicidad.

Abstract In this paper we study the mathematical model for the deflection of a rope held at its ends. We present some classical results of the functional analysis related to the existence and uniqueness of solutions, and we explore the geometric configuration of the set of critical points of the solution of the linear problem of the rope in relation to the load distribution applied on it.

Key words rope, charge distribution, critical points, existence and uniqueness.

I. INTRODUCCIÓN

EL problema de la deflexión de una cuerda de longitud 1, sujeta en sus extremos, sometida a una distribución de fuerzas $f \equiv f(x)$, que depende de la posición sobre la cuerda, puede modelarse mediante la ecuación

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

En el caso en que la distribución de fuerzas f dependa del valor de la deflexión u , el problema se puede modelar mediante la ecuación

$$\begin{cases} -u''(x) = f(u), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Si bien, el problema de existencia y unicidad de (1) y (2) está resuelto, véase referencias [2], [3], [6], y son conocidas sus soluciones empleando distintas técnicas de las ecuaciones diferenciales ordinarias, véase referencia [6]. Sigue siendo un problema relevante en matemática caracterizar el conjunto de puntos críticos de la solución de estos problemas.

II. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

Esta sección presentamos algunos resultados clásicos para demostrar la existencia y unicidad de soluciones débiles de los problemas (1) y (2). Hasta que se indique lo contrario asumiremos que $\Omega = (0, 1)$.

El presente documento corresponde al artículo final del proyecto de investigación del programa de Matemáticas Aplicadas

II-A. Soluciones Clásicas y débiles

Una función u tal que $u(0) = u(1) = 0$, y cuya segunda derivada exista, es solución del problema (1) asumiendo que $f = -u''$, este tipo de soluciones se pueden caracterizar dependiendo de la regularidad de u .

Definición 1 (Solución clásica). Una función u se llama solución clásica del problema de la deflexión de la cuerda sujeta en sus extremos si $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$ y $-u'' = f$ para todo $x \in \Omega$.

Comúnmente en la deflexión de estructuras elásticas los cuerpos son sometidos a fuerzas que se aplican de forma local o en sectores específicos. Podemos modelar esta situación considerando la siguiente distribución de fuerzas f_ϵ para el problema (1).

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 1/\epsilon & \text{si } 1/2 - \epsilon/2 \leq x \leq 1/2 + \epsilon/2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Integrando de forma consecutiva la expresión $-u'' = f_\epsilon$, se puede comprobar que la solución del problema (1) está dada por

$$u_\epsilon(x) = -h_\epsilon(x) + \frac{x}{2}.$$

en donde

$$h_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1/2 - \epsilon/2, \\ S_1(x, \epsilon) & \text{si } 1/2 - \epsilon/2 \leq x \leq 1/2 + \epsilon/2, \\ S_2(x) & \text{si } 1/2 + \epsilon/2 \leq x, \end{cases}$$

Aquí

$$S_1(x, \epsilon) = \left(\frac{x}{\sqrt{2\epsilon}} - \frac{1/2 - \epsilon/2}{\sqrt{2\epsilon}} \right)^2 \quad \text{y} \quad S_2(x) = x - 1/2.$$

Se puede probarse que en el caso límite $\epsilon \rightarrow 0$ la función u_ϵ no es diferenciable en 0. En este sentido dicha función no satisface la definición de solución débil de (1).

Definición 2. Denotaremos con $H^1(\Omega)$ al subconjunto de $L^2(\Omega)$ definido como

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : f' \in L^2(\Omega)\},$$

en donde f' representa la derivada débil de f .

Para $u, v \in H^1(\Omega)$ el producto interno sobre $H^1(\Omega)$ corresponde con

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv + u'v' dx, \quad (3)$$

y equipado con este producto interno, $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con la siguiente norma

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} v^2 + (v')^2 dx \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Definición 3. Definimos $H_0^1(\Omega)$ como la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$. Entendiéndose la clausura para la norma en (4).

Puede probarse que $H_0^1(\Omega)$ equipado con el producto interno (3) y la norma (4) es también un espacio de Hilbert.

