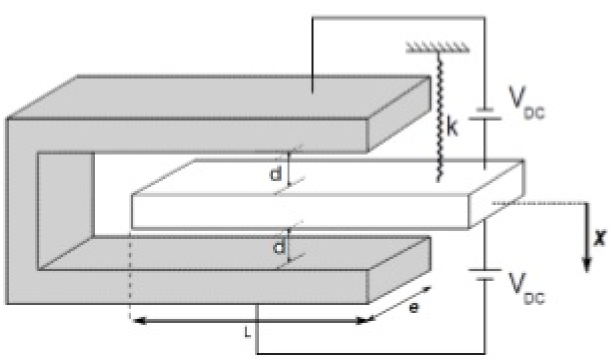
OSCILACIONES PERIÓDICAS SIMÉTRICAS EN MEMS TIPO PEINE

RAFAEL SANTIAGO BEDOYA

Introducción

En este trabajo nos enfocamos en la existencia de soluciones periódicas impares con un número determinado de ceros en una familia de ecuaciones diferenciales de segundo orden. En especial consideramos el movimiento oscilatorio de dispositivos micro electro mecánicos (MEMS) de tipo peine. Exploraremos condiciones suficientes en los parámetros de control y en la naturaleza del oscilador para encontrar soluciones periódicas impares con un número de ceros determinado. Este trabajo es inspirado por la propuesta de Rafael Ortega [3] para encontrar soluciones periódicas impares en un problema Sitnikov con características especificas y busca explorar la propuesta dada para un problema de mecánica celeste a otro campo de aplicación. La propuesta o método de Ortega utiliza elementos clásicos y la teoría de comparación de Sturm para encontrar soluciones periódicas impares de una familia de osciladores. Debido al posible alcance de este método que utiliza elementos sencillos buscamos lograr una aplicación numérica a un problema de una ecuación con singularidad como lo es el movimiento oscilatorio de los dispositivos MEMS de tipo peine.
Este trabajo estudiará el movimiento lateral de los dispositivos micro electro mecánicos de tipo peine.



En la ilustración anterior se pueden observar las distintas componentes que conforman este tipo de dispositivos, en el cual nos vamos a centrar en el movimiento del electrodo central entre las dos placas. El movimiento descrito en esta gráfica es conocido como movimiento lateral y es gobernado por la siguiente ecuación de movimiento:

$$mx'' + kx = \frac{\epsilon L V_{AC}^2}{2m}\left(\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2}\right),$$

d : Distancia entre el diente y las placas en reposo.
m : Masa del electrodo central o diente.
ϵ : Constante dieléctrica en el vacío.
L : Longitud de la porción del diente que interactúa con las placas.
V_{AC} : Entrada de voltaje
Por medio de un proceso de adimensionalización[4],[1] eligiendo unidades adecuadas de tiempo y longitud, es posible obtener la siguiente EDO equivalente:

$$x'' + x\left(1 - \frac{4\beta v^2(t)}{(1-x^2)^2}\right) = 0 \ (-1 < x < 1), \tag{1}$$

donde hemos introducido un voltaje periódico de entrada de la forma (corriente AC-DC) :

$$v(t) = v_0 + \delta p(t)$$

con p definido por:

$$p(t) = cos(\omega t)$$

Que será el objeto de estudio de este proyecto.

1. Fundamentos Teóricos

Este proyecto utilizará el procedimiento propuesto por Rafael Ortega [3] para un problema de mecánica celeste. Es estudio de este método conlleva elementos más sencillos como lo es el teorema de comparación de Sturm:

Teorema 1.1. *Sean u, v soluciones reales no triviales de:*

$$u'' + q(t)u = 0 \tag{2}$$

$$v'' + q_1(t)v = 0 \tag{3}$$

Donde $q(t), q_1(t)$ son continuas para todo t. Si $t_1 < t_2$ son ceros consecutivos de u entonces v se anula al menos una vez en (t_1, t_2) a menos que en ese intervalo $q(t) \equiv q_1(t)$ y $v(t) \equiv ku(t)$, para $k \in \mathbb{R}$
De esta manera es posible entender el método de ortega que plantea que dadas las siguientes condiciones:

$$D(t,z) < D(t,0),\ \forall z \neq 0 \tag{4}$$

$$D(t,-z) = D(t,z),\ D(-t,z) = D(t,z), \forall (t,z) \in [-L,L] \times \mathbb{R} \tag{5}$$

Asumiremos también que existe un $C > 0$ tal que

$$|zD(t,z)| \leq C,\ \forall z \in \mathbb{R},\ \forall t \in]0,L[. \tag{6}$$

entonces se plantea:

Teorema 1.2. *Asúmase las hipótesis* (4)*,* (5) *y* (6)*. Entonces son equivalentes:*

- *El problema de Dirichlet*
$$z'' + D(t,z)z = 0,\ z(0) = z(L) = 0$$
tiene una solución con $N \geq 0$ *ceros en* $]0,L[$
- $N < \nu_0$.

