

Nota de Aceptación

Aprobado por el Comité de Trabajo de Grado
en cumplimiento de los requisitos exigidos por la
Pontificia Universidad Javeriana para optar el
título de Ingeniero Electrónico.



Dr. CAMILO ROCHA

Decano de la Facultad de Ingeniería



ING. LUIS EDUARDO TOBÓN LLANO

Director Carrera Ingeniería Electrónica.



ING. LUIS EDUARDO TOBÓN LLANO

Director(a) Trabajo



ING. Andrés Felipe Amador
Jurado 1



ING. Hernán Darío Vargas
Jurado 2



Acta de Correcciones al Proyecto de Grado Ingeniería Electrónica

Fecha: 6 de septiembre de 2021

Autores: Diana Marcela Quintero Serna

Nombre del Proyecto de Grado: Modelado numérico basado en la interacción entre campos electromagnéticos y tejidos mamarios cancerígenos.

Director: Luis Eduardo Tobón Llano

Como indica el artículo 2.27 de las Directrices de Trabajo de Grado, he verificado que los estudiantes indicados arriba han implementado todas las correcciones que los Jurados del Proyecto de Grado definieron que se efectuaran, como consta en el Acta de Calificación correspondiente.

Firma de Director(a) del Proyecto de Grado



Modelado numérico basado en la interacción entre campos electromagnéticos y tejidos mamarios cancerígenos

Diana Marcela Quintero Serna

Director: Dr. Luis Eduardo Tobón Llano

Pontificia Universidad Javeriana Cali
Facultad de Ingeniería y Ciencias.
Ingeniería Electrónica.
Proyecto de Grado.

Agosto 13 del 2021

Santiago de Cali, Agosto 13 del 2021.

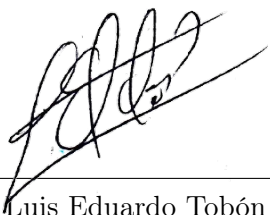
Señores

Pontificia Universidad Javeriana Cali.
Comité de Carrera de Ingeniería Electronica
Cali.

Cordial Saludo.

Por medio de la presente me permito informarle que he revisado el proyecto de grado titulado **“Modelado numérico basado en la interacción entre campos electromagnéticos y tejidos mamarios cancerígenos”** de la estudiante de Ingeniería electrónica Diana Marcela Quintero Serna (cod: 8917917) el cual estuvo bajo mi dirección y considero apto para ser presentado y sometido a consideración del jurado.

Atentamente,



Dr. Luis Eduardo Tobón Llano

Santiago de Cali, Agosto 13 del 2021.

Señores

Pontificia Universidad Javeriana Cali.
Comité de Carrera de Ingeniería Electronica.
Cali.

Cordial Saludo.

Me permito presentar a su consideración el proyecto de grado titulado “Modelado numérico basado en la interacción entre campos electromagnéticos y tejidos mamarios cancerígenos” con el fin de cumplir con los requisitos exigidos por la Universidad para llevar a cabo el proyecto de grado y posteriormente optar al título de Ingeniero Electronico.

Al firmar aquí, doy fe que entiendo y conozco las directrices para la presentación de trabajos de grado de la Facultad de Ingeniería y ciencias aprobadas el 26 de Noviembre de 2009, donde se establecen los plazos y normas para el desarrollo del anteproyecto y del trabajo de grado.

Atentamente,



Diana Marcela Quintero Serna
Código: 8917917

Resumen

En este trabajo se observa la interacción entre campos electromagnéticos y tejido mamario. Se parte de las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia, las cuales se discretizan en el espacio empleando el método de diferencias finitas con una aproximación central. Se construye una matriz en la que se consideran la geometría del problema, las propiedades eléctricas y magnéticas, las condiciones de frontera y se aplica el Método de Diferencias Finitas en el Dominio de la Frecuencia (FDFD) para hallar los campos electromagnéticos. De este sistema lineal se extraen los valores y vectores propios, los que determinan las frecuencias e intensidades de campos, respectivamente. Se evalúan diferentes casos que permiten determinar la efectividad del método, la respuesta del tejido ante el campo incidente y el efecto del tejido canceroso. En este orden, se evalúan diferentes casos: cavidad vacío, estructura vacío con pared dieléctrica y estructura multicapa unidimensional. Finalmente, en la estructura multicapa unidimensional se obtienen los valores de reflectancia en la propagación de la onda y las gráficas que muestran la interacción de los campos con el tejido a diferentes frecuencias y tamaños del tumor en el tejido.

Palabras Clave: Cavidad, tejido mamario, diferencias finitas, valores propios, condición de frontera, campos eléctricos, campos magnéticos, permitividad, frecuencia.

Índice

1. Marco Teórico y trabajos relacionados	15
1.1. Fundamentos físicos	15
1.1.1. Electromagnetismo.	15
1.1.2. Condiciones de frontera	17
1.1.3. Reflexión y transmisión	21
1.1.4. Impedancia del medio	23
1.1.5. Velocidad de propagación	23
1.2. Métodos numéricos	24
1.2.1. Diferencias Finitas en el Dominio de la Frecuencia	24
1.2.2. Valores y vectores propios	25
2. Concepción y metodología	26
2.1. Concepción geométrica del tejido	26
2.2. Concepción de la matriz	28
2.3. Metodología	29
2.3.1. Cavidad vacío	30
2.3.2. Estructura vacío con pared dieléctrica	30
2.3.3. Estructura multicapa unidimensional	31
3. Cavidad Vacío	32
3.1. Diseño	32
3.2. Implementación	33
3.2.1. Intervalos	33
3.2.2. Discretización espacio para campo magnético y eléctrico	33
3.2.3. Error en los valores propios	36
3.2.4. Separación campos eléctricos y magnéticos.	39
3.3. Resultados	39
4. Estructura vacío con pared dieléctrica	43
4.1. Diseño	43
4.2. Implementación	44
4.2.1. Construcción de la matriz	44
4.2.2. Condición de frontera	44
4.2.3. Interfaz	45

4.2.4. Valores y vectores propios	53
4.2.5. Reflexión y transmisión	53
4.3. Resultados	53
4.3.1. Valores propios	53
4.3.2. Reflexión y transmisión	54
4.3.3. Campos electromagnéticos	57
5. Estructura multicapa unidimensional	64
5.1. Diseño	64
5.2. Implementación	65
5.2.1. Tamaños de las capas de los tejidos	65
5.2.2. Construcción de la matriz	65
5.2.3. Propiedades dieléctricas del tejido biológico	66
5.2.4. Condición de frontera	66
5.2.5. Interfaz	66
5.2.6. Valores y vectores propios	66
5.2.7. Reflexión y transmisión	67
5.3. Resultados	67
5.3.1. Permitividad en función de la frecuencia	67
5.3.2. Valores propios	68
5.3.3. Reflexión y transmisión	68
5.3.4. Campo eléctrico para un tumor de tamaño: 3.693 cm evaluado cerca a una frecuencia de 3GHz	70
5.3.5. Campo eléctrico para un tumor tamaño: 3.693 cm evaluado cerca a una frecuencia de 5GHz	71
5.3.6. Campo eléctrico para un tumor tamaño: 0.03 cm evaluado cerca a una frecuencia de 3GHz	72
5.3.7. Campo eléctrico para un tumor tamaño: 0.03 cm evaluado cerca a una frecuencia de 5GHz	73
6. Conclusiones	74
7. Trabajos Futuros	75
8. Anexos	76
Bibliografía	77

Índice de figuras

1.1. Cavity resonante	18
1.2. Longitud de onda [1]	19
1.3. Dirección en la que viaja la onda	19
1.4. Reflexión y transmisión para el caso de vacío-pared dieléctrica	21
1.5. Reflexión para el caso de estructura multicapa unidimensional	22
1.6. Diferencias finitas como aproximación a derivada central [2]	24
1.7. Diferencias finitas como aproximación central-1D	25
2.1. Modelo del seno sin cáncer vista horizontal [3]	26
2.2. Modelo de seno sin cáncer vista vertical [4]	27
2.3. Modelo realista del seno considerando el tejido fibro-glandular al interior [5]	27
2.4. Ilustración de las capas del tejido mamario como una estructura multicapa unidimensional	28
2.5. Matriz de rotacionales para modelar el tejido mamario	28
3.1. Cavity vacío	32
3.2. Diagrama de flujo para la lógica de la construcción de la matriz	35
3.3. Modos de vibración (ω) real vs numérico	37
3.4. Modos de vibración (ω) real vs numérico considerando el error	38
3.5. Valores propios antes de encontrar el error	39
3.6. Valores propios después de encontrar el error	40
3.7. Campos Eléctrico y Magnético para el primer modo de vibración	42
3.8. Campos Eléctrico y Magnético para el segundo modo de vibración	42
4.1. Concepción de estructura con secciones de vacío y material	44
4.3. Concepción de campos adyacentes a la interfaz entre materiales	46
4.4. Concepción geométrica para cálculo de campos auxiliares	47
4.5. Concepción geométrica para cálculo de campos auxiliares	47
4.6. Concepción del campo magnético auxiliar en el material	49
4.7. Concepción del campo magnético auxiliar en el vacío	50
4.8. Concepción campos magnéticos existentes y auxiliares para calcular el comportamiento del campo eléctrico en la frontera entre materiales	51
4.9. Concepción geométrica para cálculo del campo en la interfaz	52
4.10. Valores propios antes de restringir el rango de frecuencias	54
4.11. Valores propios después de restringir el rango de frecuencias	54
4.12. Forma de onda campos EM para el caso 1 a una frecuencia cercana a 500 MHz	58
4.13. Forma de onda campos EM para el caso 2 a una frecuencia cercana a 500 MHz	59

4.14. Forma de onda campos EM para el caso promedio a una frecuencia cercana a 500 MHz	59
4.15. Forma de onda campos EM para el caso donde se usan los campos eléctricos a una frecuencia cercana a 500 MHz	60
4.16. Campos EM a 1 GHz para una estructura vacío-parafina-vacío	61
4.17. Campos EM a 1 GHz para una estructura vacío-dieléctrico transparente-vacío	62
4.2. Diagrama de flujo concepción de la matriz para el caso de una cavidad con vacío y un material	63
5.1. Concepción de estructura multicapa para el tejido mamario	65
5.2. Valor absoluto de permitividades complejas en función de la frecuencia (valores propios)	67
5.3. Valores propios después de restringir el rango de frecuencias	68
5.4. Campo E a 3 GHz para una estructura multicapa	70
5.5. Campo E a 5 GHz para una estructura multicapa	71
5.6. Campo E a 3 GHz para una estructura multicapa	72
5.7. Campo E a 5 GHz para una estructura multicapa	73

Índice de cuadros

1.1. Parámetros de la ecuación 1.8 para propiedades dieléctricas en tejidos biológicos . . .	17
2.1. Relación de variables presentadas en la matriz	29
3.1. Frecuencias esperadas y obtenidas	38
3.2. Frecuencias permitidas para una cavidad resonante de tamaño $L = 1m$	40
3.3. Valores de longitud de onda esperados y obtenidos	41
4.1. Índices refractivos para los medios contemplados en el caso	55
4.2. Número de onda y coeficientes de reflexión y transmisión para cada frecuencia en el rango	55
4.3. Reflectancia	57
5.1. Índices de refracción en la estructura multicapa unidimensional	69
5.2. Número de onda para cada capa de la estructura de acuerdo al rango de frecuencias.	69
5.3. Reflectancia	69

Introducción

El cáncer es una de las principales causas de muerte en el mundo [6], las cifras asociadas a la cantidad de muertes causadas por esta enfermedad aumentan cada vez más con el paso de los años en Colombia [7]. El tipo de cáncer objeto de estudio en este proyecto es el de mama, debido a que este es considerado la primera causa de enfermedad y muerte por cáncer entre las mujeres colombianas [8]. Por lo tanto, se planteó como objetivo principal, la implementación de un modelo computacional que permita simular la interacción entre campos electromagnéticos y tejidos mamarios afectados con cáncer.

El tejido biológico al ser un medio dispersivo cuenta con propiedades dieléctricas que varían en función de la frecuencia, por eso, se presentan inconvenientes al simular este, por lo que se deben recurrir a métodos que permitan simular este tipo de características. El Método de Diferencias Finitas cuenta con un enfoque sencillo de adoptar para el cálculo de los campos electromagnéticos, además, por la naturaleza del tejido se aplica el método en el dominio de la frecuencia. Este trabajo es exploratorio el cuál busca resolver un problema multicapa unidimensional que describe las capas del tejido mamario afectado con cáncer.

En la solución del problema electromagnético multicapa con material dispersivo en una dimensión es necesario resolver varios aspectos, tales como, el rango de precisión del método, condiciones de frontera, solución de las interfaces entre materiales, propiedades de materiales. Se decide analizar los valores y vectores propios del sistema, logrando obtener la respuesta en frecuencia, comparando coeficientes de reflexión en función de la frecuencia.

La estructura del documento es:

- **Capítulo 1. Marco teórico y trabajos relacionados.**

En este capítulo se presenta la revisión de la literatura y conceptos importantes para el desarrollo del trabajo de grado. Se inicia con los fundamentos físicos donde se habla de electromagnetismo, medios dispersivos, modelo para el espectro dieléctrico de un tejido biológico, condiciones de frontera, impedancia del medio y velocidad de propagación. Por último, se habla de métodos numéricos donde se explican las Diferencias Finitas en el dominio de la frecuencia y se habla de valores propios.

- **Capítulo 2. Concepción y Metodología.**

En este capítulo se muestra de qué manera se modela el tejido como una estructura multicapa con una de sus secciones con cáncer. También se incluye la manera en la que se tiene la concepción de la matriz a evaluar en el caso, presentando finalmente la metodología de los casos a explorar.

- **En los capítulos 3, 4 y 5** se evalúan los distintos casos: cavidad vacío, estructura vacío con pared dieléctrica y estructura multicapa unidimensional. Estos capítulos presentan las mismas secciones: Diseño, implementación y resultados. En el diseño se habla de la concepción geométrica de la cavidad o estructura, en la implementación se hablan de las distintas consideraciones tomadas en cuenta en el desarrollo del código, como, la discretización del espacio, la condición de frontera, el problema de interfaz (si aplica), los valores y vectores propios, entre otros. Finalmente, en la sección de resultados se incluyen los valores propios obtenidos y la interacción de los campos electromagnéticos con el vacío, dieléctrico o tejido según sea el caso. Como resultado, se obtuvieron unos códigos que permiten evaluar los distintos casos y pueden ser encontrados en <https://github.com/dianamq/Campos-EM-en-interaccion-con-tejidos-biologicos-usando-FDFD>.
- **Capítulo 6. Conclusiones.**
En este capítulo se presentan las conclusiones obtenidas a lo largo del desarrollo del proyecto, evidenciando el cumplimiento de los objetivos planteados.
- **Capítulo 7. Trabajos Futuros.**
En este capítulo se habla de los posibles trabajos que se pueden generar en un futuro con relación al actual trabajo de grado realizado.
- **Capítulo 8. Anexos.**
En este capítulo se incluye el enlace al repositorio GitHub donde se encuentran los códigos.
- **Referencias.**
En esta parte del documento, se incluyen las diferentes referencias bibliográficas que contribuyeron a la realización del proyecto.

Planteamiento del problema

El cáncer es uno de los problemas de salud que preocupa a la ciencia médica, debido a que esta enfermedad es una de las principales causas de muerte en el mundo [6]. Las estadísticas muestran que para el año 2017 se registraron 40.899 muertes de colombianos debido al cáncer, dentro de los cuales 20.063 eran hombres y 20.836 mujeres [7]. Además de ser de las principales causas de muerte, los tratamientos no son lo suficientemente eficientes y, por ejemplo, en la quimioterapia, las mejores soluciones pueden incluir la destrucción de las células sin diferenciar entre las cancerígenas y las sanas [9].

Al ser el cáncer una de las principales causas de muerte y saber que tratamientos actuales como la quimioterapia generan importantes efectos adversos, nos lleva al planteamiento de un interrogante sobre qué sucedería si se aplicara un mecanismo que permitiera analizar la interacción entre las ondas electromagnéticas y los tejidos biológicos, esto para que en proyectos futuros permita la detección temprana de cáncer.

Hay múltiples causas y consecuencias que acarrea la carencia del uso de un mecanismo destinado a dichos fines. Causas como la diferencia de presupuesto a nivel mundial y nacional para investigar el cáncer. Ya que, el presupuesto al menos en Estados Unidos con la Sociedad Americana Contra el Cáncer para el año 2017 fue de 838 millones USD, los cuales se dividen en un 79 % para la investigación sobre el cáncer y el 21 % restante de los recursos fueron asignados a administración, gastos generales y el costo para la recaudación de fondos [10]. Mientras que a nivel nacional, el presupuesto de ingresos del Instituto Nacional de Cancerología, para la vigencia 2020 es de 114 millones USD aproximadamente, dentro de los cuales en gastos de funcionamiento del instituto se utiliza el 31,4 %, mientras que se invierten tan solo el 0,7 % en investigación para generar conocimiento con el fin de contribuir al control integral del cáncer en Colombia, el 0.018 % en el seguimiento a un programa sobre detección temprana del cáncer de mama y el 0.036 % en investigaciones realizadas para evaluar técnicas de detección de tumores, el resto del presupuesto se reparte en gastos de personal, aportes al ICBF y al SENA, estudios sobre la prevalencia de algunos tipos de cáncer en determinada población, perspectivas para abordar algunos tipos de cáncer en el futuro y en fortalecimiento de tecnología biomédica [11].

Ya una vez conocida esa causa de peso sobre la inversión, es importante destacar las consecuencias que acarrea la falta de aplicación de un mecanismo para detección temprana de cáncer. Dentro de las consecuencias; se encuentran los efectos generales que atraviesan las personas que sufren de algún tipo de cáncer luego de someterse a tratamientos convencionales, por ejemplo, algunos efectos a corto plazo como náuseas, caída del cabello, dolor, cansancio y pérdida de peso; efectos a largo plazo como esterilidad o pérdida de memoria; y efectos que aparecen meses o años después de finalizado el tratamiento como insuficiencia cardíaca, osteoporosis, problemas psicológicos y segundos cánceres [12].

Además, tratamientos como la quimioterapia y radioterapia dan lugar a efectos no deseados cuyas necesidades no son cubiertas por el seguro, efectos tales como: el debilitamiento del sistema inmune que causa que cualquier enfermedad por mínima que sea, le afecte al paciente de manera grave; problemas digestivos; problemas dermatológicos; úlceras gástricas; etc. Para poder tratar estos efectos, se hace necesario el uso de cremas, jabones o perfumes especiales, antiinflamatorios, y demás medicamentos que claramente no son económicos, llevando a una precariedad económica y afectando tanto la calidad como la esperanza de vida de los pacientes [13].

Es un problema, el hecho de que a pesar de que hayan aplicaciones de modelos computacionales en donde se describe el comportamiento de la interacción de células cancerígenas con ondas electromagnéticas, estos muchas veces pueden no ser suficientes debido a la gran variedad de cáncer existentes y al grave problema de salud que esto representa, siendo a su vez de difícil acceso para muchas personas, por otra parte, las características invasivas de otros tratamientos han generando efectos negativos adicionales a la salud. Por lo tanto, se espera que sea posible contribuir en este aspecto usando los conocimientos de las propiedades electromagnéticas en interacción tanto con el tejido celular sano como con el cancerígeno, también, haciendo uso de los métodos computacionales que ayuden a su comprensión en interacción con ondas electromagnéticas, ya que, son en estos modelos en donde se detallan características intrínsecas tanto de los tejidos como del tipo de onda

electromagnética a propagar, con la finalidad de permitir el desarrollo de detectores más eficientes y a futuro, tratamientos menos invasivos.

Justificación

Se observa una oportunidad en este campo, debido a que, de acuerdo con la OMS el cáncer es la segunda causa de muerte en el mundo y tratamientos como la quimioterapia llevan a la destrucción de las células sin diferenciar entre las cancerígenas y las sanas [9], causando así un deterioro adicional a la enfermedad en la salud y calidad de vida de las personas.

La caracterización de los tejidos biológicos por medio de un modelo electromagnético permite realizar una abstracción del tejido deseado para mejorar la comprensión y facilitar el trabajo con este tipo de modelos.