Como una consecuencia de la desigualdad de Poincaré [5] puede probarse que el producto interno de $H_0^1(\Omega)$ es

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_0^1 u'v' dx. \quad (5)$$

Definición 4. (Solución débil) Una función $u \in H_0^1(\Omega)$ con $\Omega = (0, 1)$ es llamada solución débil del problema de la deflexión de una cuerda sujeta en sus extremos, si verifica

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_0^1 f v dx,$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

Teorema 1 (Representación de Riesz). Sea F un operador lineal y continuo en un espacio de Hilbert real H . Para cada F existe un único $u \in H$ tal que

$$F(v) = (u, v) \quad \text{para todo } v \in H. \quad (6)$$

De manera adicional puede probarse que dicho u es el minimizador del funcional

$$J(v) = \frac{1}{2} \|v\|^2 - F(v) \quad (7)$$

Definición 5. Sea T un operador de un espacio de Banach B es si mismo. Diremos que T es contractivo si existe una constante α con $0 < \alpha < 1$, tal que

$$\|T(x) - T(y)\| < \alpha \|x - y\|,$$

para todo $x, y \in B$

Teorema 2 (Punto fijo de Banach). Sea B un espacio de Banach y T un operador contractivo $T : B \rightarrow B$. Entonces T admite único punto fijo en B , es decir, existe un $p \in B$ tal que $T(p) = p$.

II-B. Función de Green del problema de la cuerda sujeta en sus extremos

Integrando consecutivamente la expresión $-u''(x) = f(x)$ en el problema (1), obtenemos

$$u(x) = - \int_0^x g(s) ds + Ax + B. \quad (8)$$

en donde $g(x) = \int_0^x f(s) ds$.

Las constantes A y B se determinan empleando las condiciones de frontera $u(0) = u(1) = 0$. En efecto, es fácil comprobar que $B = 0$ y

$$A = \int_0^1 (1-s) f(s) ds.$$

De acuerdo con esa última expresión, note que (8) se puede escribir como

$$u(x) = \int_0^x (s-x) f(s) ds + \int_0^1 x(1-s) f(s) ds. \quad (9)$$

Si definimos

$$G(x, s) = \begin{cases} s(1-x) & \text{si } 0 \leq s \leq x, \\ x(1-s) & \text{si } x \leq s \leq 1, \end{cases} \quad (10)$$

entonces (11) se puede escribir como

$$u(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds. \quad (11)$$

La función definida en (10) se conoce como la función de Green del problema de la cuerda sujeta en sus extremos.

III. RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados principales del documento, y con este propósito se ha dividido en dos partes. En la primera se resuelve el problema de existencia y unicidad de soluciones débiles del problema (1) y se presentan algunas propiedades cualitativas de la distribución de puntos críticos de este problema en relación con el dato f . En la segunda parte del capítulo se resuelve el problema de existencia y unicidad de soluciones del problema (2).

III-A. Existencia y unicidad de soluciones débiles

Lema 1. El operador $F : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$F(v) = \int_0^1 f v dx$$

siendo f una función fija de $L^2(\Omega)$, es lineal y continuo en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración. La linealidad de F es una consecuencia inmediata de las propiedades de la integral. Para probar la continuidad considere una sucesión arbitraria $\{v_n\}$ de $H_0^1(\Omega)$ tal que $v_n \rightarrow v$ en H_0^1 , esto quiere decir que para cada $\epsilon > 0$ existe un N tal que

$$\|v - v_n\|_{H_0^1(\Omega)} < \epsilon,$$

siempre que $n \geq N$.

Se sigue de la desigualdad de Cauchy - Schwarz que

$$|F(v) - F(v_n)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v - v_n\|_{L^2(\Omega)}$$

y de acuerdo con la desigualdad de Poincaré

$$|F(v) - F(v_n)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v - v_n\|_{H_0^1(\Omega)}$$

con lo que F es continuo en v . \square

Lema 2. El conjunto $K_F = \{v \in H_0^1(\Omega) : F(v) = 0\}$ es cerrado y convexo en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Sean $v, w \in K_F$ y considere escalares α y β tales que $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ y $\alpha + \beta = 1$. Note que $F(\alpha v + \beta w) = \alpha F(v) + \beta F(w) = 0$, y de acuerdo con esto K_F es convexo.