De esta manera estudiamos como por medio del conteo de ceros obtenidos utilizando el teorema de Ortega es posible encontrar soluciones periódicas impares para una ecuación diferencial que satisface las hipótesis planteadas. Así es posible computar por medio de métodos numéricos más sencillos como la bisección soluciones que en medio periodo tengan ceros tanto su punto de partida como al final del medio periodo.

2. Resultados

Utilizando un proceso de truncamiento y el corolario para determinar condiciones iniciales propuesto en [2] es posible encontrar una ecuación diferencial que contiene las mismas soluciones periódicas impares que(1) y así mismo satisface las condiciones para aplicar las condiciones de Ortega:

$$x'' + xD^*(t,x) = 0 \tag{7}$$

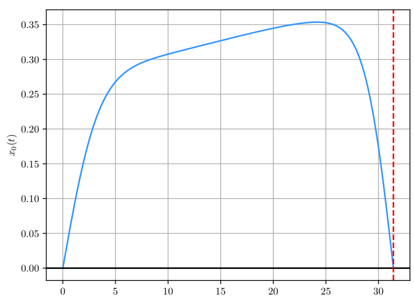
donde

$$D^*(t,x) = \begin{cases} \dfrac{h^*(x)D(t,h^*(x))}{x},\ \text{si } x \neq 0 \\ 1 - 4\beta V^2(t),\ \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{8}$$

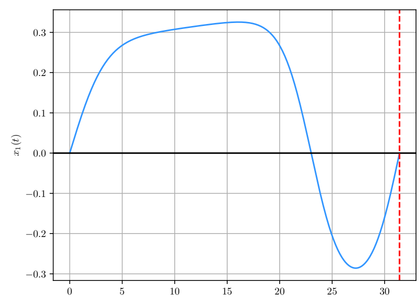
$$h(x) = \begin{cases} x,\ \text{si } 0 \leq x \leq R \\ \dfrac{A}{e^{cx}} + k,\ \text{si } x > R \end{cases} \tag{9}$$

$$R < R + \epsilon < 1$$
$$R = \sqrt{1 - 2v_{mn}\sqrt{\beta} + \epsilon_0}$$

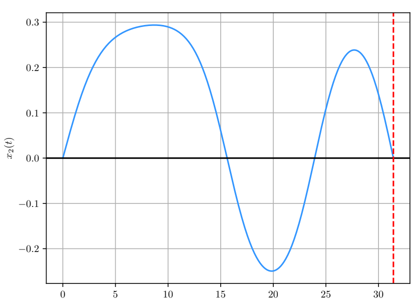
Así, en un dispositivo con las características: $N_0 = 4$, $m = 1$, $\beta = 4.427 \times 10^{-3}\,\mathrm{V}^{-2}$, $\omega = 0{,}1$, $v_0 = 6.697\,684\,163\,705\,222\,\mathrm{V}$, $\delta = 0.189\,709\,177\,328\,008\,\mathrm{V}$. Este sistema presenta soluciones periódicas impares con $0, 1, 2, 3$ ceros interiores y sus velocidades críticas respectivamente:



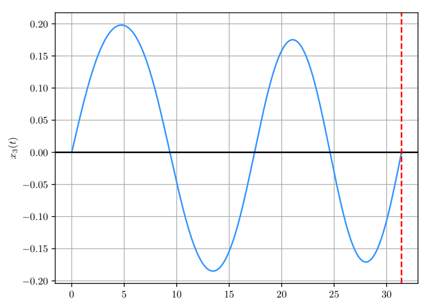
(A) $N = 0$.



(B) $N = 1$.



(C) $N = 2$.



(D) $N = 3$.

FIGURA 1. Gráfica de las soluciones periódicas impares obtenidas para el *Caso 1* por individual (intervalo $[0, T]$).

Concluyendo que es posible aplicar el método de Ortega a un sistema con singular como lo son los dispositivos micro electromecánicos de tipo peine utilizando los elementos teóricos estudiados en este proyecto.

Referencias

[1] D Nuñez, O Perdomo y A Rivera. «On the stability of periodic solutions with defined sign in MEMS via lower and upper solutions». En: *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 46 (2019), págs. 195-218.

[2] D. Núñez, O. Larreal y L. Murcia. «Odd periodic oscillations in Comb-drive finger actuators». En: *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 61 (oct. de 2021), pág. 103347. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2021.103347. URL: https://doi.org/10.1016%2Fj.nonrwa.2021.103347.

[3] Rafael Ortega. «Symmetric periodic solutions in the Sitnikov problem». En: *Archiv der Mathematik* 107.4 (2016), págs. 405-412.

[4] Mohammad I. Younis. *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*. Springer US, 2011. DOI: 10.1007/978-1-4419-6020-7. URL: https://doi.org/10.1007%2F978-1-4419-6020-7.

Pontificia Universidad Javeriana Cali
Email address: rsbedoya@javerianacali.edu.co