Por lo tanto, es importante realizar una búsqueda de esos modelos electromagnéticos, con el fin de ser implementados en un método numérico que brinde la posibilidad de analizar el comportamiento dado en la interacción entre ondas electromagnéticas incidentes en un tejido mamario cancerígeno. Además, desde la literatura, es posible encontrar información acerca de la permitividad y conductividad en el tejido mamario con cáncer a diferentes frecuencias.

Esta investigación es un punto de partida para proyectos realizados en algún futuro que sean de mayor envergadura, como por ejemplo: la detección temprana de cáncer, la evaluación de diferentes tratamientos, a su vez puede llegar a ser una herramienta que permita emular al tejido afectado, siendo así, un instrumento capaz de apoyar al paciente en la medida que se pueda evitar que se someta a pruebas invasivas para detectar el estadio en el cual se encuentre del cáncer y así el médico puede estar evaluando todas las posibilidades sobre cómo abordar el tratamiento del paciente de la mejor manera desde lo que ve y puede interactuar desde la pantalla.

Con el desarrollo del presente trabajo de grado y encaminado hacia lo que puede llegar a ser en un futuro, es posible realizar un aporte en diferentes áreas y favorecer varios usuarios permitiendo un impacto positivo, por ejemplo, con estudiantes de medicina que quieran estudiar el cáncer y comprender las imágenes médicas de un tejido cancerígeno en interacción con ondas electromagnéticas, fisiólogos que quieran entender este tipo de interacción en los tejidos y evaluar futuros tratamientos, médicos oncólogos que busquen tener una mejor visualización sin necesidad de intervenir al paciente para la toma de decisiones acerca de los posibles tratamientos, e incluso puede servir para validar hipótesis que se hayan planteado previamente al contar con una herramienta que le permite emular el tejido del paciente.

Se busca que con este proyecto de grado se pueda hacer un aporte, en pequeña medida, al conocimiento científico, médico, pedagógico y clínico. Adicionalmente, el impacto que se espera generar va directo a dos grandes ámbitos, en la educación, al aportar conocimiento médico y presentar una herramienta práctica que le permite a los estudiantes acercarse al paciente sin intervenir en él y en el ámbito ético, al no afectar directamente al paciente debido a que al realizarse por medio de simulaciones, no se requiere la participación de personas.

Los objetivos planteados para llevar a cabo el desarrollo de este proyecto son:

Objetivos

Objetivo General

Implementar un modelado computacional que permita simular la interacción entre campos electromagnéticos y tejidos mamarios afectados con cáncer.

Objetivos Específicos

- Analizar modelos físicos de tejidos biológicos que describan los fenómenos eléctricos y magnéticos más relevantes en tejidos, en rangos de frecuencia milimétrica.
- Implementar métodos numéricos que permitan simular los modelos eléctricos de tejidos biológicos.
- Simular el comportamiento de los campos electromagnéticos en interacción con tejido humano.

Marco Teórico y trabajos relacionados

1.1. Fundamentos físicos

1.1.1. Electromagnetismo.

El electromagnetismo es uno de los principios que hoy en día está presente en la mayoría de las actividades que realizamos. Maxwell a través de la unificación de las teorías sobre electromagnetismo logró hacer que esto pudiera ser usado en los dispositivos electrónicos. Las cuatro leyes de Maxwell son:

- Ley de Gauss para campos eléctricos: el flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada imaginaria es igual a la carga que contiene. Está representada en forma diferencial por la ecuación 1.1.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

- Ley de Gauss para Campos Magnéticos: el flujo magnético que atraviesa una superficie cerrada es igual a cero, porque no existen monopolos magnéticos. Está representada en forma diferencial por la ecuación 1.2.

$$\vec{\nabla} \cdot \mu \vec{H} = 0 \quad (1.2)$$

- Ley de Faraday-Lenz: el flujo magnético variante en el tiempo genera circulación de campo eléctrico. Está representada en forma diferencial en el tiempo por la ecuación 1.3 y en frecuencia por la ecuación 1.4.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\mu \partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H} \quad (1.4)$$

- Ley de Ampere-Maxwell: densidades de corrientes y flujos eléctricos variantes en el tiempo generan circulación de campos magnéticos. Está representada en forma diferencial en el tiempo por la ecuación 1.5 y en frecuencia por la ecuación 1.6.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = (\sigma + i\omega\varepsilon) \vec{E} \quad (1.6)$$

1.1.1.1. Medios dispersivos

Dependiendo de las características del medio, así mismo se comporta la velocidad con la que se propagan las ondas. Se dice que un medio es dispersivo cuando la velocidad de propagación con la que viajan las ondas cambia a medida que varía la frecuencia [14]. Es precisamente por eso que, el tejido biológico se caracteriza por ser un medio dispersivo, debido a que, su permitividad y/o permeabilidad varían en función de la frecuencia [15].

1.1.1.2. Modelo para el espectro dieléctrico de un tejido biológico

La **permitividad** es una propiedad física que describe cómo un campo eléctrico afecta un medio. Está determinada por la tendencia de un material a polarizarse ante la aplicación de un campo eléctrico para anular parcialmente el campo interno del material y está directamente relacionada con la susceptibilidad eléctrica [16].

En 1996, Gabriel et al., presentaron aportes muy valiosos en [17], [18] y [19] que permiten conocer las propiedades dieléctricas de diferentes tejidos biológicos relevantes para el desarrollo del trabajo de grado como el tejido muscular y la piel. Por un lado, realizan una revisión de la literatura evidenciando al igual que Lazebnik et al. en el 2007 [20] cómo a medida que aumenta la frecuencia, la permitividad disminuye mientras que la conductividad aumenta. Por otra parte, presentan medidas experimentales de las propiedades dieléctricas de los tejidos en un rango de frecuencias de 10 Hz a 20 Ghz, concluyendo con la presentación de modelos para determinar la permitividad en función de la frecuencia, tales como, las ecuaciones de Debye y Cole-Cole.

$$\hat{\varepsilon}_d = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} \quad (1.7)$$

La ecuación 1.7 es conocida como la expresión de Debye, donde ε_∞ es la permitividad a frecuencias cuando $\omega\tau \gg 1$, ε_s es la permitividad a frecuencias cuando $\omega\tau \ll 1$ y el numerador describe la magnitud de dispersión. Teniendo en cuenta la complejidad de la composición del material biológico, esta ecuación 1.7 no logra imitar completamente las propiedades dieléctricas en un rango amplio de frecuencias por lo que es necesario añadir a la expresión parámetros de distribución α donde $0 < \alpha < 1$, dando como resultado la ecuación 1.8 la cual es conocida como la ecuación de Cole-Cole.

$$\hat{\varepsilon}_{cc} = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega\tau^{(1-\alpha)}} \quad (1.8)$$

La **conductividad eléctrica** es la capacidad de un cuerpo de permitir el paso de la corriente eléctrica a través de sí. El parámetro α permite ampliar la dispersión y así lograr describir de manera precisa el espectro del tejido biológico en términos de la ecuación 1.8. Una vez se toman los valores

apropiados para cada tipo de tejido, se puede predecir el comportamiento dieléctrico en el rango de frecuencia esperado.

$$\hat{\epsilon}_{sigma} = \epsilon_{\infty} + \sum_n \frac{(\epsilon_s - \epsilon_{\infty})_n}{1 + j\omega\tau_n^{(1-\alpha_n)}} + \frac{\sigma_s}{j\omega\epsilon_0} \quad (1.9)$$

Como vemos en la ecuación 1.9, el parámetro σ_s hace referencia a la conductividad estática del tejido biológico y ϵ_0 es la permitividad del espacio libre.

En [19] no solamente se presenta el modelo para hallar las propiedades dieléctricas en el tejido biológico, también se muestra el valor de los parámetros necesarios para hallar la permitividad compleja de diferentes tejidos, parámetros que también se evidencian en [20] y [21], esta información recolectada se consigna en el Cuadro presentado en 1.1.

Tipo de tejido	ϵ_{∞}	$\epsilon_s - \epsilon_{\infty}$	$\tau(ps)$	α	Referencia
Piel	4	32	7,23	0	[19]
Adiposo	3,140	1,708	14,65	0,061	[21]
Glandular	7,821	41,48	10,66	0,047	[21]
Tumor	9,058	51,31	10,84	0,022	[20]
Músculo	4	50	7,23	0,10	[19]

Cuadro 1.1: Parámetros de la ecuación 1.8 para propiedades dieléctricas en tejidos biológicos

1.1.2. Condiciones de frontera

Para resolver problemas electromagnéticos y saber como interactúan los diferentes materiales con los campos electromagnéticos es necesario saber qué comportamiento se tiene en la frontera.

1.1.2.1. PEC

Es una condición de conductor eléctrico perfecto, hace que se creen condiciones ideales en la cavidad, indicando que el campo eléctrico que se encuentra justo en la frontera sea cero. Por lo cual, las ondas se reflejan perfectamente [22].

Cavidad resonante

Se puede entender como un volumen cerrado por paredes conductoras dentro del cual se introduce y se extrae energía por diversos métodos [23].

Solución analítica cavidad resonante 1D

En la Figura 1.1 se muestra el diseño de una cavidad resonante de tamaño L con una condición de frontera tanto para la izquierda como para la derecha de la cavidad igual a cero.

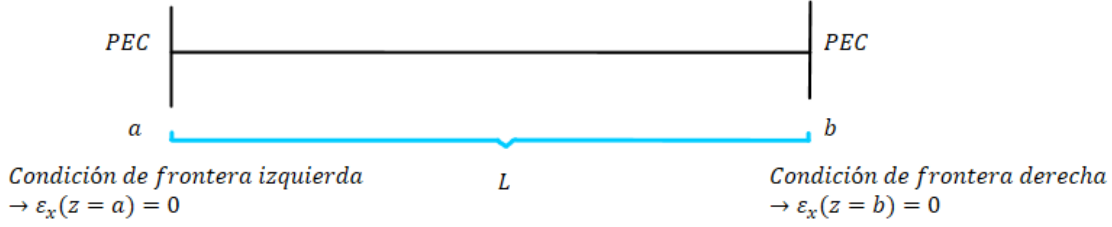


Figura 1.1: Cavidad resonante

A partir de las ecuaciones de Faraday-Lenz y Ampere-Maxwell vistas en las ecuaciones 1.4 y 1.6, considerando el caso unidimensional propagándose en dirección z y asumiendo E polarizado en x y H en y , se despeja para obtener las siguientes ecuaciones:

$$H_y = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{dE_x}{dz} \quad (1.10)$$

$$E_x = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{dH_y}{dz} \quad (1.11)$$

Reemplazando 1.10 en 1.11 se obtiene la ecuación 1.12, donde k hace referencia al número de onda.

$$E_x = k^2 \frac{d^2 E_x}{dz^2} \quad (1.12)$$

De ahí se define una solución general para la condición de frontera tal que:

$$E_x = C1 \text{Sen}(kz) + C2 \text{Cos}(kz) \quad (1.13)$$

Luego, resolviendo las condiciones de frontera, se tiene en las ecuaciones 1.14 y 1.15 la condición de frontera izquierda y derecha respectivamente.

$$E_x(z=0) = C2 = 0 \quad (1.14)$$

De la ecuación 1.14 se tiene que entonces $C1 = 0$.

$$E_x(z=L) = E_0 \text{Sen}(kL) = 0 \quad (1.15)$$

donde se deduce que $k = \frac{n\pi}{L}$, lo que lleva a la solución para el campo eléctrico en la ecuación 1.16, donde las longitudes de onda permitidas en la cavidad están dadas por $\lambda = \frac{2L}{n}$.

$$E_x(z) = E_0 \text{Sen}\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \quad (1.16)$$

Reemplazando 1.16 en 1.10 se obtiene la ecuación 1.17:

$$H_y = j \frac{E_0}{\eta_0} \text{Cos}\left(\frac{n\pi}{L} z\right) \quad (1.17)$$

Partiendo del hecho de que $\lambda = \frac{2L}{n}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, si se asume una cavidad con una condición de frontera PEC, donde ambos campos eléctricos en los extremos son cero y un tamaño para la cavidad de $L = 1m$, el primer modo de vibración ($n=1$) está representado por la Figura 1.2, donde $\lambda = 2m$.



Figura 1.2: Longitud de onda [1]

1.1.2.2. Abierta

Se le conoce también como no reflectante o radiante, consta de un límite abierto el cual permite que las ondas parezcan que salen de la estructura unidimensional sin reflejarse [24]. Se aplica en los límites de la estructura con el fin de eliminar o minimizar las reflexiones espurias ocurridas en la propagación de las ondas [25]. Marchesiello et al. en su artículo [26] sobre condición de frontera abierta, propone un método que combine ciertas características para propagación de las ondas hacia afuera o hacia adentro (de una estructura, por ejemplo), de esa manera, permite que la información del interior de la solución atraviese la frontera sin presentar reflexión excesiva.

Jian-Ming Jin en [27] explica la idea de la condición de frontera absorbente, al asumir una región finita para la estructura unidimensional. En la Figura 1.3 se puede observar la región finita comprendida por $a < z < b$ y las direcciones de propagación de la onda, al igual que los campos eléctricos de la frontera y sus campos eléctricos adyacentes.

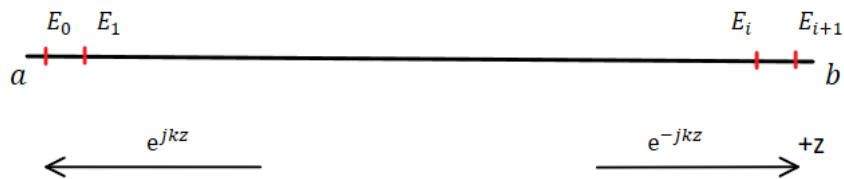


Figura 1.3: Dirección en la que viaja la onda

Asumiendo que se propaga en la dirección del eje z positivo, la onda puede expresarse del

siguiente modo:

$$E_x(z) = E_0 e^{-jkz} \quad (1.18)$$

De la ecuación 1.18 se tiene que E_0 es la intensidad del campo y representa ese valor del campo eléctrico en la interfaz que todavía es desconocido. Como se sabe, k es el número de onda y puede reemplazarse por $k = \frac{\omega}{c}$.

Derivando con respecto a z , se obtiene:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -jkE_0 e^{-jkz} = -j\frac{\omega}{c}E_x(z) \quad (1.19)$$

Aplicando el método de diferencias finitas a la ecuación 1.19 y resolviendo se sigue el siguiente procedimiento:

$$\frac{E_{i+1} - E_i}{dz} = -j\frac{\omega}{c} \left(\frac{E_{i+1} + E_i}{2} \right) \quad (1.20)$$

$$E_{i+1} \left(\frac{1}{dz} + j\frac{\omega}{2c} \right) = E_i \left(\frac{1}{dz} - j\frac{\omega}{2c} \right) \quad (1.21)$$

$$E_{i+1} = E_i \frac{\left(\frac{1}{dz} - j\frac{\omega}{2c} \right)}{\left(\frac{1}{dz} + j\frac{\omega}{2c} \right)} \quad (1.22)$$

De la ecuación 1.22, se tiene que para calcular el campo en la frontera del lado derecho de la cavidad, se necesita conocer el campo eléctrico anterior y como se puede observar también depende de la frecuencia.

Para hallar la condición de frontera en el lado izquierdo de la cavidad, se toma en consideración la propagación de la onda en dirección del eje z negativo, al asumir de esta manera, se tiene que la ecuación vista en 1.18 pasa a ser:

$$E_x(z) = E_0 e^{jkz} \quad (1.23)$$

Por lo tanto, la ecuación 1.19 pasa a ser:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = jkE_0 e^{jkz} = j\frac{\omega}{c}E_x(z) \quad (1.24)$$

Bajo un procedimiento similar al realizado a la ecuación 1.19, se transforma la ecuación 1.24 a diferencias finitas. Se obtiene que para hallar el campo eléctrico ubicado en la frontera izquierda, se tiene la siguiente ecuación:

$$E_0 = E_1 \frac{\left(\frac{1}{dz} - j\frac{\omega}{2c} \right)}{\left(\frac{1}{dz} + j\frac{\omega}{2c} \right)} \quad (1.25)$$

Y como se puede entender, este campo de la frontera izquierda depende del campo eléctrico inmediatamente siguiente y de la frecuencia.

1.1.3. Reflexión y transmisión

En un medio dispersivo como lo es un tejido biológico, las ondas no se propagan en línea recta sino que, se producen efectos de reflexión, refracción y dispersión al momento en que la onda llega a la frontera de separación de medios distintos. Al momento en que la onda cambia de medio, una parte de la misma se transmite con características similares, mientras que otra parte se refleja en el primer medio. Cuando se presenta este fenómeno, la frecuencia tanto de la onda incidente, la reflejada y la transmitida permanece igual, lo que si se modifica es la longitud de la onda [28].

En el libro de Orfanidis [29] se plantean las ecuaciones para abordar problemas de múltiples interfaces. En el capítulo 4 del presente trabajo de grado se aborda un caso donde se inserta una pared dieléctrica en una estructura, por lo que es posible hacer uso de las ecuaciones que presenta Orfanidis para una única pared dieléctrica.

1.1.3.1. Una sola pared dieléctrica

En la Figura 1.4 se representa la estructura vacío con pared dieléctrica y se muestran parámetros necesarios para determinar los coeficientes de reflexión y de transmisión. Se asume la propagación de una onda en vacío que se ve alterada por la introducción de una pared dieléctrica, se tienen tres medios representados por η_a , η_1 y η_b que indican los medios vacío, dieléctrico y vacío nuevamente. El término o.i indica onda incidente, o.r onda reflejada y o.t onda transmitida, l_1 es el ancho del dieléctrico. Los coeficientes de reflexión elementales desde los lados izquierdos de cada interfaz están

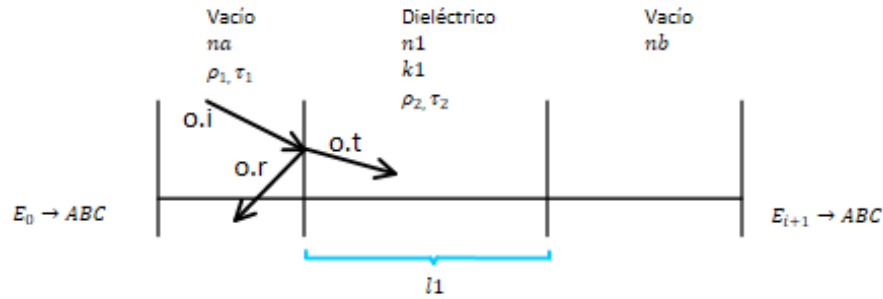


Figura 1.4: Reflexión y transmisión para el caso de vacío-pared dieléctrica

dados por ρ_1 en la ecuación 1.26 y ρ_2 en la ecuación 1.27, donde η es la impedancia del medio y n es el índice refractivo.

$$\rho_1 = \frac{\eta_1 - \eta_a}{\eta_1 + \eta_a} = \frac{n_a - n_1}{n_a + n_1} \quad (1.26)$$

$$\rho_2 = \frac{\eta_b - \eta_1}{\eta_b + \eta_1} = \frac{n_1 - n_b}{n_1 + n_b} \quad (1.27)$$

Los coeficientes de transmisión correspondientes están descritos por τ_1 en la ecuación 1.28 y τ_2 en la ecuación 1.29.

$$\tau_1 = 1 + \rho_1 \quad (1.28)$$

$$\tau_2 = 1 + \rho_2 \quad (1.29)$$

El coeficiente de reflexión Γ_1 en el medio η_a está representado por la ecuación 1.30.

$$\Gamma_1 = \frac{\rho_1 + \Gamma_2 e^{-2jk_1 l_1}}{1 + \rho_1 \Gamma_2 e^{-2jk_1 l_1}} \quad (1.30)$$

El coeficiente de reflexión Γ_2 en el medio η_1 está representado por la ecuación 1.31.

$$\Gamma_2 = \rho_2 \quad (1.31)$$

La respuesta de transmisión está dada por la ecuación 1.32.

$$\tau = \frac{\tau_1 \tau_2 e^{-jk_1 l_1}}{1 + \rho_1 \rho_2 e^{-2jk_1 l_1}} \quad (1.32)$$

En el capítulo 5 del presente trabajo de grado se aborda un caso donde se evalúa el tejido mamario como una estructura multicapa, por lo que es posible hacer uso de las ecuaciones que presenta Orfanidis para múltiples paredes dieléctricas.