K_F es cerrado como una consecuencia inmediata de la continuidad de F . \square

Teorema 3. El problema (1) admite una única solución débil en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración. La demostración es una consecuencia directa de los Lemas 1 y 2, y del Teorema de representación de Riesz. \square

III-B. Valores extremos a partir de la función de Green

Note que si la solución u del problema (1) es al menos C^1 , y como $u(0) = u(1)$, entonces se sigue del Teorema de Rolle, que existe al menos un punto $p \in \Omega$ tal que $u'(p) = 0$. En esta sección exploraremos este resultado empleando para ello la función de Green asociada a (1).

De acuerdo con (11) la solución del problema (1) es

$$u(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds.$$

Empleando la regla de Leibniz, de derivación bajo el signo de la integral véase [1], obtenemos

$$u'(x) = \int_0^1 \frac{\partial G(x, s)}{\partial x} f(s) ds, \quad (12)$$

en donde

$$\frac{\partial G(x, s)}{\partial x} = \begin{cases} -s & \text{si } 0 \leq s \leq x, \\ 1-s & \text{si } x \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Lema 3. La función u' definida en (12), es continua en Ω para todo $f \in L^2(\Omega)$.

Demostración. Sea $x_0 \in \Omega$ y α un número arbitrario tal que $x_0 + \alpha \in \Omega$. Considere la diferencia

$$\begin{aligned} u'(x_0) - u'(x_0 + \alpha) &= \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial G(x_0, s)}{\partial x} - \frac{\partial G(x_0 + \alpha, s)}{\partial x} \right) f(s) ds. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial G(x_0, s)}{\partial x} - \frac{\partial G(x_0 + \alpha, s)}{\partial x} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq s \leq x_0, \\ 1 & \text{si } x_0 \leq s \leq x_0 + \alpha, \\ 0 & \text{si } x_0 + \alpha \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Entonces se sigue de la desigualdad de Cauchy – Schwarz que

$$|u'(x_0) - u'(x_0 + \alpha)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{|\alpha|},$$

lo que demuestra la continuidad de u' en x_0 . \square

Corolario 1. Si en el problema (1) tomamos $f \geq 0$ con $f \in L^2(\Omega)$ entonces existe al menos un punto $p \in (0, 1)$ en donde $u'(p) = 0$.

Demostración. De acuerdo con (12), y como $f \geq 0$ se tiene que

$$u'(0) = \int_0^1 (1-s) f(s) ds > 0,$$

y

$$u'(1) = - \int_0^1 s f(s) ds < 0,$$

se desprende entonces de la continuidad de u' en Ω que existe al menos un punto $p \in \Omega$ en donde $u'(p) = 0$. \square

Lema 4. Para cualquier $f \in L^2(\Omega)$ existe al menos un punto $p \in \Omega$ tal que la función u' definida en (12) es nula.

Demostración. Como $u(0) = u(1)$, se sigue del Teorema de Rolle, que existe al menos un punto $p \in \Omega$ tal que $u'(p) = 0$. \square

III-C. Derivada en la frontera

En esta sección, empleando una técnica diferente al cómputo de la función de Green, estudiaremos el comportamiento de la derivada de la solución u del problema (1) en 0 y 1.

Lema 5. Sean $\Omega = (0, 1)$ y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(0) = 0$ y $-u'' > 0$ en Ω , entonces $u'(0) > 0$.

Demostración. Debido a que $-u'' > 0$ se sigue del criterio de la segunda derivada que u no admite mínimos locales en Ω .