1.1.3.2. Múltiples paredes dieléctricas

Orfanidis en [29] también plantea las ecuaciones necesarias para evaluar los coeficientes de reflexión y de transmisión en estructuras que cuentan con más de un dieléctrico y por lo tanto, más de una interfaz y también incluyen el medio η_a que representa el vacío al principio de la estructura.



Figura 1.5: Reflexión para el caso de estructura multicapa unidimensional

Los coeficientes de reflexión elementales desde los lados izquierdos de cada interfaz están representados por la ecuación 1.26 para el primer coeficiente y para los demás se encuentran representados por la ecuación 1.33, donde $i=2,3,4,5,6$.

$$\rho_i = \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\eta_i + \eta_{i-1}} = \frac{n_{i-1} - n_i}{n_{i-1} + n_i} \quad (1.33)$$

En la Figura 1.5 se representa la estructura multicapa de una dimensión que modela el tejido biológico. Se tienen los medios representados por $\eta_a, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6$ los cuales indican los medios vacío, piel, tejido adiposo, tejido glandular, tumor y tejido muscular respectivamente.

$$\Gamma_i = \frac{\rho_i + \Gamma_{i+1}e^{-2jk_i l_i}}{1 + \rho_i \Gamma_{i+1}e^{-2jk_i l_i}} \quad (1.34)$$

Los coeficientes de reflexión desde el medio η_a en el vacío hasta el medio η_4 que representa el tumor están dados por la ecuación 1.34, donde $i=1,2,3,4,5$. Mientras que el coeficiente de reflexión en el medio η_5 que representa al tejido muscular está dado por la ecuación 1.35.

$$\Gamma_6 = \rho_6 \quad (1.35)$$

Los índices de refracción se calculan de acuerdo con la ecuación 1.36, donde c es la velocidad con la que se propaga una onda en el vacío, mientras que v es la propagación de la onda en un medio distinto a vacío.

$$n = \frac{c}{v} \quad (1.36)$$

1.1.4. Impedancia del medio

La impedancia η hace referencia a la resistencia presentada en la propagación de ondas electromagnéticas con relación al medio.

$$\eta_0 = \frac{E}{H} = \mu_0 c_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{1}{\epsilon_0 c_0} \quad (1.37)$$

1.1.5. Velocidad de propagación

Es la relación existente entre el espacio que avanza una onda con el tiempo que emplea para propagarse. Así como también, hacer referencia a la magnitud que mide la velocidad a la que se propaga la perturbación de la onda a lo largo de su desplazamiento.

$$c = \lambda f \quad (1.38)$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (1.39)$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu_r \epsilon_r}} c_0 \quad (1.40)$$

1.2. Métodos numéricos

1.2.1. Diferencias Finitas en el Dominio de la Frecuencia

Es un método de solución numérica para problemas generalmente en electromagnetismo y, a veces, en acústica, basado en aproximaciones de diferencia finita de los operadores de derivada en la ecuación diferencial que se está resolviendo [30].

En 2012, Hans-Dieter Lang [31] menciona que al trabajar con medios dispersivos es más natural hacer uso del método de las diferencias finitas en el dominio de la frecuencia. Por ejemplo, al ser el tejido biológico un medio dispersivo, sus propiedades dieléctricas varían en función de la frecuencia. Este artículo permite un acercamiento al entendimiento del método, la concepción geométrica del espacio discretizado en una dimensión para los campos eléctricos y magnéticos de la cavidad, así como una representación matricial con las ecuaciones que permiten el cálculo de los campos.

Adicionalmente, Hans-Dieter Lang [31] realiza un análisis de los valores propios, que permite aplicarse en el desarrollo del proyecto de grado presente y así calcular las frecuencias de resonancia en la cavidad.

En [27], Jian-Ming Jin explica el método de diferencias finitas al aproximar los operadores de diferenciación en las derivadas, aproximaciones obtenidas a partir de la definición de derivadas. En la Figura 1.6 se ejemplifica la aproximación central en diferencias finitas.

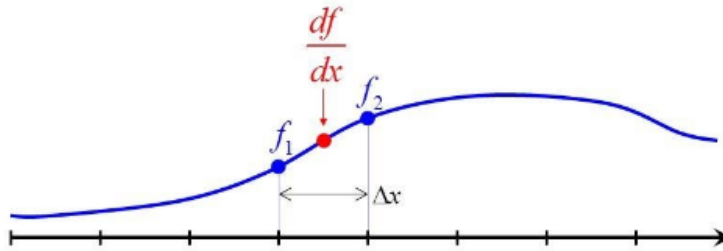


Figura 1.6: Diferencias finitas como aproximación a derivada central [2]

En [31] se presenta un espacio discretizado para campos electromagnéticos para una dimensión. Aprovechando esa discretización junto con la definición de diferencias finitas visualizada en la Figura 1.6, se puede entender el método a utilizar como se consigna en la Figura 1.7, permitiendo hallar campos magnéticos a partir de campos eléctricos y a su vez, los campos eléctricos a partir de los campos magnéticos correspondientes.

Partiendo de la Ley de Faraday-Lenz (1.4) y la ley de Ampere-Maxwell (1.6) en el dominio de la frecuencia, se asume propagación de la onda electromagnética a lo largo del eje z , y se considera polarización de la intensidad de campo eléctrico en y y el de intensidad de campo magnético en x . Se debe garantizar que al calcular los campos electromagnéticos, se tenga en cuenta la velocidad de la onda para evidenciar un cambio de la longitud de onda entre interfaces. A partir del número de onda $k = \frac{\omega}{c}$ se tiene en consideración tanto la frecuencia como la velocidad de la onda. Se multiplican las ecuaciones de Faraday-Lenz (1.4) y la ley de Ampere-Maxwell (1.6) por un factor

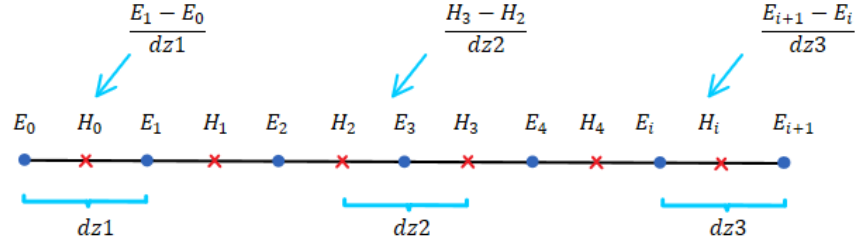


Figura 1.7: Diferencias finitas como aproximación central-1D

que permite incluir el valor de k en las ecuaciones, adicionalmente se aplican diferencias finitas. Una vez finalizado el proceso, se transforman las ecuaciones a una representación matricial. Teniendo así, la representación matricial 1.41, donde $\frac{d}{dz}$ está representando una derivada que llevada a diferencias finitas, realmente está expresando el valor medio entre los campos de al lado, es decir, $\frac{d}{dz} = \frac{E_1 - E_0}{dz1}$ si se trata de calcular H_0 .

$$\begin{pmatrix} 0 & \eta \frac{d}{dz} c \\ \frac{1}{\eta} \frac{d}{dz} c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ H_x \end{pmatrix} = j\omega \begin{pmatrix} E_y \\ H_x \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

1.2.2. Valores y vectores propios

En una ecuación matricial, una herramienta importante a la hora de calcular los valores propios es el polinomio característico, que permite transformar la ecuación matricial de la forma $AV = B$ a un sistema de ecuaciones lineales de la forma $AV = \Lambda V$, donde \mathbf{V} representa los vectores propios y Λ representa una matriz cuya diagonal son los valores propios. Observando la representación matricial presentada en 1.41, esta tiene la forma descrita $AV = \Lambda V$ donde los valores propios están representados por $\lambda = j\omega$.

A través de los vectores propios, se traduce la información de la matriz original por medio de la multiplicación de esos valores y un valor propio asociado. Los valores propios al ser aplicados, representan una característica propia del sistema que se está evaluando. Para el caso de este trabajo de grado, los valores propios son las frecuencias de resonancia asociadas a los campos.

En un artículo de enfoque electromagnético en tejidos biológicos [32], W. M. Brink et al., presentan un problema que puede resolverse hallando los valores y vectores propios correspondientes, además, dependiendo del dato en el que se encuentran interesado, así mismo consideran usar vectores normalizados solamente. A lo largo del artículo, la resolución de valores propios cobra importancia. Por ejemplo, al ser monitoreados estos valores propios, le permiten evaluar la influencia de la frecuencia en el rendimiento de enfoque electromagnético en tejidos biológicos.

Concepción y metodología

2.1. Concepción geométrica del tejido

A lo largo de la revisión en la literatura, se logran identificar las divisiones de tejidos relevantes para considerar en la concepción de los tejidos a evaluar para la interacción con los campos eléctricos y magnéticos.

En la Figura 2.1 se puede apreciar la representación física de la mama al lado izquierdo y la vista de la ecografía de la mama sin cáncer del lado derecho, ambos dispuestos de una manera horizontal.

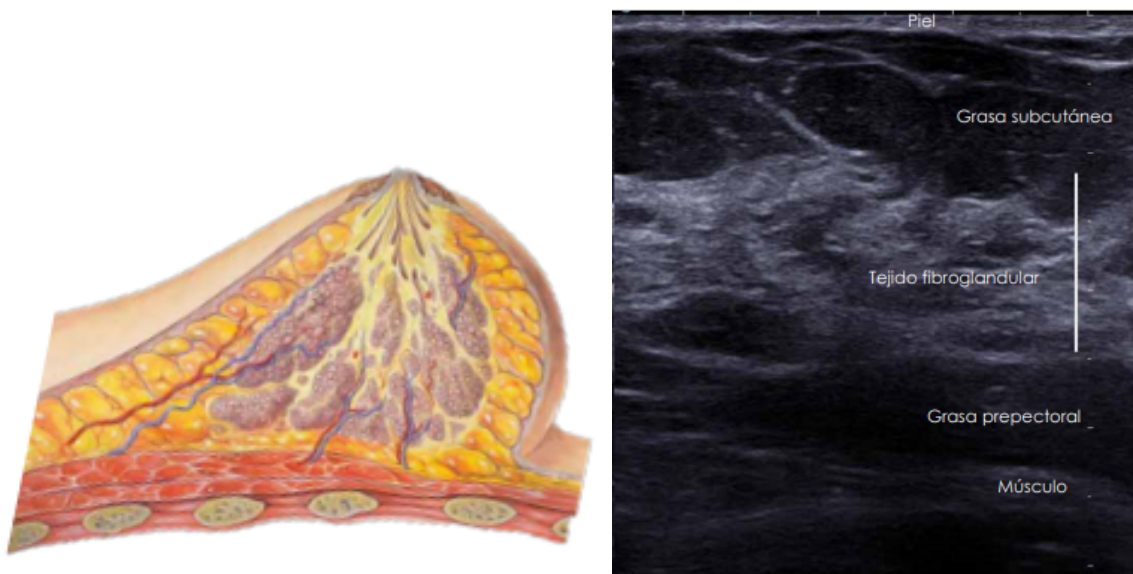


Figura 2.1: Modelo del seno sin cáncer vista horizontal [3]

Por otra parte, en la Figura 2.2, se presenta una vista vertical de un modelo de la mama sin cáncer.

Una vez conocida la distribución de las capas de la anatomía de la mama en condiciones sanas, se tiene el modelo presentado en la Figura 2.3 donde ya se tiene en consideración la presencia de tumor dentro de las capas.

Con el objetivo de obtener una buena comprensión acerca de las diferentes capas del tejido mamario, la distribución y el tamaño de las mismas, se toman como base las imágenes presentadas



Figura 2.2: Modelo de seno sin cáncer vista vertical [4]

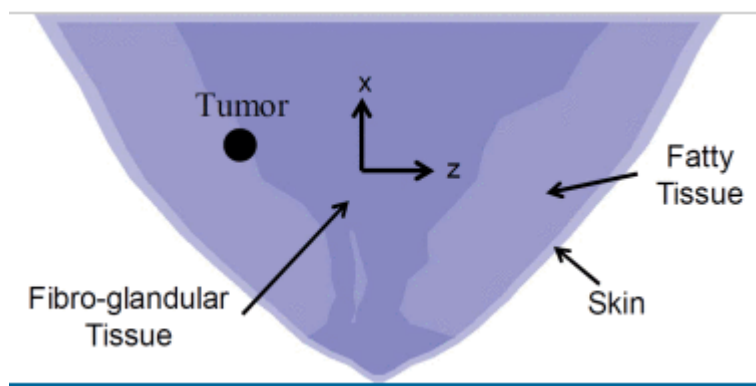


Figura 2.3: Modelo realista del seno considerando el tejido fibro-glandular al interior [5]

previamente en este mismo capítulo, para realizar una abstracción del tejido y poderlo visualizar como una estructura multicapa unidimensional. Para la estructura analizada, la primera sección de la misma corresponde a vacío, seguido de las diferentes capas del tejido mamario: piel, tejido adiposo, tejido glandular, tumor y tejido muscular.

Como se ilustra en la Figura 2.4, a través de una estructura rectangular se simulan las diferentes capas existentes en el tejido mamario, siendo L el tamaño total de la cavidad.

La idea es aplicar la representación matricial de la ecuación 1.41 la cual tiene la forma $AV = \Lambda V$. Al lado izquierdo de la ecuación se tiene la matriz A que contiene las ecuaciones definidas por el método de diferencias finitas en el dominio de la frecuencia multiplicado por la velocidad de la onda e impedancia característica, esta última se multiplicará o dividirá dependiendo de si se está calculando campo eléctrico o magnético. Por otra parte, Λ es el conjunto de valores propios y V son los vectores propios que representan los campos eléctricos y magnéticos que se desean conocer.

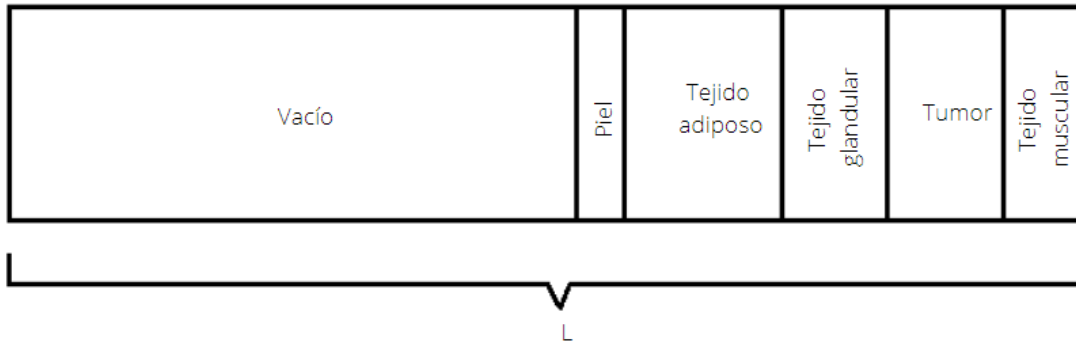


Figura 2.4: Ilustración de las capas del tejido mamario como una estructura multicapa unidimensional

2.2. Concepción de la matriz

0	$-2\mu_0 c_0$	0	0	0	0	0	0	0	...	Condición de frontera abierta
$\frac{1}{4\epsilon k_1} x_0$	0	$-\frac{1}{4\epsilon k_1} x_0$	0	0	0	0	0	0	...	Vacío
0	$\frac{1}{4\epsilon k_1} x_0$	0	$-\frac{1}{4\epsilon k_1} x_0$	0	0	0	0	0	...	
...	Interfaz vacío-piel
...	$-\frac{1}{2}$	0	1	...	0	1	0	$-\frac{1}{2}$...	Piel
...	0	$\frac{1}{4\epsilon k_2} x_{pp}$	0	$-\frac{1}{4\epsilon k_2} x_{pp}$	0	0	0	0	...	
...	0	0	$\frac{1}{4\epsilon k_2} x_{pp}$	0	$-\frac{1}{4\epsilon k_2} x_{pp}$	0	0	0	...	Interfaz piel-tejido adiposo
...	Tejido adiposo
0	Interfaz tejido adiposo-tejido glandular
...	$-\frac{1}{2}$	0	1	...	0	1	0	$-\frac{1}{2}$...	
0	Tejido glandular (T.G)/
0	Interfaz T.G-Tumor/Tumor
...	$-\frac{1}{2}$	0	1	...	0	1	0	$-\frac{1}{2}$...	Interfaz tumor-tejido muscular
0	0	0	$\frac{1}{4\epsilon k_6} x_m$	0	$-\frac{1}{4\epsilon k_6} x_m$	0	...	Tejido muscular
0	...	0	0	...	0	0	$\frac{1}{4\epsilon k_6} x_m$	0	$-\frac{1}{4\epsilon k_6} x_m$	
0	0	0	0	0	0	0	$2\mu_0 c_0$	-1	0	Condición de frontera abierta

Figura 2.5: Matriz de rotacionales para modelar el tejido mamario

Constante	Valor en campos eléctricos	Valor en campos magnéticos
x_0	$c_0 * \eta_0$	$\frac{c_0}{\eta_0}$
x_{pp}	$c_p * \eta_{pp}$	$\frac{c_p}{\eta_{pp}}$
x_a	$c_a * \eta_a$	$\frac{c_a}{\eta_a}$
x_g	$c_g * \eta_g$	$\frac{c_g}{\eta_g}$
x_t	$c_t * \eta_t$	$\frac{c_t}{\eta_t}$
x_m	$c_m * \eta_m$	$\frac{c_m}{\eta_m}$

Cuadro 2.1: Relación de variables presentadas en la matriz

Como se logra observar en la Figura 2.5, se encuentra el desarrollo del método de diferencias finitas en el dominio de la frecuencia a ambos lados de la diagonal para calcular los campos electromagnéticos, multiplicados por una constante especificada en el cuadro 2.1, esta constante representa la velocidad con la que se propaga la onda en el tejido en específico multiplicada o dividida según sea el campo, por la impedancia característica. Los extremos de la matriz, al estar en filas pares corresponden a campo eléctrico así como está dispuesto en la Figura 1.7.

Para este caso particular se tomó en cuenta una condición de frontera abierta, para evitar reflexiones.

2.3. Metodología

Los capítulos 3, 4 y 5 están estructurados para explicar el diseño, implementación y resultados obtenidos de diferentes casos evaluados: cavidad vacío, estructura vacío con pared dieléctrica y finalmente, la estructura multicapa unidimensional. La idea de explorar los dos primeros casos es poder validar el funcionamiento del método numérico y obtener las herramientas necesarias para llevar a cabo el análisis en la estructura multicapa unidimensional. Antes de explicar la metodología para llevar a cabo cada uno de los casos, hay cierto procedimiento en común que se presenta:

- En cuanto al diseño, en todos los casos se representa geoméricamente lo que se quiere evaluar. Adicionalmente se define el tipo de condición de frontera a usar, bien sea, la cavidad con una condición de frontera PEC o las estructuras con una condición de frontera abierta.
- En cuanto a la implementación en el código:
 - Discretizar el espacio tanto para el campo eléctrico como el magnético por separado para cada sección en la estructura. Para el caso de cavidad vacío, la discretización es la misma a lo largo de toda la cavidad, mientras que para los demás casos, la discretización varía dependiendo del tamaño asignado para cada sección en la estructura.
 - Describir el funcionamiento de la matriz a través de un diagrama de flujo.
 - A la matriz definida, calcularle valores y vectores propios, cuyo objetivo es representar la frecuencia y los campos electromagnéticos respectivamente.
 - Asignarle un índice a cada valor propio, ordenarlos de menor a mayor dejando solo valores positivos y acotar los vectores propios teniendo en cuenta cada valor propio correspondiente.

- La matriz que contiene los vectores propios representa tanto campos eléctricos como magnéticos, por eso, se busca separarlos teniendo en cuenta que las filas pares representan los campos eléctricos, mientras que las filas impares representan los campos magnéticos.

2.3.1. Cavidad vacío

El desarrollo de este caso tiene como objetivo validar el funcionamiento del método, debido a que son propiedades dieléctricas conocidas y se tiene conocimiento de la forma de onda que se espera observar al graficar los campos. Además del procedimiento en común para todos los casos explicado anteriormente, se lleva a cabo este procedimiento adicional:

- Implementación en el código:
 - A partir de un ω numérico, determinar los valores de frecuencia teóricos y ponerlos en contraste con los valores propios obtenidos para determinar un error y acotar nuevamente el resultado para definir un rango de frecuencias aceptable.
- Como resultados se presentan los primeros dos modos de vibración donde se verifica que lo obtenido al usar el método coincide con lo esperado.

2.3.2. Estructura vacío con pared dieléctrica

El desarrollo de este caso tiene como objetivo continuar validando el funcionamiento del método, debido a que se sabe como se comporta la onda en el vacío y se busca perturbar esa propagación con un material de propiedades conocidas. Además del procedimiento en común para todos los casos, se lleva a cabo este procedimiento adicional:

- Implementación del código:
 - Importar el caso de vacío, en este punto es posible escoger el error con el cuál se trabajará y así traer el rango de frecuencias aceptados.
 - Búsqueda de distintos métodos para calcular la condición de frontera abierta.
 - Búsqueda de distintos métodos para hallar el campo eléctrico en la interfaz.

A partir de las frecuencias importadas del caso cavidad con vacío, acotar los valores y vectores propios para que se encuentren dentro del mismo rango.

 - Calcular los coeficientes que permiten conocer que tanto se refleja y se transmite de la onda al tener una pared dieléctrica perturbando su propagación.
- Finalmente, se obtienen los siguientes resultados:
 - Se obtiene el rango de frecuencias aceptables.
 - Se hace uso del código que comparte Orfanidis [29] para calcular el coeficiente de reflexión y compararlo con el obtenido dentro del desarrollo del código de este trabajo de grado, con el objetivo de verificar el uso adecuado de las ecuaciones, además del funcionamiento del método.

- Se grafica la forma de onda que se obtiene al implementar cada uno de los casos para hallar la interfaz entre medios.
- Se evalúa un caso donde la pared es transparente, es decir, cuenta con permitividad y permeabilidad del mismo valor.

2.3.3. Estructura multicapa unidimensional

Este es el caso final donde se modelan las diferentes capas que presenta el tejido mamario, el cual permite adoptar la metodología usada de los casos anteriores y finalmente observar la interacción de las ondas electromagnéticas en el tejido mamario con cáncer. Además del procedimiento en común para todos los casos, se realiza este procedimiento adicional:

- Implementación del código:
 - Determinar los tamaños para cada una de las secciones de la estructura.
 - Aplicar los métodos seleccionados para hallar la condición de frontera y el campo eléctrico en la interfaz donde hay cambio de medio.
 - Se escoge una frecuencia sobre la cual se quiere revisar la interacción de los campos EM con el tejido. Teniendo esa frecuencia, se acotan los valores propios para tener un rango de frecuencias cercanas a la escogida, de igual modo se acotan los vectores propios asociados.
 - Calcular los coeficientes que permiten conocer que tanto se refleja de la onda a lo largo de cada uno de las capas del tejido mamario.
- Finalmente, se tienen los siguientes resultados:
 - Se obtiene el rango de frecuencias para evaluar.
 - Se determinan los coeficientes de reflexión en la estructura.
 - Se grafica la interacción de ondas electromagnéticas en tejido mamario con cáncer.

Cavidad Vacío

En la sección de diseño, se presenta la concepción geométrica de la cavidad resonante, los parámetros que caracterizan al vacío y una condición de frontera PEC.

En la sección de implementación, se presenta la estructura del código. La idea de adoptar el método de diferencias finitas en el dominio de la frecuencia, se da debido a la disposición de los campos eléctricos y magnéticos uno después del otro así como se evidencia en la Figura 1.7 y con base en esto se diseña una matriz para llegar a la estructura planteada en la ecuación matricial 1.41. Bajo ese diseño es posible calcular los valores y vectores propios que permiten hallar las frecuencias de resonancia y los campos electromagnéticos respectivamente. A los valores propios se los compara con su equivalente valor teórico esperado, determinando así un error aceptado el cual permite restringir la cantidad de frecuencias a las cuales los campos electromagnéticos resuenan en la cavidad.

Finalmente en la sección de resultados, se grafican los campos E y H por separado para verificar su forma de onda y verificar que el resultado sea el esperado de acuerdo a la información teórica.

3.1. Diseño

La Figura 3.1 representa geoméricamente el caso donde se evalúa la cavidad vacío de tamaño L con una condición de frontera PEC donde los campos eléctricos en la frontera son cero.

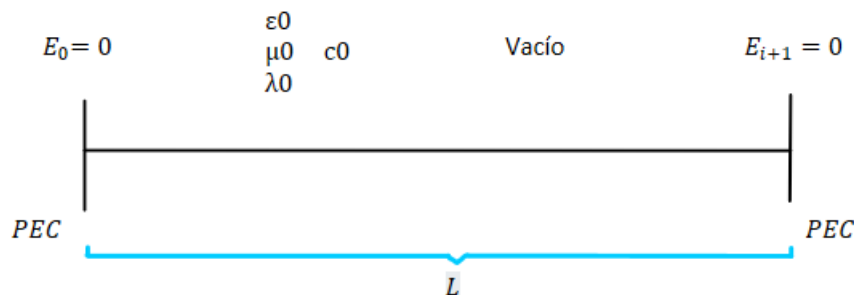


Figura 3.1: Cavidad vacío

De la Figura 3.1, se tiene el siguiente conjunto de parámetros que representan la permitividad, permeabilidad, velocidad y longitud de la onda en el vacío.

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= 8,8541878176 * 10^{-12} \\ \mu_0 &= (4 * 10^{-7})\pi \\ c_0 &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \\ \lambda_0 &= \frac{c_0}{f}\end{aligned}$$

El objetivo de evaluar la cavidad vacío en este punto es verificar el método de diferencias finitas en el dominio de la frecuencia. Adicionalmente, se tiene claridad tanto de su permitividad y permeabilidad como su velocidad de onda, además, la longitud de onda permanece constante a lo largo de la cavidad.

3.2. Implementación

3.2.1. Intervalos

A partir de la longitud de onda, se establece dentro del código una cantidad de puntos por longitud de onda $PPW = 10$ para así determinar un $dz = \frac{\lambda}{PPW}$ que representa la discretización espacial dentro de la cavidad.

Partiendo del dz definido, se deben hallar unos intervalos que dividirán a la cavidad. El cálculo de esos intervalos es importante para definir el tamaño de la matriz, siendo así, que si la cantidad de intervalos se define como I , el tamaño total de intervalos será $2I+1$. Esa cantidad de intervalos viene dada por la disposición de los campos (ver Figura 1.7), donde hay una cantidad mayor de campos eléctricos debido a la consideración de que ambas fronteras (a la izquierda y derecha) están constituidas por campos eléctricos, mientras que las posiciones de los campos magnéticos se encuentran dispuestas en puntos intermedios entre campos eléctricos. Siendo así, que si hay I intervalos para el campo magnético, habrán $I+1$ intervalos para el campo eléctrico. Es por eso que bajo esa condición se construye una matriz $n \times n$, donde $n=2I+1$ que contiene todos los campos de la cavidad.

3.2.2. Discretización espacio para campo magnético y eléctrico

El dz mencionado en 3.2.1 hace referencia a la discretización de todo el espacio en la cavidad, sin embargo, no hace la distinción entre el espacio para campo eléctrico y magnético. Luego de definir los intervalos, se hace necesario definir las posiciones tanto para campo magnético como campo eléctrico, esto con el fin de poder representar de una manera gráfica los campos. Para definir esta posición se procede con los siguientes pasos:

- Definir un arreglo que contenga $I+1$ valores y que vaya de comienzo a fin de la cavidad. Este representará las posiciones en el espacio de los campos eléctricos.
- Redefinir el dz , para que sea equivalente con estas posiciones definidas para los campos eléctricos.
- Definir los campos magnéticos como posiciones intermedias entre campos eléctricos.
- Así mismo, definir de nuevo el tamaño de cada intervalo (dz) en los campos magnéticos.

3.2.2.1. Construcción de la matriz

En el diagrama de flujo representado por la Figura 3.2 se logra evidenciar la lógica con la cuál se construyó la matriz que contiene los rotacionales de las ecuaciones de Maxwell a las que se les aplicaron diferencias finitas, para calcular tanto campos eléctricos en las componentes pares de la matriz, como campos magnéticos en las componentes impares de la misma.

3.2.2.2. Valores y vectores propios

Los valores y vectores propios asociados a la matriz se hallan con ayuda de una función de la librería Numpy de Python [33], tal y como se ve a continuación:

$$Lp, Vp = np.linalg.eig(matrizB()) \quad (3.1)$$

Donde $matriz(B)$ es la función que contiene la matriz, Lp hace referencia a los valores propios, mientras que Vp alberga los vectores propios asociados a cada uno de esos valores.

Se espera que los valores propios den como resultado valores complejos, de los cuales solamente se tomará en consideración la parte imaginaria de los mismos, debido a que, esta indica la frecuencia con la cual oscilan los campos electromagnéticos en la cavidad.

Una vez la función de Python presentada en 3.1 arroja su información, se organizan los datos con el siguiente procedimiento:

- Organizar la componente imaginaria de los valores propios de menor a mayor, obteniendo sus índices para poder asociarlos a los vectores propios que correspondan y organizar estos de igual manera.
- Reducir los valores propios acotados a solo resultados positivos.
- De igual modo, acotar los vectores propios teniendo relación con sus valores propios asociados.

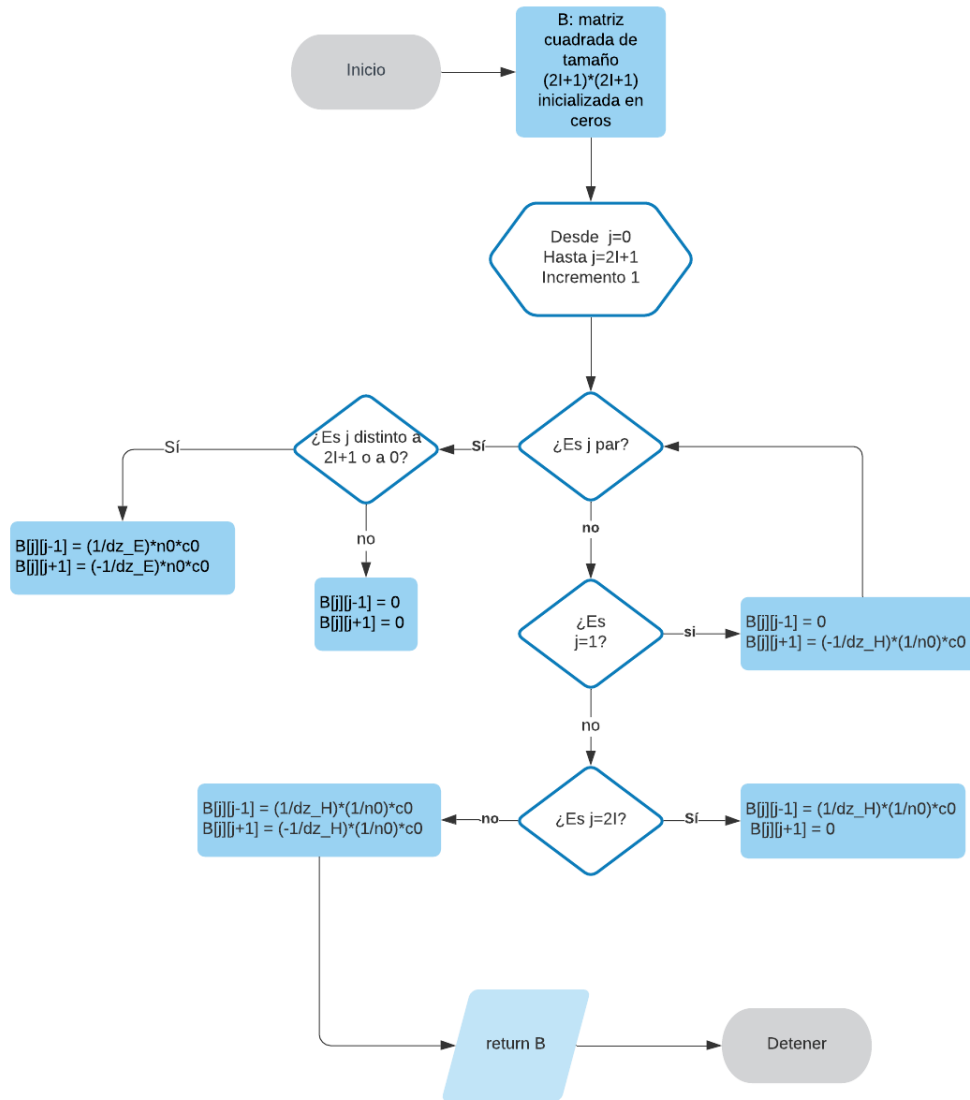


Figura 3.2: Diagrama de flujo para la lógica de la construcción de la matriz

Partiendo del hecho de que $\lambda = \frac{2L}{n}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, es posible seguir el siguiente análisis:

- Para este caso de cavidad vacío con una longitud $L = 1m$, la longitud de onda está representada por $\lambda = \frac{2}{n}m$.

- Así que, para el primer y segundo modo de vibración se espera obtener $\lambda = 2m$ y $\lambda = 1m$ respectivamente.
- Se tiene que $k = \frac{2\pi}{\lambda} = n\pi$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, donde n representan los modos de vibración. Se tiene que $k = \pi$ para el primer modo, mientras que para el segundo modo se tiene que $k = 2\pi$.
- Adicionalmente, $k = \frac{\omega}{c}$, entonces $\omega = kc$.
- Por eso, para el primer modo se debería tener una frecuencia $\omega = \pi c$ y para el segundo modo una frecuencia $\omega = 2\pi c$. De manera general, las frecuencias están dadas por $\omega = n\pi c$

3.2.3. Error en los valores propios

- Para este caso, con $\omega = n\pi c$, se puede obtener un valor de ω numérico, el cual puede usarse para comparar contra el valor de ω real obtenido en el código a través de la componente imaginaria de los valores propios, y así mismo, determinar un error.
- Para eso, se crea un arreglo con el tamaño de la cantidad de los valores propios obtenidos a través de la matriz, que se multiplique por πc :

$$n2 = np.pi * c0 * np.linspace(0, lenL2 - 1, lenL2)$$

donde $lenL2$ es una variable que guarda el tamaño de los valores propios.

Se grafica el ω real contra el ω obtenido a través de los valores propios. Como se evidencia en la Figura 3.3, los modos de vibración se comportan similares en cierto rango (149 MHz - 2 GHz) y de ahí en adelante difieren mucho.

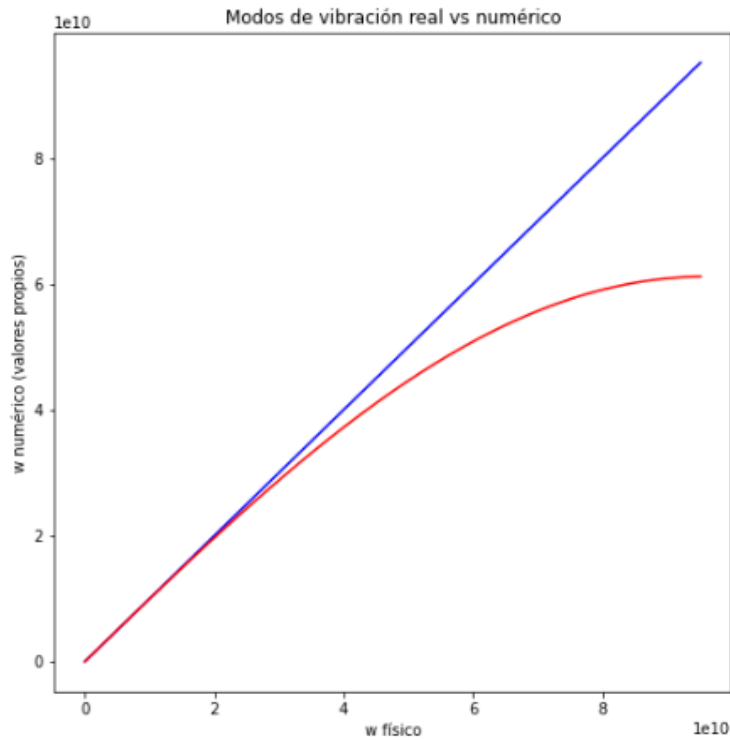


Figura 3.3: Modos de vibración (ω) real vs numérico

Es por eso que lo ideal es trabajar en las frecuencias que se encuentran lo más similar posibles en ambos casos. Por ello, se procede a calcular el porcentaje del error que hay entre ambas:

$$\frac{\omega_{teorico} - \omega_{experimental}}{\omega_{teorico}} * 100 \quad (3.2)$$

$$\omega_{teorico} \neq 0$$

- Una vez se calcula el error que generan los modos de vibración, dentro del código se programa un ciclo que a partir de un valor que ingrese el usuario, se determine el porcentaje de error aceptable con el cual se quiere trabajar.
- Si se grafica nuevamente el ω real contra el ω obtenido a través de los valores propios teniendo en cuenta el porcentaje de error, se obtiene la salida observada en la Figura 3.4.

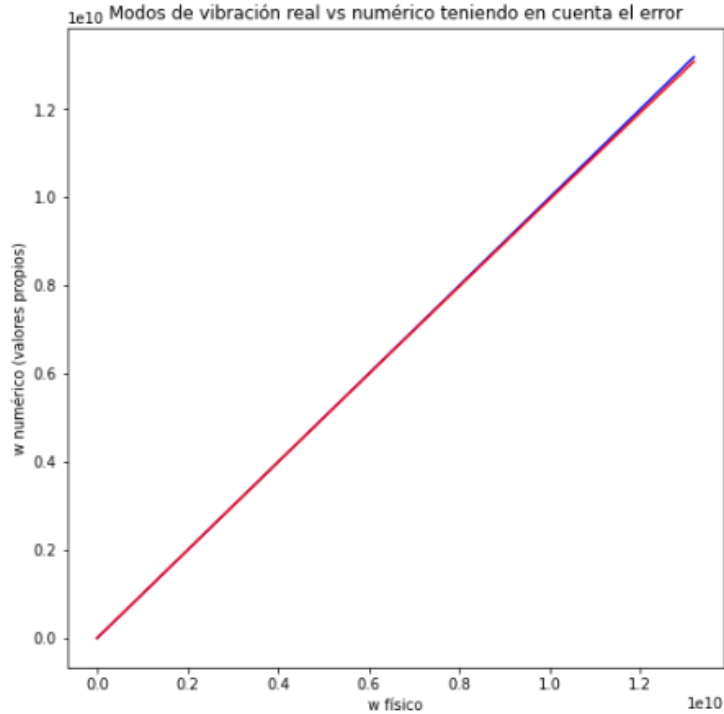


Figura 3.4: Modos de vibración (ω) real vs numérico considerando el error

Observando la Figura 3.4, se tiene un rango de frecuencias donde no presenta más de 1% de error entre el valor exacto y el obtenido a partir de los valores propios de la matriz.

En el cuadro 3.1 se presentan algunas frecuencias donde se hace distinción del valor teórico del valor real obtenido, además, se presenta el error que para este caso se manejó hasta de 1%.

Modos de vibración	ω esperado (Hz)	ω obtenido (Hz)	% error
1	$299.79\pi * 10^6$	$299.78\pi * 10^6$	0.0039
2	$599.58\pi * 10^6$	$599.49\pi * 10^6$	0.016
3	$899.38\pi * 10^6$	$899.06\pi * 10^6$	0.036
12	$3.59\pi * 10^9$	$3.57\pi * 10^9$	0.57
13	$3.89\pi * 10^9$	$3.87\pi * 10^9$	0.67
14	$4.19\pi * 10^9$	$4.16\pi * 10^9$	0.77

Cuadro 3.1: Frecuencias esperadas y obtenidas

Como los valores propios están asociados a ω , se hace un ciclo que recorra el tamaño del vector de valores propios y a cada valor lo divide por 2π para así realmente obtener un vector solo con frecuencias, el cual presenta un rango aproximado comprendido entre 0.15 GHz y 2.08 GHz para un

error de 1 %.

3.2.4. Separación campos eléctricos y magnéticos.

A partir de $AV = \Lambda V$, se tiene que los vectores propios obtenidos representados por V son los campos electromagnéticos. Se deben separar los campos eléctricos de los magnéticos para analizarlos independientemente. Las filas pares contienen los campos eléctricos, mientras que las filas impares cuentan con los campos magnéticos.