Tomando $p \in \Omega$, $x \in (0, r)$ con $r < p$ y $\beta > 0$, considere la función

$$v(x) = e^{-\beta(x-p)^2} - e^{-\beta p^2}.$$

Se puede probar que

$$v'(x) = -2\beta(x-p)e^{-\beta(x-p)^2},$$

y que

$$v''(x) = -2\beta e^{-\beta(x-p)^2} + 4\beta^2(x-p)^2 e^{-\beta(x-p)^2}.$$

Note que $u > 0$ en Ω y de acuerdo con esto $u(0) < u(x)$ para todo $x \in \Omega$, como $u(0) = 0$ entonces

$$0 < u(x) \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Para $x \in (0, r)$, y para un número $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño tendríamos que

$$0 \leq u(x) - \epsilon v(x),$$

y para un $0 < h < r$ consideremos el cociente

$$0 \leq \frac{u(h)}{h} - \frac{\epsilon v(h)}{h}.$$

Ahora, al hacer $h \rightarrow 0$ obtenemos

$$0 \leq u'(0) - 2\epsilon\beta p e^{-\beta p^2},$$

y como la cantidad $2\epsilon\beta p e^{-\beta p^2}$ es estrictamente positiva entonces $u'(0) > 0$. \square

Un proceso similar muestra que $u'(1) \neq 0$. Es importante mencionar que este resultado es una consecuencia de la geometría lineal del dominio. En espacios más generales esto no siempre será cierto.

III-D. Reflexión sobre el conjunto Ω

Se ha demostrado que $u'(0) > 0$, y como una consecuencia de esto, debido a la continuidad de u' existe un $\delta > 0$ tal que $u'(x) > 0$ para todo $x \in (0, \delta)$. En esta sección identificaremos con precisión dicho δ en relación con el comportamiento de la función f en el problema (1).

Considere un número $x_0 \in (0, 1)$ tal que $2x_0 \leq 1$, y denotemos con I al intervalo $I = (x_0, 2x_0)$. Para todo $x \in I$ sea $x^* = 2x_0 - x$, y consideremos la función

$$u^*(x) = u(x^*),$$

cuyo comportamiento se muestra en la siguiente figura.

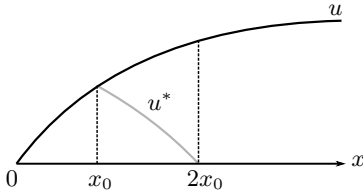


Figura 1. Gráficos de la función u y de u^* .

Sea $w(x) = u(x) - u^*(x)$ con $x \in I$, observe que $w(x_0) = 0$ y que $w(2x_0) > 0$. Un cálculo directo muestra que

$$w'(x) = u'(x) + u'(2x_0 - x), \quad (13)$$

y que

$$w''(x) = u''(x) - u''(2x_0 - x) = -f(x) + f(2x_0 - x). \quad (14)$$

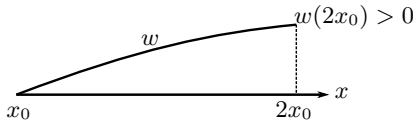


Figura 2. Gráfico de la función w .

Teorema 4. *Sea u la solución del problema (1) con f creciente y $f > 0$ en Ω . Entonces u no admite ningún punto crítico en $[0, 1/2]$.*

Demostración. Si $f > 0$ y creciente en $(0, 1)$ entonces de acuerdo con (14) se sigue que $-f(x) + f(2x_0 - x) < 0$ en I . Note que se verifican las hipótesis del Lema (5) para la función w , y por lo tanto $w'(x_0) > 0$.

De acuerdo con (13)

$$w'(x_0) = 2u'(x_0),$$

y por lo tanto $u'(x_0) > 0$.