3.3. Resultados

Las Figuras 3.5 y 3.6 representan los valores propios obtenidos de la matriz antes y después de encontrar el error respectivamente. Los valores propios mostrados en 3.5 ya habían pasado por un proceso al ser ordenados de menor a mayor y acotados a solo valores positivos.

```
array([2.66771275e-06, 9.41788557e+08, 1.88335376e+09, 2.82447233e+09,
       3.76492105e+09, 4.70447692e+09, 5.64291709e+09, 6.58001902e+09,
       7.51556047e+09, 8.44931958e+09, 9.38107490e+09, 1.03106054e+10,
       1.12376908e+10, 1.21621111e+10, 1.30836471e+10, 1.40020802e+10,
       1.49171927e+10, 1.58287675e+10, 1.67365885e+10, 1.76404403e+10,
       1.85401086e+10, 1.94353800e+10, 2.03260423e+10, 2.12118842e+10,
       2.20926955e+10, 2.29682675e+10, 2.38383925e+10, 2.47028641e+10,
       2.55614773e+10, 2.64140285e+10, 2.72603154e+10, 2.81001375e+10,
       2.89332956e+10, 2.97595920e+10, 3.05788307e+10, 3.13908176e+10,
       3.21953600e+10, 3.29922671e+10, 3.37813500e+10, 3.45624215e+10,
       3.53352964e+10, 3.60997913e+10, 3.68557251e+10, 3.76029183e+10,
       3.83411939e+10, 3.90703766e+10, 3.97902937e+10, 4.05007744e+10,
       4.12016501e+10, 4.18927547e+10, 4.25739242e+10, 4.32449971e+10,
       4.39058143e+10, 4.45562191e+10, 4.51960572e+10, 4.58251768e+10,
       4.64434288e+10, 4.70506665e+10, 4.76467460e+10, 4.82315259e+10,
       4.88048674e+10, 4.93666347e+10, 4.99166944e+10, 5.04549162e+10,
       5.09811724e+10, 5.14953383e+10, 5.19972917e+10, 5.24869138e+10,
       5.29640884e+10, 5.34287024e+10, 5.38806455e+10, 5.43198106e+10,
       5.47460935e+10, 5.51593931e+10, 5.55596115e+10, 5.59466537e+10,
       5.63204279e+10, 5.66808454e+10, 5.70278209e+10, 5.73612720e+10,
       5.76811196e+10, 5.79872879e+10, 5.82797042e+10, 5.85582993e+10,
       5.88230070e+10, 5.90737647e+10, 5.93105127e+10, 5.95331950e+10,
       5.97417587e+10, 5.99361544e+10, 6.01163360e+10, 6.02822608e+10,
       6.04338894e+10, 6.05711858e+10, 6.06941175e+10, 6.08026554e+10,
       6.08967736e+10, 6.09764500e+10, 6.10416655e+10, 6.10924047e+10,
       6.11286556e+10, 6.11504095e+10])
```

Figura 3.5: Valores propios antes de encontrar el error

Los valores propios mostrados en 3.6 son el resultado de haber designado un porcentaje de error para restringir la cantidad de frecuencias permitidas en la cavidad. Hay que recordar que los valores propios están representando ω , por lo tanto, solo hay que dividir entre 2π para obtener el rango de

frecuencias permitidas para una cavidad resonante de tamaño $L = 1m$ las cuales están representadas en el Cuadro 3.2.

```
array([2.66771275e-06, 9.41788557e+08, 1.88335376e+09, 2.82447233e+09,
       3.76492105e+09, 4.70447692e+09, 5.64291709e+09, 6.58001902e+09,
       7.51556047e+09, 8.44931958e+09, 9.38107490e+09, 1.03106054e+10,
       1.12376908e+10, 1.21621111e+10, 1.30836471e+10])
```

Figura 3.6: Valores propios después de encontrar el error

Frecuencias (Hz)	1	149.89*10 ⁶
	2	299.74*10 ⁶
	3	449.53*10 ⁶
	4	599.20*10 ⁶
	5	748.74*10 ⁶
	6	898.09*10 ⁶
	7	1.05*10 ⁹
	8	1.19*10 ⁹
	9	1.34*10 ⁹
	10	1.49*10 ⁹
	11	1.64*10 ⁹
	12	1.79*10 ⁹
	13	1.93*10 ⁹
	14	2.08*10 ⁹

Cuadro 3.2: Frecuencias permitidas para una cavidad resonante de tamaño $L = 1m$

Como se sabe, $\lambda = \frac{2}{n}m$ para este caso donde la cavidad es $L = 1m$. Adicionalmente, se tiene que $\lambda = \frac{c}{f}$, donde $f = \frac{\omega}{2\pi}$, siendo ω los valores propios obtenidos y c representa la velocidad de propagación de la onda en el medio, en este caso, en el vacío. Se calculan los valores de λ esperados y los obtenidos para los valores propios esperados y obtenidos y se plasman en el Cuadro 3.3

λ obtenido (m)	λ esperado (m)
2.00007906	2
1.00015812	1
0.66690388	0.66666667
0.50031635	0.5
0.40039554	0.4
0.33380812	0.33333333
0.28626841	0.28571429
0.25063355	0.25
0.2229353	0.22222222
0.20079272	0.2
0.18269068	0.18181818
0.1676191	0.16666667
0.15487867	0.15384615
0.14396992	0.14285714

Cuadro 3.3: Valores de longitud de onda esperados y obtenidos

Adicionalmente, se grafican los campos eléctricos y magnéticos para las diferentes frecuencias permitidas. Tomando como referencia la información brindada en la Figura 1.2, se espera notar esa misma salida al visualizar el primer modo de vibración de los campos, buscando que este tenga una longitud de $\frac{\lambda}{2}$. Además, del Cuadro 3.3 se espera que para el primer y segundo modo de vibración se tengan las longitudes de onda $\lambda = 2m$ y $\lambda = 1m$ respectivamente.

Las gráficas presentadas en 3.7 y 3.8 muestran los primeros dos modos de vibración en la cavidad, donde se confirma el comportamiento de la onda esperado.

Este caso presentado en la sección 3.1, produce un rango de frecuencias para un error determinado escogido, estas se exportan para ser usadas como referencia en el caso de estructura vacío con pared dieléctrica. Para un error del 1% se produce un rango de frecuencias entre 149 MHz y 2.08 GHz.

El código que se desarrolló para evaluar la cavidad vacío se encuentra en el repositorio: <https://github.com/dianamq/Campos-EM-en-interaccion-con-tejidos-biologicos-usando-FDFD>.

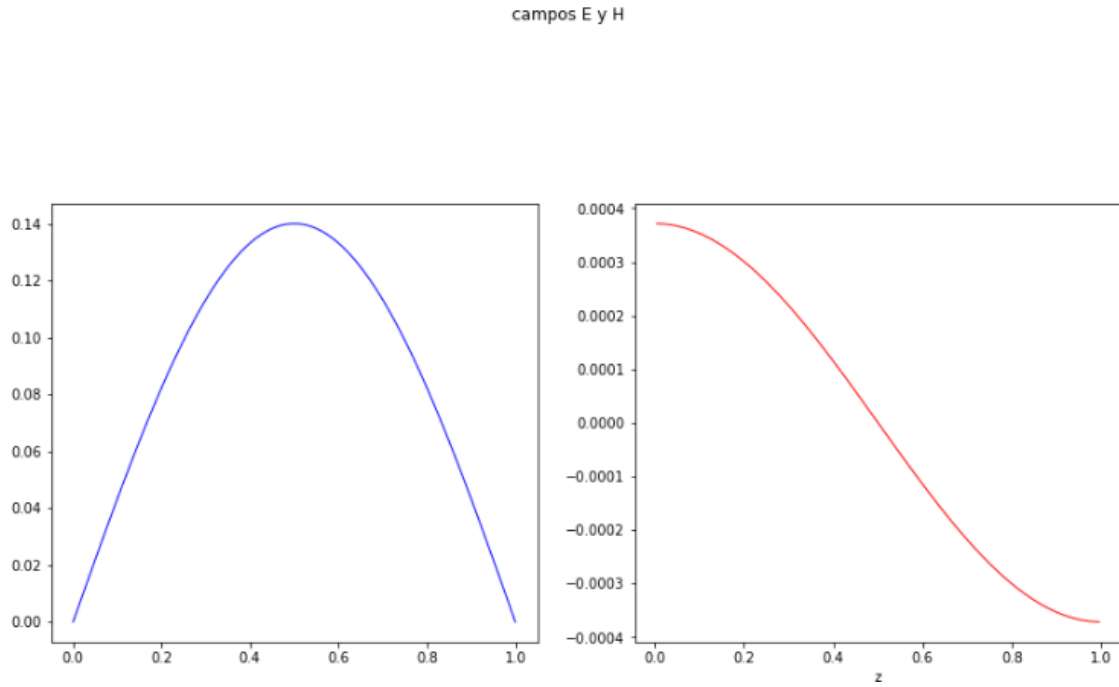


Figura 3.7: Campos Eléctrico y Magnético para el primer modo de vibración

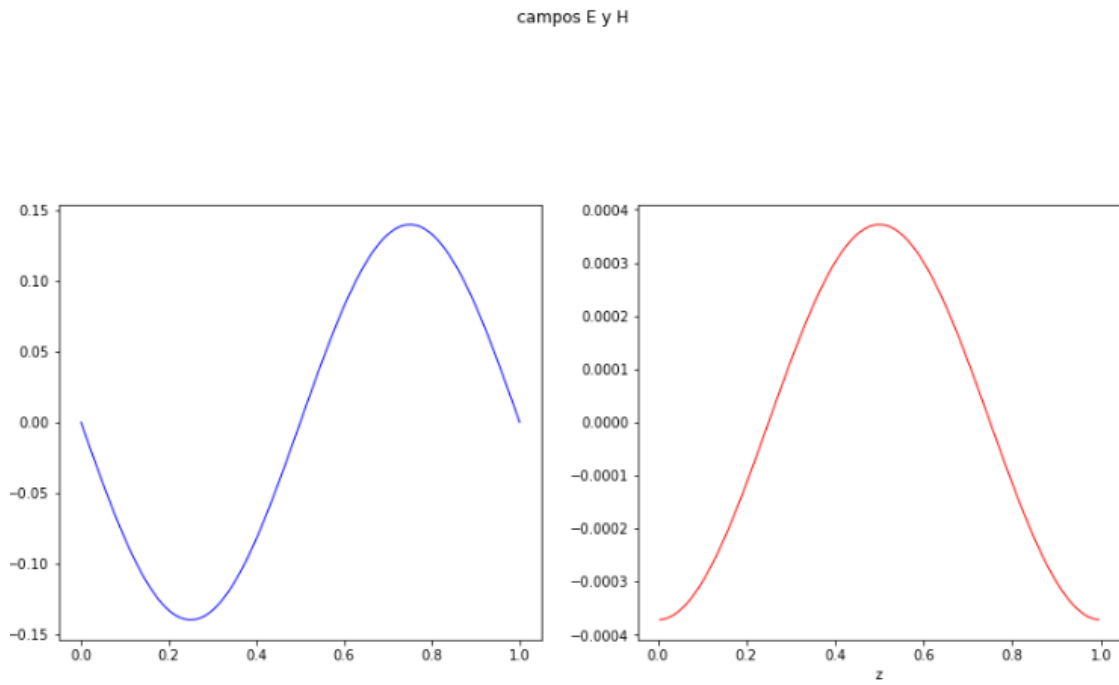


Figura 3.8: Campos Eléctrico y Magnético para el segundo modo de vibración

Estructura vacío con pared dieléctrica

En la sección de diseño, se presenta la concepción geométrica de una estructura que cuenta con secciones de vacío y una pared dieléctrica, los parámetros que caracterizan al vacío y al dieléctrico, además de una condición de frontera ABC.

En la sección de implementación, es posible determinar cualquier tamaño del dieléctrico y escoger a partir desde que posición ubicarlo. Se adopta la misma estructura de la matriz vista en el Capítulo 3. Se evalúan distintos casos para hallar el valor del campo eléctrico en la interfaz. Se obtienen valores y vectores propios, los cuales se restringen considerando el rango de frecuencias obtenidos en el Capítulo 3. Finalmente en la sección de resultados, se presentan los coeficientes de reflexión para saber qué tanto se refleja la onda cuando cambia de medio, también se grafican los campos electromagnéticos por separado para verificar los diferentes métodos de cálculo del campo en la interfaz entre diferentes medios, al igual que su longitud de onda y la relación de impedancia entre campos. Adicionalmente, se evalúa un caso cuyas propiedades de la pared dieléctrica hacen que esta sea transparente y la propagación de la onda no modifique su amplitud.

4.1. Diseño

Este caso presenta una estructura unidimensional que permite revisar la interacción de los campos electromagnéticos en el vacío, cuyas propiedades ya son conocidas gracias a la sección 3.1 y un dieléctrico cualquiera, introducido para perturbar la estructura.

Este caso cuya estructura cuenta con tres secciones, dos de vacío con una de dieléctrico ubicado entre estas, permite observar el cambio de longitud de onda entre cada una de las secciones. Además, se evalúa cómo calcular los campos eléctricos que se encuentran en cada interfaz entre materiales, por medio de diferentes métodos que permitan observar la transición en la propagación de la onda.

En la Figura 4.1 se logra evidenciar una sección con la pared dieléctrica en medio de dos secciones de vacío en la estructura. No necesariamente son simétricas entre sí, el dieléctrico puede ubicarse a cualquier distancia y tamaño, ya que estos son parámetros que se consultan por pantalla. Los campos eléctricos a ambos extremos de la estructura se calculan con base en la condición de frontera abierta o absorbente (ABC).

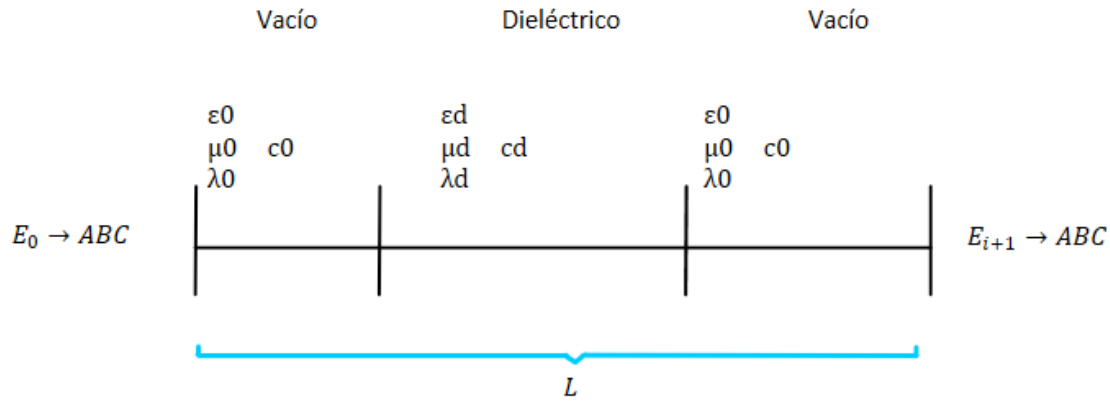


Figura 4.1: Concepción de estructura con secciones de vacío y material

4.2. Implementación

4.2.1. Construcción de la matriz

En el diagrama de flujo presentado en 4.2 se evidencia la lógica que lleva la construcción de la matriz. Toma en consideración una condición de frontera abierta, el cálculo del campo eléctrico en la interfaz entre diferentes materiales, además del cálculo de campos magnéticos en las componentes impares de la matriz y campos eléctricos en las componentes pares, a lo largo de la estructura.

4.2.2. Condición de frontera

Se busca aplicar una condición de frontera abierta que ayude a minimizar las reflexiones que se puedan generar al transmitirse las ondas electromagnéticas. La idea es encontrar los campos eléctricos pertenecientes a los límites de la cavidad y estos son hallados a través del conocimiento que se tiene de una onda. Para hallar el valor de los campos eléctricos en los extremos de la estructura de acuerdo con la condición de frontera, se pueden seguir dos casos, el primero se halla en función del campo eléctrico adyacente y de la frecuencia, mientras que el otro se calcula a partir del campo eléctrico y el magnético adyacente:

4.2.2.1. Hallar campos eléctricos en la frontera a partir de la frecuencia y del campo eléctrico adyacente.

Se formula una condición de frontera que permita que la onda se propague dentro de un límite específico sin ninguna reflexión. De la explicación de condición de frontera abierta en 1.1.2.2, se tienen las ecuaciones 1.22 y 1.25 que representan la condición de frontera derecha e izquierda respectivamente. De esas formulaciones se determina que para hallar el campo eléctrico en la frontera basta con multiplicar bien sea por el campo eléctrico siguiente o el anterior según sea el caso por

una variable en común descrita en la ecuación 4.1.

$$var = \frac{\left(\frac{1}{dz} - j\frac{\omega}{2c}\right)}{\left(\frac{1}{dz} + j\frac{\omega}{2c}\right)} \quad (4.1)$$

4.2.2.2. Hallar campos eléctricos en la frontera con ayuda de campos magnéticos adyacentes

De la ecuación de Maxwell de la ley de Faraday-Lenz en frecuencia vista en 1.4, se tiene que:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y \quad (4.2)$$

Del método de diferencias finitas, se tiene que al calcular la derivada de un campo en realidad se está calculando el valor en la mitad de ambos. Este planteamiento es el observado en la Figura 1.7, de ahí se evidencia que justo en el medio de campos eléctricos se tiene un campo magnético. Análogamente, en medio de campos magnéticos se tiene un campo eléctrico. Por eso, sencillamente se puede tomar la ecuación 1.19 e igualarla con la ecuación 4.2 para obtener:

$$-j\frac{\omega}{c}E_x = -j\omega\mu H_y \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{c} \left(\frac{E_{n+1} + E_n}{2} \right) = \mu H_n \quad (4.4)$$

$$E_{n+1} = -E_n + 2\mu c H_n \quad (4.5)$$

Las ecuaciones descritas anteriormente representan el valor del campo en la frontera al lado derecho de la estructura. Para encontrar el valor del campo al lado izquierdo, se ejecuta un procedimiento similar, donde solamente se tiene en cuenta la dirección en la que viaja la onda. Es por eso que para describir el campo en la frontera al lado izquierdo se tiene:

$$j\frac{\omega}{c}E = -j\omega\mu H \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{c} \left(\frac{E_1 + E_0}{2} \right) = -\mu H_0 \quad (4.7)$$

$$E_0 = -E_1 - 2\mu c H_0 \quad (4.8)$$

Con este método para calcular la condición de frontera abierta, se evita tener una dependencia de la frecuencia.

4.2.3. Interfaz

Para determinar los valores de los campos dentro de la estructura se puede hacer con el método de diferencias finitas, sin embargo, cuando se trata de hallar el campo eléctrico que se encuentra donde hay una transición entre materiales, no es tan sencillo de calcular. Por eso se exploran diferentes casos para hallar el valor del campo justo en la interfaz, teniendo en cuenta componentes de ambos materiales al lado de la interfaz para poder caracterizar ese campo eléctrico de la mejor manera.

4.2.3.1. Hallar el campo eléctrico de la interfaz haciendo uso de campos magnéticos adyacentes

En la Figura 4.3 se modela la situación, donde se tiene un campo eléctrico E_n en la interfaz entre diferentes materiales que necesita ser calculado. Del lado izquierdo, se tienen los campos y las propiedades asociadas al vacío, mientras que del lado derecho, se tienen los campos y las propiedades asociadas a un material cualquiera.

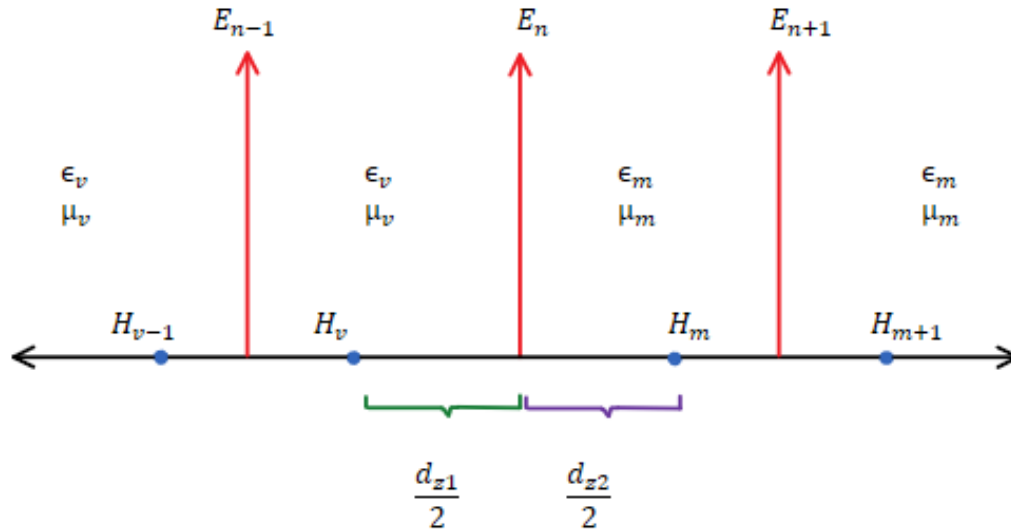


Figura 4.3: Concepción de campos adyacentes a la interfaz entre materiales

De la Figura 4.3, se tiene que los campos magnéticos H_v y H_m se encuentran a distancias distintas del campo eléctrico E_n en la interfaz. Se llega a la conclusión de que no es posible calcular el campo eléctrico de la interfaz usando simplemente diferencias finitas, porque este campo no representa la mitad exacta entre los campos magnéticos adyacentes (H_v y H_m). Debido a que son materiales diferentes, su longitud de onda difiere, así como también varían las divisiones espaciales. Bajo esa condición, se plantea el uso de campos auxiliares.

Las Figuras 4.4 y 4.5 representan de una manera geométrica, el cálculo de los campos auxiliares a través de el uso de triángulos semejantes.

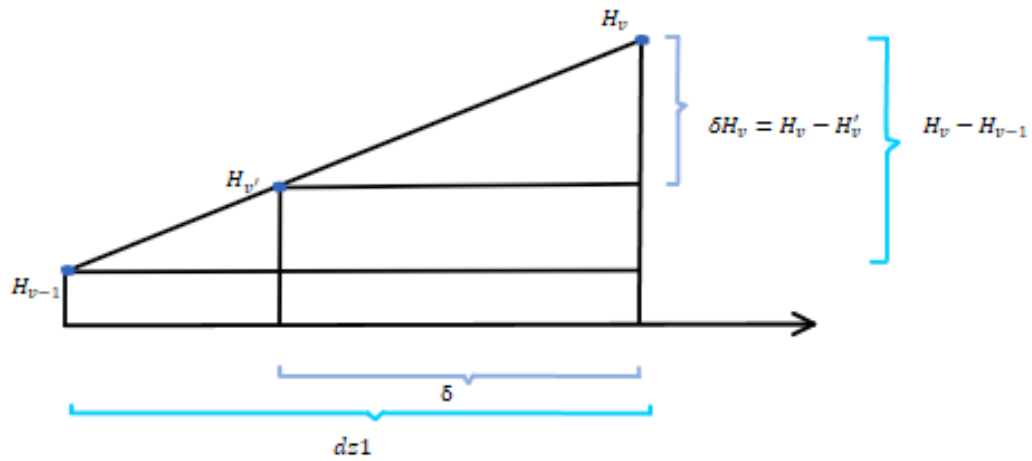


Figura 4.4: Concepción geométrica para cálculo de campos auxiliares

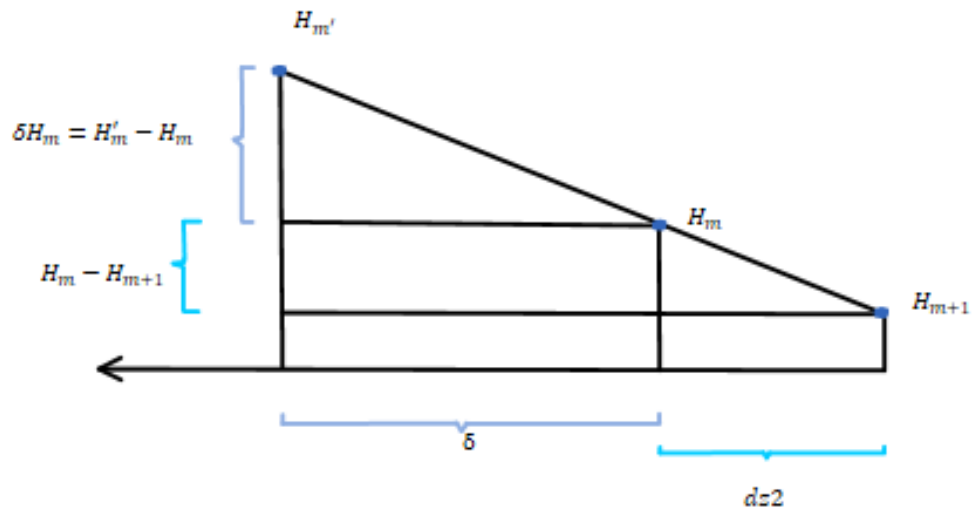


Figura 4.5: Concepción geométrica para cálculo de campos auxiliares

$$\begin{aligned}
H'_v &= H_v - (H_v - H_{v-1}) \frac{|dz2 - dz1|}{2dz1} \\
H'_v &= \frac{[2dz1 - |dz2 - dz1|] H_v + |dz2 - dz1| H_{v-1}}{2dz1} \tag{4.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H'_m &= H_m + \frac{|dz2 - dz1|}{2dz2} (H_m - H_{m+1}) \\
H'_m &= \frac{(2dz2 + |dz2 - dz1|) H_m - |dz2 - dz1| H_{m+1}}{2dz2} \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Para poder realizar los cálculos que permiten hallar el campo eléctrico de la interfaz, se recurre a hacer uso de funciones auxiliares, en este caso, campos magnéticos auxiliares (H'_v y H'_m) con el objetivo de apoyarse de estos en el cálculo del correspondiente campo ubicado en la interfaz.

Estos campos auxiliares, representan la extensión a igual distancia de lo que sería el campo en el otro material. Para entender mejor lo que se está planteando, puede apoyarse visualmente con la Figura 4.8, donde se puede ubicar el campo H'_v a la izquierda del campo eléctrico de la interfaz, siendo este ubicado a una distancia $dz2$ característica del medio donde se encuentra el material al lado derecho del campo en la interfaz. A pesar de que H'_v tiene en cuenta las divisiones del espacio del material de la derecha, se calcula con las propiedades dieléctricas del material de la izquierda. De manera análoga sucede con H'_m .

Para calcular el campo eléctrico de la interfaz tomando en cuenta los campos auxiliares ya mencionados, se puede recurrir a tres casos. El primero se encuentra representado por la Figura 4.6.

Caso 1

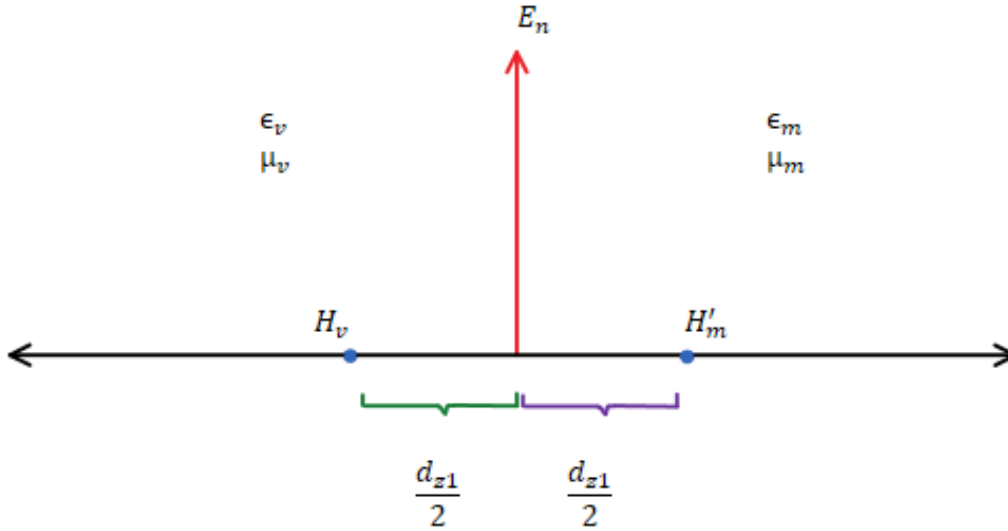


Figura 4.6: Concepción del campo magnético auxiliar en el material

Se procede a hallar el campo E_n el cual se encuentra en la interfaz, usando diferencias finitas con ayuda de campos auxiliares. Como se evidencia en la Figura 4.6, el campo H'_m se halla como una extensión del campo al lado izquierdo, cuenta con las mismas divisiones en el espacio (dz_1) de este, pero se caracteriza con las propiedades del material al lado derecho.

En la ecuación 4.11 se tiene el cálculo del campo eléctrico de la interfaz por medio de diferencias finitas usando el campo auxiliar H'_m . Luego, la ecuación 4.12 indica un reemplazo de la ecuación 4.10 en la ecuación 4.11. Finalmente, en la ecuación 4.13 se tiene la expresión para calcular el campo eléctrico de la interfaz para el caso 1.

$$\frac{H_v - H'_m}{dz_1} \quad (4.11)$$

$$\frac{H_v - \frac{2dz_2H_m + |dz_2 - dz_1|(H_m - H_{m+1})}{2dz_2}}{dz_1} \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{dz_1}H_v - \left[\frac{1}{dz_1} + \frac{|dz_2 - dz_1|}{2d_2dz_1} \right] H_m + \frac{|dz_2 - dz_1|}{2d_2dz_1} H_{m+1} \quad (4.13)$$

Caso 2

El segundo caso se encuentra representado por la Figura 4.7. Este indica el cálculo del campo de la interfaz haciendo uso del campo auxiliar H'_v , el cual se halla con el dz correspondiente al material del lado derecho, pero las propiedades dieléctricas le corresponden al material del lado izquierdo.

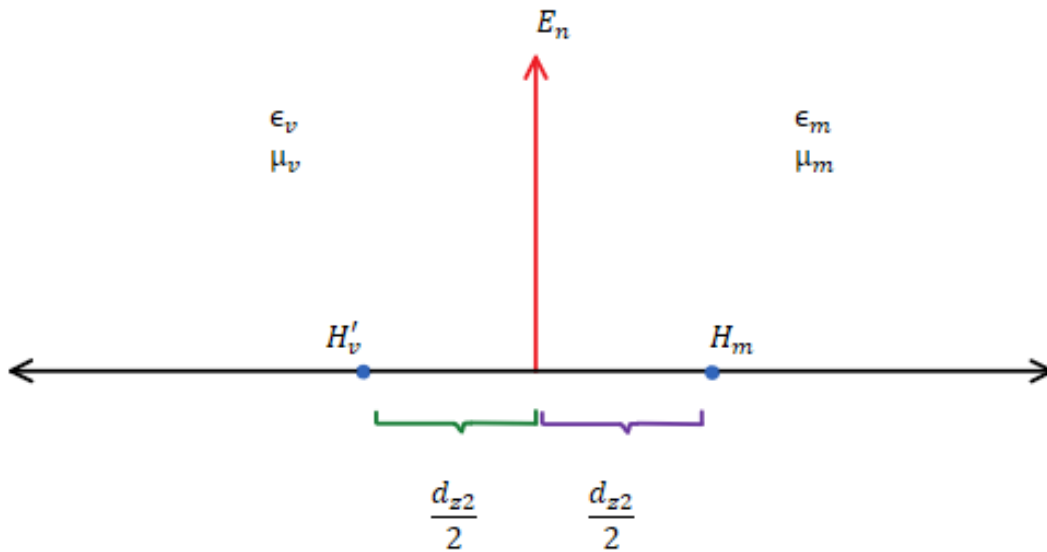


Figura 4.7: Concepción del campo magnético auxiliar en el vacío

En la ecuación 4.14 se tiene el cálculo del campo eléctrico de la interfaz por medio de diferencias finitas usando el campo auxiliar H'_v . Luego, la ecuación 4.15 indica un reemplazo de la ecuación 4.9 en la ecuación 4.14. Finalmente, en la ecuación 4.16 se tiene la expresión para calcular el campo eléctrico de la interfaz para el caso 2.

$$\frac{H'_v - H_m}{dz2} \quad (4.14)$$

$$\frac{[2dz1 - |dz2 - dz1|]H_v + |dz2 - dz1|H_{v-1} - H_m}{2dz1 dz2} \quad (4.15)$$

$$\frac{|dz2 - dz1|}{2dz1 dz2} H_{v-1} + \frac{(2dz1 - |dz2 - dz1|)}{2dz1 dz2} H_v - \frac{1}{dz2} H_m \quad (4.16)$$

Caso Promedio

Por último, se tiene el cálculo del campo en la interfaz a través del promedio. Este caso, se ve representado por la Figura 4.8, donde se logra apreciar el uso de cuatro campos, dos de ellos (H_v y H_m) encontrados con el método de diferencias finitas tradicional y otros dos (H'_v y H'_m) campos auxiliares.

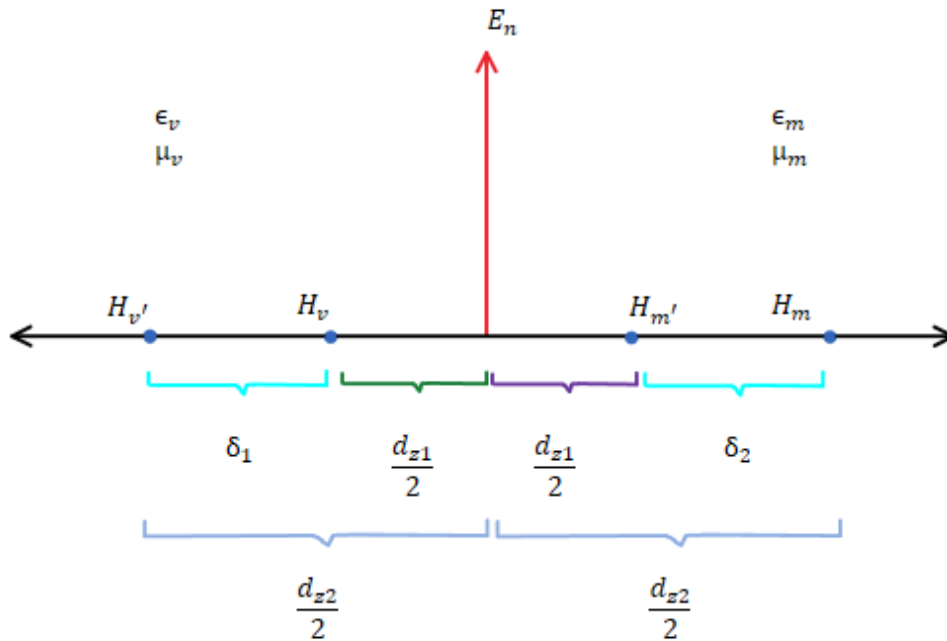


Figura 4.8: Concepción campos magnéticos existentes y auxiliares para calcular el comportamiento del campo eléctrico en la frontera entre materiales

En la ecuación 4.17 se tiene el cálculo del campo eléctrico de la interfaz por medio del promedio del cálculo de ambos casos a través de diferencias finitas usando los campos auxiliares H'_v y H'_m .

$$\frac{1}{2} \left[\frac{H_v - H'_m}{dz1} - \frac{H'_v - H_m}{dz2} \right] \quad (4.17)$$

Hallar el campo eléctrico de la interfaz haciendo uso de campos eléctricos adyacentes

Como se observa en la Figura 4.9, la idea es determinar el campo eléctrico de la interfaz a través del promedio de los campos E^- y E^+ , los cuales se determinan por medio de una extrapolación numérica a partir de los campos eléctricos adyacentes al campo de la interfaz.

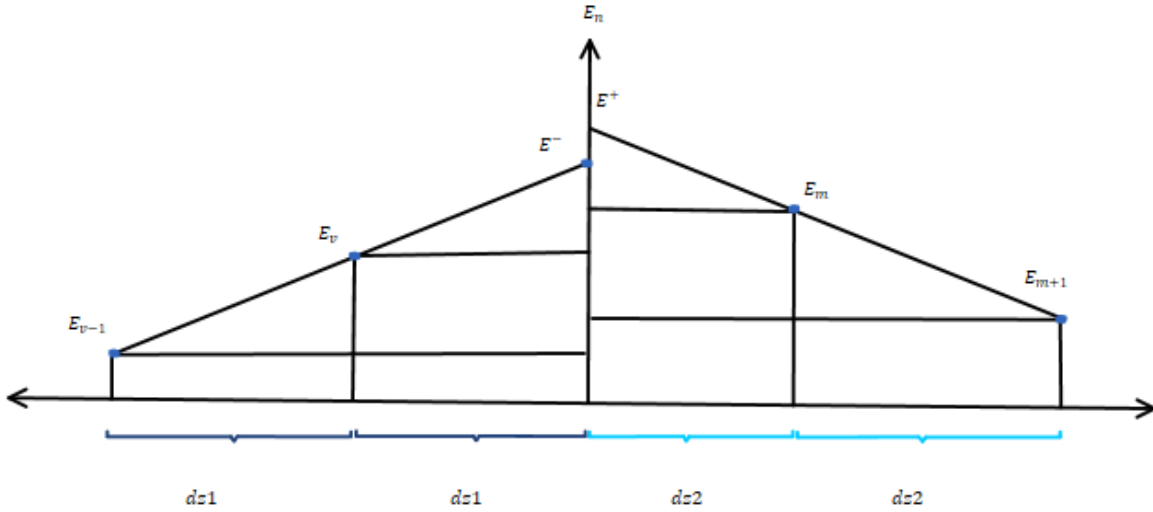


Figura 4.9: Concepción geométrica para cálculo del campo en la interfaz

Las ecuaciones 4.18 y 4.19 se determinan a partir de la semejanza de triángulos que se puede elaborar a partir de los campos como se ilustra en la Figura 4.9.

$$E^- = \frac{E_v - E_{v-1}}{dz1} dz1 + E_v = 2E_v - E_{v-1} \quad (4.18)$$

$$E^+ = \frac{E_{m+1} - E_m}{dz2} (-dz2) + E_m = 2E_m - E_{m+1} \quad (4.19)$$

$$E_n \approx \frac{1}{2} (E^+ + E^-) \quad (4.20)$$

Reemplazando las ecuaciones 4.18 y 4.19 en 4.20 se obtiene la ecuación 4.21 que determina finalmente, otro método por el cual se puede calcular el campo eléctrico en la interfaz entre materiales.

$$E = E_m + E_v - \frac{1}{2} E_{m+1} - \frac{1}{2} E_{v-1} \quad (4.21)$$

4.2.4. Valores y vectores propios

Se hace un procedimiento igual al realizado en el caso de solo vacío en la sección 3.1. El procedimiento para determinar los valores propios adecuados es el siguiente:

- Después de encontrados los valores y vectores propios, se procede a asignarle un índice a los valores propios.
- Se organiza de menor a mayor los valores propios y con el índice que ya se les había asignado previamente, es posible organizar los vectores propios asociados en el mismo orden.
- De la sección 3.1 se obtuvieron los valores propios a los cuales se les determinó un error, generando un rango de frecuencias aceptables con los cuales trabajar.
- Teniendo en cuenta ese rango de frecuencias, se escogen los valores propios con los cuales se trabajará en este caso, de igual manera, se obtienen los vectores propios.
- Como los vectores propios tienen en consideración tanto campos eléctricos en sus filas pares y campos magnéticos en sus filas impares, se hace la respectiva separación.

4.2.5. Reflexión y transmisión

En la sección 1.1.3.1 se presentan las ecuaciones necesarias para evaluar el coeficiente de reflexión y el de transmisión. En la sección de resultados de este Capítulo se encuentran los valores obtenidos para estos parámetros.