La prueba finaliza al realizar este procedimiento de manera continua para todo x_0 tal que $2x_0 \leq 1$. \square

Definición 6. *Una constante λ es llamada valor propio del problema de Dirichlet si existe una función $u \neq 0$ tal que*

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u \text{ en } \Omega, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Lema 6. *Si λ es un valor propio de (15) entonces $\lambda > 0$.*

Demostración. Sea $v \in H_0^1(\Omega)$ una función arbitraria, al multiplicar v por la primera ecuación de (15) e integrar ambos lados, obtenemos

$$-\int_0^1 u''v \, dx = \lambda \int_0^1 uv \, dx.$$

Integrando por partes

$$-u'v \Big|_0^1 + \int_0^1 u'v' \, dx = \lambda \int_0^1 uv \, dx.$$

si hacemos $v = u$ obtendríamos

$$\int_0^1 (u')^2 \, dx = \lambda \int_0^1 u^2 \, dx.$$

Note que como ambas integrales son no negativas, entonces $\lambda > 0$. \square

Se puede probar que $u(x) = A \sin(\sqrt{\lambda}x) + B \cos(\sqrt{\lambda}x)$ satisface la primera ecuación de (15), y como $u(0) = 0$ entonces $B = 0$ y $u(1) = 0$ entonces $\sqrt{\lambda} = k\pi$ ($\lambda = k^2\pi^2$) por lo tanto.

$$u_k(x) = A_k \sin(k\pi x),$$

en donde A_k es una constante que puede tomarse con el propósito de normalizar la función propia en $L^2(\Omega)$, es decir

$$A_k \left(\int_0^1 \sin^2(k\pi x) \, dx \right)^{1/2} = 1,$$

y de acuerdo con esto $A_k = \sqrt{2}$.

Lo anterior permite escribir las funciones propias de (15) como

$$u_k(x) = \sqrt{2} \sin(\pi k x).$$

III-E. Existencia y unicidad

En la siguiente sección se demostrará que el problema (2) admite un única solución en el espacio de funciones $L^2(\Omega)$. El lector interesado puede revisar versiones más generales de este tipo de problema en las referencias [3] y [6].

Para la función de Green del problema de la cuerda, ecuación (10) y $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ se puede probar que

$$\left(\int_Q G(x, s)^2 \, dx ds \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{10}}{30}. \quad (16)$$

Consideremos ahora un operador T definido en $L^2(\Omega)$ como

$$T[v](x) = \int_0^1 G(x, s) f(v(s)) \, ds. \quad (17)$$

se desprende de (16) que $T[v] \in L^2(\Omega)$ para toda función $v \in L^2(\Omega)$.

Lema 7. *Sea f en (17) una función que satisface la condición de Lipschitz, con constante de Lipschitz α . Si $\frac{\sqrt{10}}{30}\alpha < 1$, entonces T es un operador contractivo de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$.*

Demostración. Sea w y v funciones de $L^2(\Omega)$, entonces

$$|T[w](x) - T[v](x)| \leq \int_0^1 |G(x, s)(f(w(s)) - f(v(s)))| \, ds,$$

al elevar al cuadrado y como una consecuencia de la desigualdad de Cauchy – Schwarz, e integrando entre 0 y 1 con respecto de x obtenemos

$$\int_0^1 |T[w](x) - T[v](x)|^2 dx \leq \frac{1}{90} \int_0^1 (f(w(s)) - f(v(s)))^2 ds.$$

Como f es una función contractiva de constante de contractividad α , entonces la ecuación se puede escribir como

$$\int_0^1 |T[w](x) - T[v](x)|^2 dx \leq \frac{1}{90} \alpha^2 \int_0^1 |w(s) - v(s)|^2 ds.$$

y al sacar raíz obtenemos

$$\|T[w](x) - T[v](x)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{10}}{30} \alpha \|w - v\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

Definición 7 (Condición de Lipschitz). Sean (M, d_M) y (N, d_N) dos espacios métricos, diremos que una función $f : M \rightarrow N$ satisface la condición de Lipschitz si existe una constante α tal que

$$d_N(f(x) - f(y)) \leq \alpha d_M(y, x) \text{ para todo } x, y \in M$$

La constante α es conocida como la constante de Lipschitz de f .

Teorema 5. Si f en (2) es una función que satisface la condición de Lipschitz, con constante de Lipschitz α , tal que $\frac{\sqrt{10}}{30} \alpha < 1$, entonces el problema (2) admite una única solución $u \in L^2(\Omega)$.

Demostración. De acuerdo con el lema (7) el operador T es contractivo de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$, y se sigue del Teorema de punto fijo de Banach que T admite un punto fijo. De esta manera existe un único $u \in L^2(\Omega)$ tal que

$$u(x) = T[u](x) = \int_0^1 G(x, s) f(u(s)) ds,$$

ecuación que coincide con la expresión (11) al cambiar $f(s)$ por $f(u(s))$. □

En el siguiente ejemplo se emplea un algoritmo recursivo que permite aproximar la solución de un problema semilineal.

Ejemplo 1. Si en el problema (2) se toma $f(x) = \cos(x)$; evaluado en u obtendríamos $f(u) = \cos(u)$ y el problema tomaría la siguiente forma

$$\begin{cases} -u'' = \cos(u) \text{ en } \Omega = (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Encontraremos la solución de este problema empleando la técnica que se desarrolló para la demostración del Teorema de punto fijo de Banach, para esto considere la sucesión definida de forma recurrente, como

$$T^n(x) = \int_0^1 G(x, s) f(T^{n-1}(s)) ds, \quad T^0(x) = x.$$

La siguiente figura muestra las funciones T^1 , T^2 y T^3 .

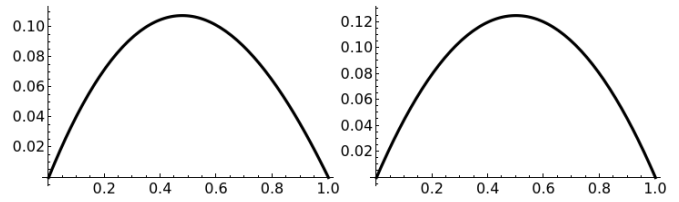


Figura 3. Gráficos de la funciones T^1 , T^2 .

IV. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

El problema de la deflexión de una cuerda sujeta en sus extremos en el caso lineal y semilineal admite una única solución débil en H_0^1 y una solución en L^2 respectivamente.

Se ha evidenciado una relación entre el dato f del problema de la deflexión de una cuerda sujeta en sus extremos y el conjunto de puntos críticos de la solución de este. Por ejemplo se sabe que si f es creciente y $f > 0$ en $\Omega = (0, 1)$. Entonces la solución no admite ningún punto crítico en $[0, 1/2]$.

La experimentación numérica muestra que la propiedad de preservación de signo en la frontera de la deriva de la solución del problema de la deflexión de una cuerda sujeta por sus extremos, no es válida para ciertos dominios planares en donde se modela la deflexión de una membrana, como por ejemplo

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega, \end{cases}$$

en donde Δ es el operador de Laplace, Ω es un dominio planar y f es la distribución de fuerzas que se aplica sobre la membrana.

A continuación se presentan las soluciones del problema de la deflexión de una membrana para $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $f_1(x, y) = 1$, y para $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$, $f_2(x, y) = 2y$. Identificaremos con u_1 a la solución del primer problema y con u_2 a la solución del segundo.

Puede probarse que $-\Delta u_{1,2} > 0$ en $\Omega_{1,2}$ y que ambos dominios son convexos. Sin embargo, para el caso de u_1 el gradiente de la solución nunca se anula en la $\partial\Omega_1$, mientras que el gradiente de u_2 se anula en los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ de $\partial\Omega_2$.

REFERENCIAS

- [1] Apostol, T. M. (2020). Análisis matemático. Reverté.
- [2] Aubin, J. P. (2011). Applied functional analysis. John Wiley & Sons.
- [3] Brézis, H., & Funcional, A. (1984). Teoría y aplicaciones. Alianza Editorial.
- [4] Cannon, J. T., & Dostrovsky, S. (2012). The Evolution of Dynamics: Vibration Theory from 1687 to 1742: Vibration Theory from 1687 to 1742 (Vol. 6). Springer Science & Business Media.
- [5] Chipot, M. (2009). Elliptic equations: an introductory course. Springer Science & Business Media.
- [6] Griffel, D. H. (2002). Applied functional analysis. Courier Corporation.