4.3. Resultados

4.3.1. Valores propios

La Figura 4.10 representa los valores propios obtenidos de la matriz antes de restringir el rango de frecuencias aceptadas, estos valores propios ya pasaron por el proceso de ser ordenados de menor a mayor y acotados a solo valores positivos.

```
array([2.61436092e-31, 3.66507036e+08, 1.16233955e+09, 1.96434290e+09,
       2.69161318e+09, 3.37392060e+09, 4.14092712e+09, 5.00414296e+09,
       5.81492025e+09, 6.50219648e+09, 7.19320680e+09, 7.97203650e+09,
       8.78913458e+09, 9.52938698e+09, 1.02789484e+10, 1.10721722e+10,
       1.18141378e+10, 1.24998990e+10, 1.32093755e+10, 1.40345162e+10,
       1.48618569e+10, 1.55646423e+10, 1.62091979e+10, 1.69341506e+10,
       1.77370190e+10, 1.84910730e+10, 1.91876749e+10, 1.99393214e+10,
       2.06707955e+10, 2.13548738e+10, 2.20111253e+10, 2.27615279e+10,
       2.35702872e+10, 2.42892802e+10, 2.48946158e+10, 2.55392595e+10,
       2.62875365e+10, 2.70417461e+10, 2.77006363e+10, 2.83794948e+10,
       2.90763032e+10, 2.97375414e+10, 3.03567501e+10, 3.10055665e+10,
       3.17538668e+10, 3.24732611e+10, 3.30616841e+10, 3.36137886e+10,
       3.42652091e+10, 3.49819806e+10, 3.56277444e+10, 3.62172244e+10,
       3.68535449e+10, 3.74674358e+10, 3.80529255e+10, 3.86033670e+10,
       3.92407514e+10, 3.99250971e+10, 4.05180614e+10, 4.09979717e+10,
       4.15166784e+10, 4.21382089e+10, 4.27672497e+10, 4.32944346e+10,
       4.38310779e+10, 4.43892766e+10, 4.49132241e+10, 4.54023240e+10,
       4.58878241e+10, 4.64733614e+10, 4.70590439e+10, 4.75293101e+10,
       4.79226270e+10, 4.83823297e+10, 4.89245509e+10, 4.94424744e+10,
       4.98651172e+10, 5.03338737e+10, 5.08040499e+10, 5.12242525e+10,
       5.16048039e+10, 5.19984139e+10, 5.24875579e+10, 5.29738961e+10,
       5.33545139e+10, 5.36645523e+10, 5.40129308e+10, 5.44254556e+10,
       5.48410557e+10, 5.51634223e+10, 5.55180406e+10, 5.59166266e+10,
       5.62564228e+10, 5.65245282e+10, 5.67646844e+10, 5.70852425e+10,
       5.74544610e+10, 5.77974755e+10, 5.80424193e+10, 5.82812384e+10,
       5.85408834e+10, 5.87740489e+10, 5.90302554e+10, 5.92461628e+10,
       5.94244504e+10, 5.96666854e+10, 5.99145363e+10, 6.01401630e+10,
       6.03195429e+10, 6.04293385e+10, 6.05500582e+10, 6.06636659e+10,
       6.07892361e+10, 6.09170915e+10, 6.10284587e+10, 6.11175390e+10,
       6.11824000e+10, 6.12220259e+10, 6.13332116e+10, 6.21134906e+10,
       6.21760731e+10, 6.27706450e+10, 6.32869521e+10, 6.35111574e+10,
       6.36578716e+10, 6.38811730e+10, 6.45717509e+10, 6.53375210e+10,
       6.57998058e+10])
```

Figura 4.10: Valores propios antes de restringir el rango de frecuencias

La Figura 4.11 representa los valores propios obtenidos de la matriz luego de restringir el rango de frecuencias aceptadas al ser comparadas con las frecuencias generadas en el caso de la Cavidad vacío.

```
array([2.61436092e-31, 3.66507036e+08, 1.16233955e+09, 1.96434290e+09,
       2.69161318e+09, 3.37392060e+09, 4.14092712e+09, 5.00414296e+09,
       5.81492025e+09, 6.50219648e+09, 7.19320680e+09, 7.97203650e+09,
       8.78913458e+09, 9.52938698e+09, 1.02789484e+10, 1.10721722e+10,
       1.18141378e+10, 1.24998990e+10])
```

Figura 4.11: Valores propios después de restringir el rango de frecuencias

4.3.2. Reflexión y transmisión

Teniendo en cuenta una estructura unidimensional vacío-pared dieléctrica de tamaño $L=1\text{m}$ en total, la pared dieléctrica de tamaño $l_1=0.5\text{m}$ y haciendo uso de las ecuaciones vistas en 1.1.3.1

se determinan los parámetros necesarios para calcular el coeficiente de reflexión. Partiendo de la introducción de la parafina como pared dieléctrica y sabiendo que este caso incluye tres secciones dos de vacío y una de dieléctrico en el medio, se tienen los siguientes valores del Cuadro 4.1 correspondientes a los índices refractivos.

Medio	Índice refractivo	Valor
Vacío	na	1
Parafina	n1	1.43
Vacío	nb	1

Cuadro 4.1: Índices refractivos para los medios contemplados en el caso

El número de onda de propagación en el dieléctrico está dada por $k_1 = \frac{L_3}{cd}$, donde L_3 indica el rango de frecuencias obtenidas a partir de los valores propios y cd es la velocidad de propagación de la onda en el dieléctrico. Como L_3 es un vector que representa un rango de frecuencias, el Cuadro 4.2 presenta los valores del número de onda para cada frecuencia dentro del rango.

ω (Hz)	k1	Γ_1	τ	Γ_1 toolbox
$366 \cdot 10^6$	1.77	-0.216-0.166j	0.59-0.76j	-0.216 - 0.166j
$1.16 \cdot 10^9$	5.62	-0.04+0.11j	-0.93-0.34j	-0.04 +0.11j
$1.96 \cdot 10^9$	9.49	-0.34+0.01j	0.03+0.94j	-0.34 + 0.01j
$2.69 \cdot 10^9$	13.01	-0.019-0.078j	0.97-0.23j	-0.019-0.078j
$3.37 \cdot 10^9$	16.31	-0.32+0.092j	-0.26-0.91j	-0.32+0.092j
$4.14 \cdot 10^9$	20.02	-0.11-0.16j	-0.80+0.56j	-0.11-0.16j
$5.00 \cdot 10^9$	24.19	-0.078+0.14j	0.87+0.47j	-0.078+0.14j
$5.81 \cdot 10^9$	28.11	-0.34-0.027j	0.07-0.94j	-0.34-0.027j
$6.50 \cdot 10^9$	31.43	-0.00002-0.003j	-0.99+0.007j	-0. -0.003j
$7.19 \cdot 10^9$	34.77	-0.34+0.034j	0.09+0.94j	-0.34+0.034j
$7.97 \cdot 10^9$	38.54	-0.063-0.13j	0.89-0.42j	-0.063-0.13j
$8.79 \cdot 10^9$	42.48	-0.17+0.17j	-0.69-0.68j	-0.17+0.17j
$9.53 \cdot 10^9$	46.06	-0.26-0.15j	-0.46+0.84j	-0.26-0.15j
$10.3 \cdot 10^9$	49.69	-0.031+0.099j	0.95+0.30j	-0.031+0.099j
$11.1 \cdot 10^9$	53.52	-0.34+0.018j	-0.05-0.94j	-0.34+0.018j
$11.8 \cdot 10^9$	57.11	-0.029-0.096j	-0.95+0.29j	-0.029-0.096j
$12.5 \cdot 10^9$	60.42	-0.30+0.11j	0.32+0.89j	-0.30+0.11j

Cuadro 4.2: Número de onda y coeficientes de reflexión y transmisión para cada frecuencia en el rango

Reemplazando términos necesarios en las ecuaciones 1.26 y 1.27 se tiene:

$$\rho_1 = \frac{1 - 1,43}{1 + 1,43} = -0,1769 \quad (4.22)$$

$$\rho_2 = \frac{1,43 - 1}{1,43 + 1} = 0,1769 \quad (4.23)$$

Primero, se halla el coeficiente de reflexión Γ_2 , reemplazando el valor obtenido en 4.23 en la ecuación 1.31:

$$\Gamma_2 = 0,1769 \quad (4.24)$$

Luego, se halla el coeficiente de reflexión Γ_1 , reemplazando los parámetros necesarios en la ecuación 1.30. Los valores de Γ_1 en función de la frecuencia están descritos en el Cuadro 4.2.

$$\Gamma_1 = \frac{-0,1769 + 0,1769e^{-2jk_1(0,5)}}{1 - (0,1769)^2 e^{-2jk_1(0,5)}} \quad (4.25)$$

Reemplazando los valores obtenidos en 4.22 y 4.23 se tienen los siguientes coeficientes:

$$\tau_1 = 1 - 0,1769 = 0,8230 \quad (4.26)$$

$$\tau_2 = 1 + 0,1769 = 1,1769 \quad (4.27)$$

Partiendo de la ecuación 1.32 y reemplazando los valores de las ecuaciones 4.26 y 4.27 se tiene el coeficiente de transmisión dado por la ecuación 4.28.

$$\tau = \frac{0,8230 * 1,1769 * e^{-jk_1(0,5)}}{1 - 0,1769^2 * e^{-2jk_1(0,5)}} \quad (4.28)$$

Los valores de k_1 se reemplazan en la ecuación 4.28, permitiendo así un rango de valores que especifican el coeficiente de transmisión para cada una de las frecuencias, estos valores pueden observarse en el Cuadro 4.2.

Orfanidis [29] desarrolló un toolbox en MATLAB que permite calcular el coeficiente de reflexión. Requiere como parámetros de entrada: \mathbf{n} , L y λ , donde \mathbf{n} es el vector que contiene los índices refractivos vistos en el Cuadro 4.1, $\mathbf{n} = [1, 1,43, 1]$. L hace referencia a l_1 , el cual es el tamaño del dieléctrico, $l_1 = 0,5m$ para este caso.

Finalmente, λ es un vector de $\lambda = \frac{2\pi}{k_1}$ donde k_1 hace referencia al número de onda para cada frecuencia obtenida en los valores propios. Al correr la función **multidiel**($\mathbf{n}, \mathbf{L}, \lambda$) del toolbox de MATLAB que presenta Orfanidis [29], se obtienen los resultados también expuestos en el Cuadro 4.2.

Finalmente, la reflectancia de la pared dieléctrica $|\Gamma_1|^2$ tanto para lo calculado en el código del trabajo de grado como en el toolbox de Orfanidis se encuentra en el Cuadro 4.3. Con eso se obtiene

la fracción de potencia que se refleja de nuevo en el medio η_a de vacío. Para el dieléctrico, se tiene que lo que se refleja está dado por:

$$|\Gamma_2|^2 = 0,0313 \quad (4.29)$$

$ \Gamma_1 ^2$	$ \Gamma_1 ^2$ toolbox
0.074	0.074
0.014	0.014
0.12	0.12
0.006	0.006
0.11	0.11
0.039	0.039
0.027	0.027
0.12	0.12
0.000007	0.000007
0.12	0.12
0.022	0.022
0.058	0.058
0.09	0.09
0.011	0.011
0.12	0.12
0.01	0.01
0.10	0.10

Cuadro 4.3: Reflectancia

Analizando los resultados obtenidos tanto en el Cuadro 4.2 como en el Cuadro 4.3 es válido decir que los valores obtenidos para el coeficiente de reflexión y reflectancia son idénticos, lo que permite validar que las ecuaciones aplicadas en el código de este proyecto de grado son las correctas y los resultados obtenidos son válidos. Los resultados obtenidos en el Cuadro 4.3 y en la ecuación 4.29 indican que para una pared dieléctrica como la parafina, es poco lo reflejado.

4.3.3. Campos electromagnéticos

Los diferentes métodos para evaluar las condiciones de frontera dejan como opciones calcular la condición en función de la frecuencia o haciendo uso de los campos adyacentes. Para que la condición de frontera no cambie dependiendo de la frecuencia en la que se evalúa, se buscó trabajar directamente con la condición que involucraba su cálculo en función del campo eléctrico y magnético adyacente.

Para la evaluación de este caso, el dieléctrico tiene una permitividad $\epsilon_{rd} = 2,1$ y un tamaño de 0.5m introducido a partir desde 0.2m por la izquierda de la estructura. Adicionalmente, en los problemas de interfaz, se exploraron distintos casos al evaluar entre 400 y 600 MHz aproximadamente con los

diferentes casos, se tiene como resultado para el caso 1 explorado en 4.2.3.1 los campos electromagnéticos observados en la Figura 4.12. Para el caso 2 explorado en 4.2.3.1 se tiene la forma de los campos electromagnéticos de la Figura 4.13. Para el caso promedio explorado en 4.2.3.1 se tiene la Figura 4.14.

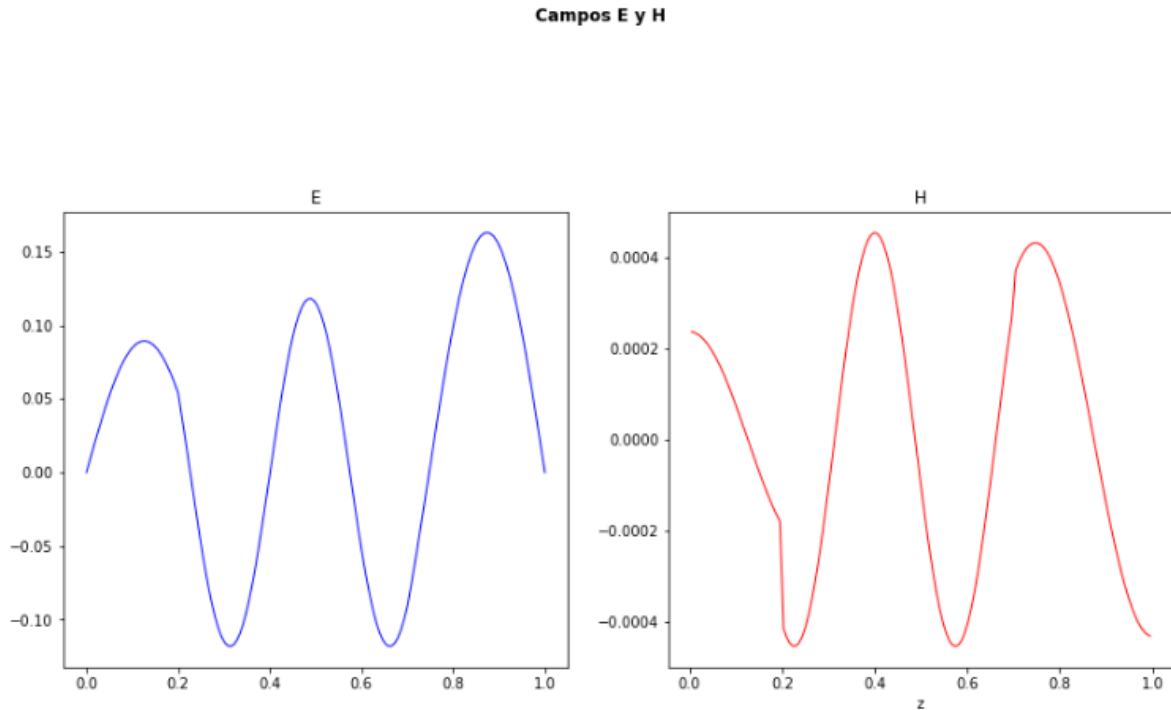


Figura 4.12: Forma de onda campos EM para el caso 1 a una frecuencia cercana a 500 MHz

Lo que tienen en común los casos 1, 2 y promedio hallados con ayuda de campos magnéticos adyacentes, es que presentan una discontinuidad entre interfaces cuando cambia el medio. Particularmente en el caso 2 también hay un comportamiento donde la interfaz hace parecer el campo en la primera sección de vacío como si fuera cero.

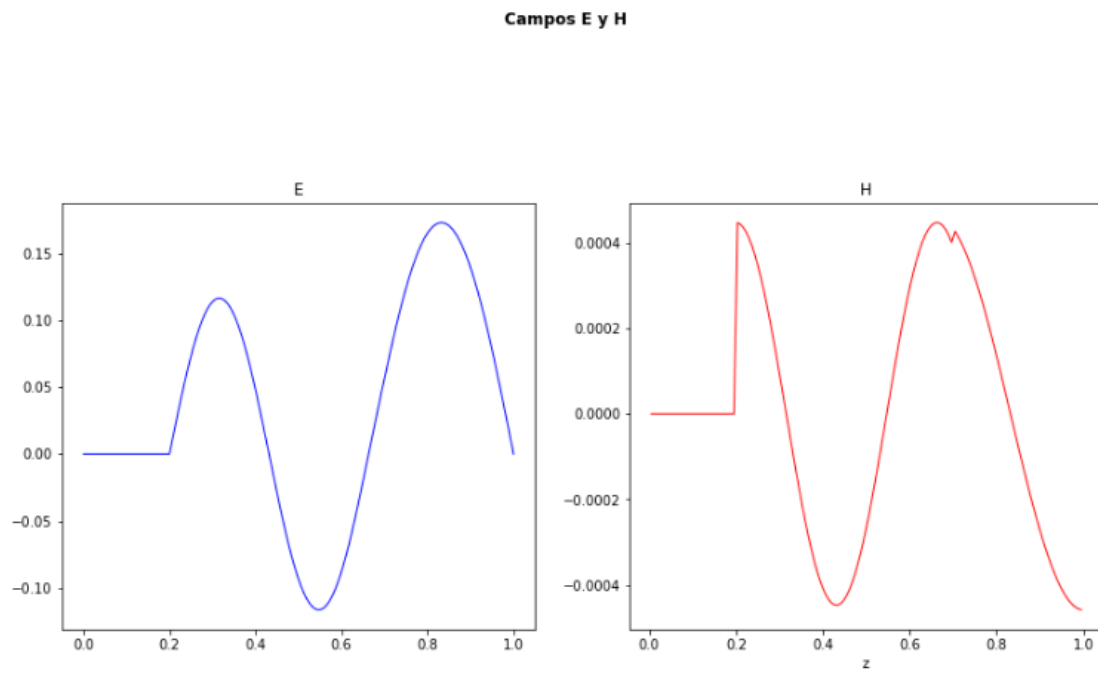


Figura 4.13: Forma de onda campos EM para el caso 2 a una frecuencia cercana a 500 MHz

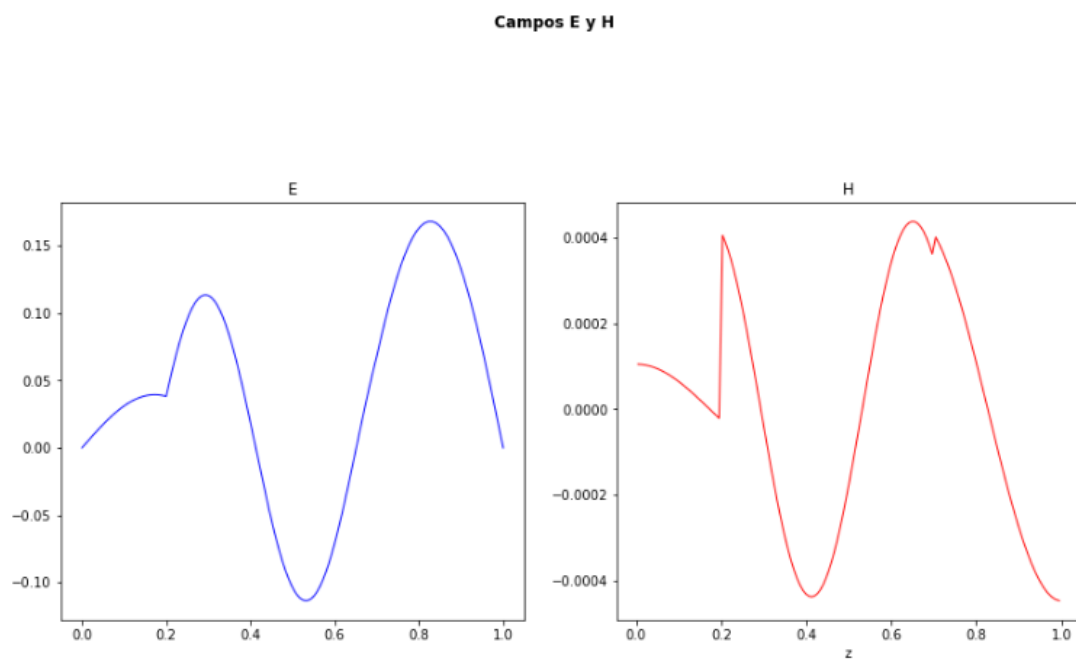


Figura 4.14: Forma de onda campos EM para el caso promedio a una frecuencia cercana a 500 MHz

Por otro lado, en la Figura 4.15 no se presenta el comportamiento abrupto observado en los otros casos, al contrario, se evidencia una continuidad al presentarse el cambio de longitud de onda en el momento que cruza la interfaz. Por lo tanto, este caso representa mayor confianza para ser el implementado para resolver el problema de interfaces para la estructura multicapa unidimensional. También se encuentra la relación en amplitud debido a la impedancia entre los campos, donde la intensidad del campo eléctrico es aproximadamente 377 ohmios más grande que la intensidad del campo magnético, $|E| \approx |H| * 377$.

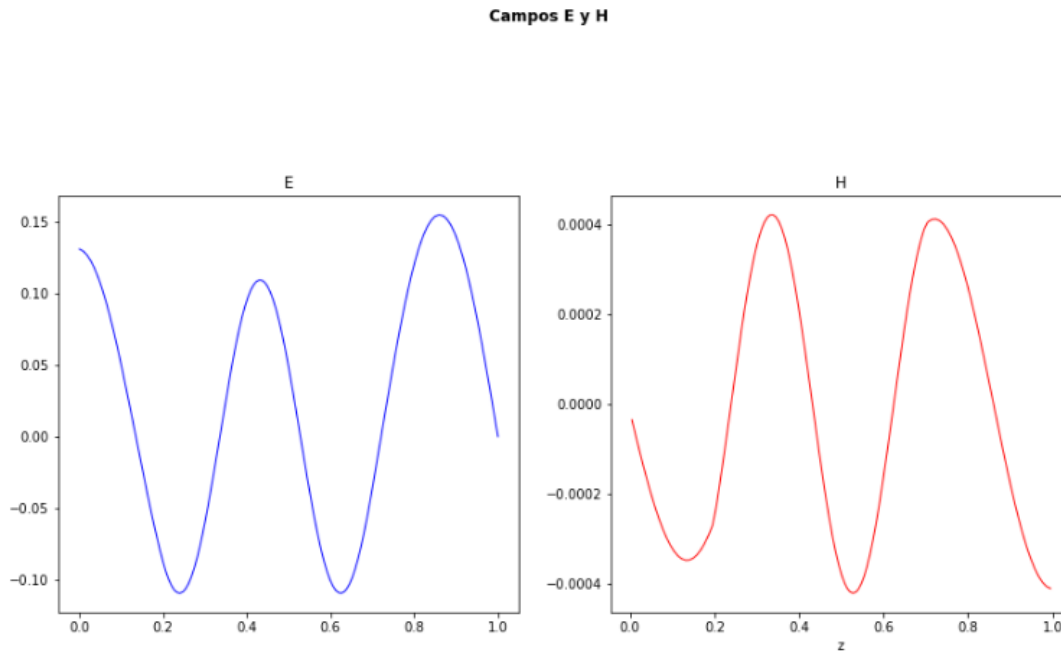


Figura 4.15: Forma de onda campos EM para el caso donde se usan los campos eléctricos a una frecuencia cercana a 500 MHz

Como prueba adicional para evaluar el funcionamiento del método, se van a modificar las propiedades dieléctricas para representar un caso pared transparente. Para esto, la permitividad y permeabilidad en el material tendrán el mismo valor y se probará con el caso que evalúa la interfaz usando los campos eléctricos adyacentes.

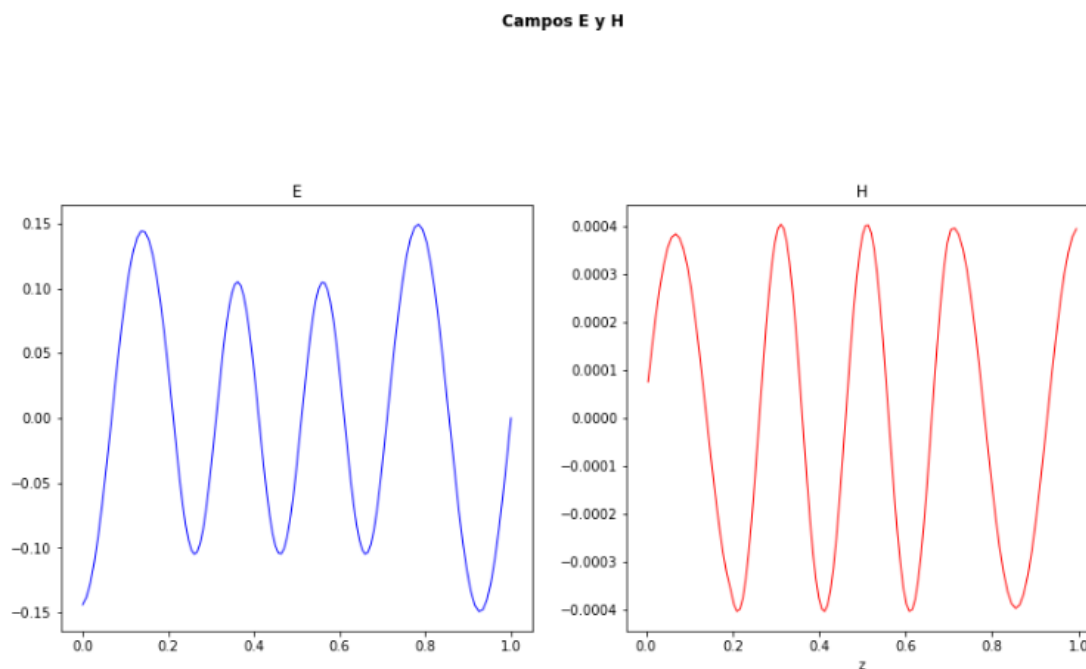


Figura 4.16: Campos EM a 1 GHz para una estructura vacío-parafina-vacío

Por un lado, la Figura 4.16 evalúa un caso de vacío-dieléctrico cuyo material es la parafina con una permitividad $\varepsilon_{rp} = 2,1$ y permeabilidad $\mu_{rp} = 1$, la forma de onda de los campos se observa para una frecuencia de 1 GHz. Por otra parte, la Figura 4.17 evalúa un caso de vacío-pared dieléctrica transparente donde se escoge una permitividad y permeabilidad iguales $\varepsilon_{rp} = \mu_{rp} = 4$, la forma de onda de los campos se observa para una frecuencia de 1 GHz.

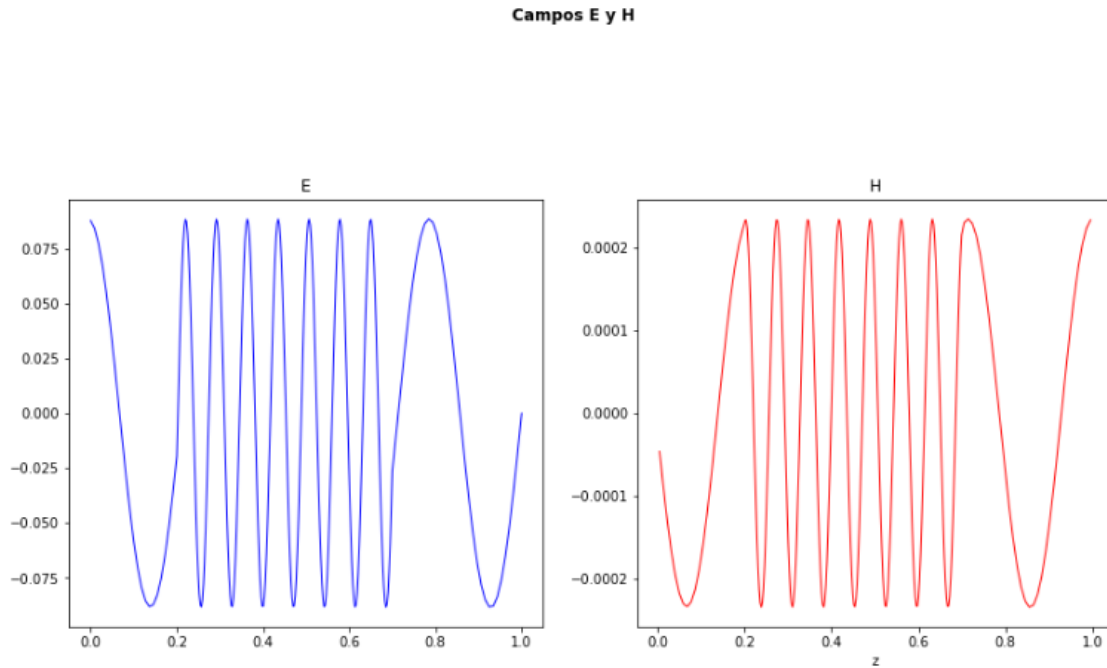


Figura 4.17: Campos EM a 1 GHz para una estructura vacío-dieléctrico transparente-vacío

La pared dieléctrica transparente permite que la impedancia característica sea igual a la del vacío y así la onda no se refleje al propagarse, manteniendo la amplitud y cambiando la longitud de onda.

El código que se desarrolló para evaluar la estructura vacío-pared dieléctrica se encuentra en el repositorio:

<https://github.com/dianamq/Campos-EM-en-interaccion-con-tejidos-biologicos-usando-FDFD> con el nombre Estructuravacío+paredDieléctricaFDFD1D.

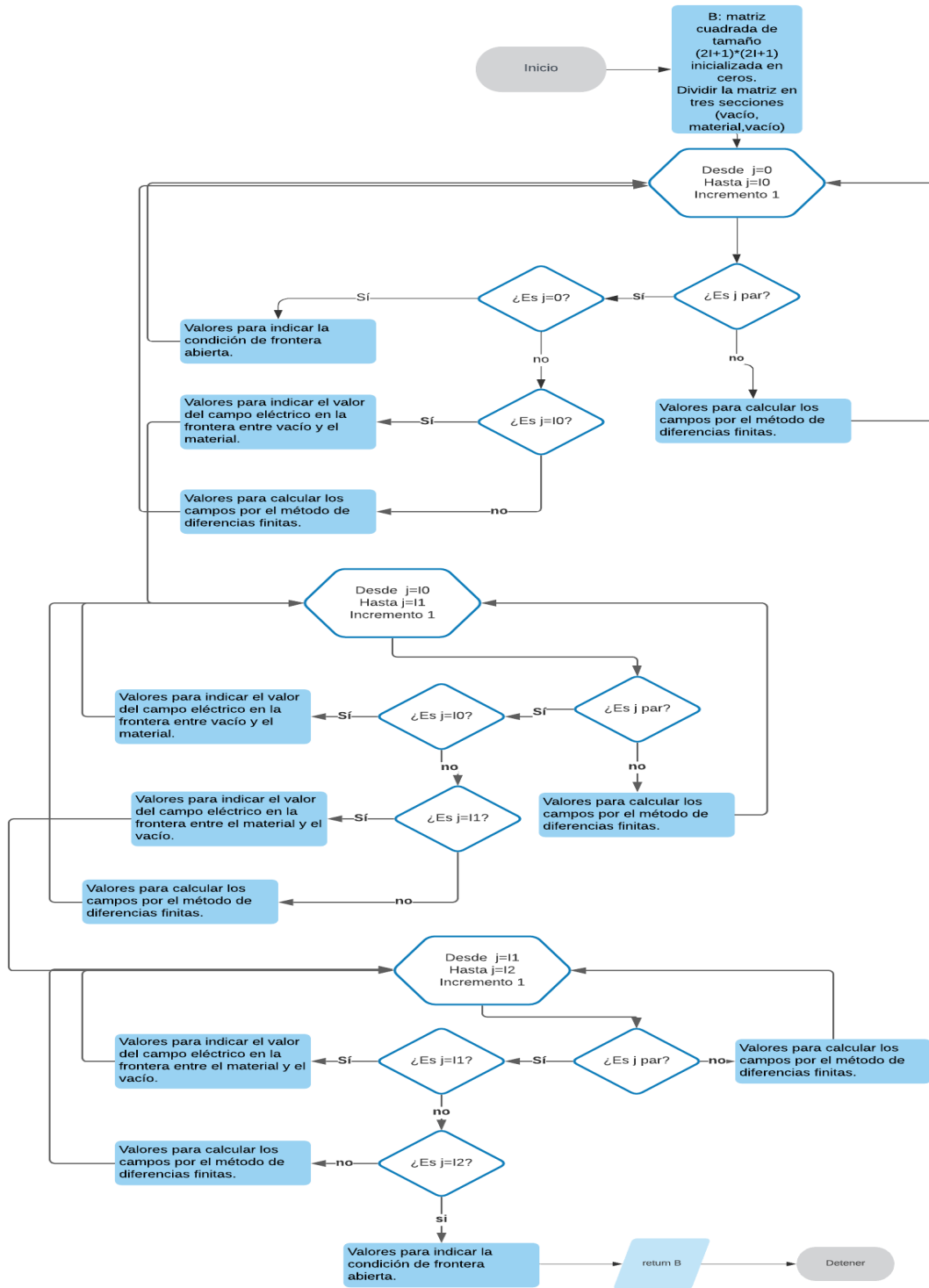


Figura 4.2: Diagrama de flujo concepción de la matriz para el caso de una cavidad con vacío y un material

Estructura multicapa unidimensional

En la sección de diseño se presenta la concepción geométrica del tejido mamario con cáncer como una estructura multicapa en una sola dimensión con tamaño $L = 22cm$ la cual contiene seis secciones, vacío, piel, tejido adiposo, tejido glandular, tumor y tejido muscular, además de una condición de frontera ABC. En la sección de implementación, se adopta la misma estructura de la matriz encontrada en el capítulo 4, donde a partir de unos intervalos de división dentro de la estructura para cada sección, es posible recorrer la matriz identificando las posiciones que comprende cada una de las secciones de las capas del tejido, también se tiene en consideración calcular el campo eléctrico en las interfaces a partir del uso del caso evaluado en el capítulo 4 donde se calcula el valor del campo en la interfaz a partir de campos eléctricos adyacentes. Adicionalmente, se calculan los valores y vectores propios usando el mismo proceso explicado en casos anteriores. Se escoge una frecuencia deseada para restringir el rango de valores propios con sus respectivos vectores propios, con la finalidad de poder observar el comportamiento de los campos electromagnéticos justo alrededor de la frecuencia escogida. Finalmente en la sección de resultados, se presentan los coeficientes de reflexión y se grafica la forma de onda para distintas frecuencias y tamaños del tumor.

5.1. Diseño

Como se observa en la Figura 2.4 de la sección 2.1, se modela una estructura con las diferentes capas que conforman al tejido mamario. Se plantea que dentro de la estructura, haya una parte con vacío y a partir de la interfaz donde termina, se incluyan las divisiones de los tejidos, tal y como se observa en la Figura 5.1, donde V, P, T.A, T.G, T y M hacen referencia al vacío, piel, tejido adiposo, tejido glandular, tumor y tejido muscular respectivamente. Además, se considera una condición de frontera abierta.

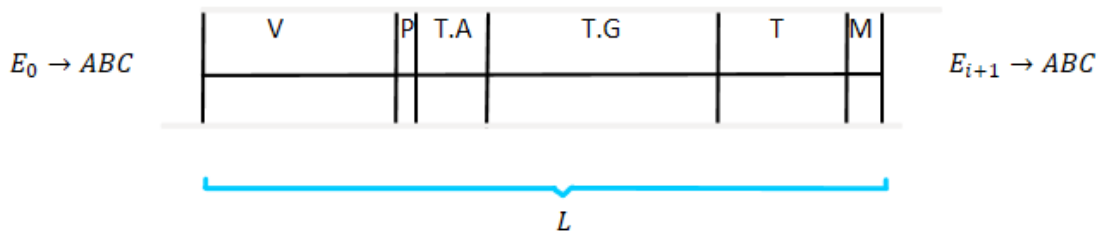


Figura 5.1: Concepción de estructura multicapa para el tejido mamario

5.2. Implementación

5.2.1. Tamaños de las capas de los tejidos

Del artículo de Lazebnik et al. [21] donde explican el desarrollo de modelos anatómicamente realistas se tiene que el tamaño de una estructura que contempla las diferentes capas del tejido mamario mide aproximadamente 12 cm. De Sarno, A. et al. en [34], se tiene que el tamaño para considerar de la piel es de 1.5 mm, para el tejido adiposo es de 1.5 cm y para el tejido glandular es de 5.9 cm. En el artículo [35], se muestra un rango de tamaños del tumor entre 2 mm y 5 cm. Por último, el tejido muscular es de 0.5 cm de acuerdo con [36]. La estructura fue pensada para un tamaño de 22 cm, por lo que el tamaño restante luego de sumar los tamaños de las capas del tejido mamario, corresponde al vacío.

5.2.2. Construcción de la matriz

Tomando de referencia los diagramas de flujo presentados en las Figuras 3.2 y 4.2, así como también la concepción de la matriz vista en la sección 2.2, se plantea el diseño de la matriz. A diferencia de la concepción de la matriz de la sección 4.1, esta debe contar con un mayor número de interfaces, manteniendo que las filas pares constituyen los campos eléctricos, mientras que los campos magnéticos se representan por medio de las filas impares.

En la subsección 4.2.2 del Capítulo 4 se evalúa la condición de frontera abierta, ahí se plantean dos casos posibles para calcular el valor de los campos en las fronteras. Por un lado, está el caso evaluado en 4.2.2.1 donde el cálculo de los campos eléctricos en la frontera depende de la frecuencia. Por otro lado, se evalúa el caso en 4.2.2.2 donde se hallan los campos eléctricos de la frontera haciendo uso de los campos eléctrico y magnético adyacentes. Teniendo en cuenta los diferentes métodos para hallar los campos en las fronteras, se tiene que para la estructura multicapa unidimensional, se hace uso de la condición de frontera abierta calculada a partir de los campos eléctrico y magnético adyacentes a la frontera, con el fin de evitar cambios en la frontera al evaluar en distintas frecuencias. Adicionalmente, después de revisados los distintos métodos para calcular el campo eléctrico en cada interfaz en el caso del capítulo 4, se usa el método que realiza el cálculo a través de campos eléctricos adyacentes.

5.2.3. Propiedades dieléctricas del tejido biológico

Tomando como fuente de referencia a Gabriel et al. [19] con su parametrización de modelos para el espectro dieléctrico de los tejidos biológicos, se recurre al uso de la ecuación 1.8 que permite imitar las propiedades dieléctricas del tejido en función de una frecuencia designada, haciendo uso de los parámetros consignados en el Cuadro 1.1.

5.2.4. Condición de frontera

Como se evidenció y analizó en la sección 4.1, se usa la condición de frontera absorbente calculada con la ayuda de los campos eléctrico y magnético adyacentes. Debido a que es una solución que no depende del valor de la frecuencia y para el extremo derecho e izquierdo de la estructura viene dada por las ecuación es 4.5 y 4.8 respectivamente.

5.2.5. Interfaz

El analizar diferentes métodos por los cuales se podía evaluar el campo eléctrico ubicada en la interfaz de transición entre materiales, permitió finalmente optar por la opción descrita en la ecuación 4.21 que permite hacer uso de campos eléctricos adyacentes para el cálculo, debido a que este análisis no presenta discontinuidades en los campos magnéticos a la hora de realizarse esta transición.

5.2.6. Valores y vectores propios

Una vez se hallan los valores y vectores propios a partir de la matriz diseñada, se realiza el siguiente proceso:

- Después de encontrados los valores y vectores propios, se procede a asignarle un índice a los valores propios.
- Se organiza de menor a mayor los valores propios y con el índice que ya se les había asignado previamente, es posible organizar los vectores propios asociados en el mismo orden.
- Se escoge una frecuencia cualquiera y se determina un rango cercano a ese valor para acotar los valores propios, una vez se tiene un rango definido de valores propios, se acotan los vectores propios a solo los asociados a esos valores.
- Como los vectores propios tienen en consideración tanto campos eléctricos en sus filas pares y campos magnéticos en sus filas impares, se hace la respectiva separación.

5.2.7. Reflexión y transmisión

En la sección 1.1.3.1 se presentan las ecuaciones necesarias para evaluar el coeficiente de reflexión y el de transmisión. En la sección de resultados de este capítulo se encuentran los valores obtenidos para estos parámetros.

5.3. Resultados

Se asumen los tamaños definidos para piel, tejido adiposo, tejido glandular y tejido muscular vistos en 5.2.1, el tamaño del tumor se puede ingresar por pantalla entre 0.03 y 5 cm, dejando el resto de tamaño para el vacío y así completar una estructura de 22 cm.

5.3.1. Permitividad en función de la frecuencia

A partir de los valores propios que se ordenan acotando solo a valores positivos de menor a mayor, se hallaron las permitividades en función de la frecuencia obtenida a través de los valores propios. Los datos se obtuvieron como se explica en 5.2.3.

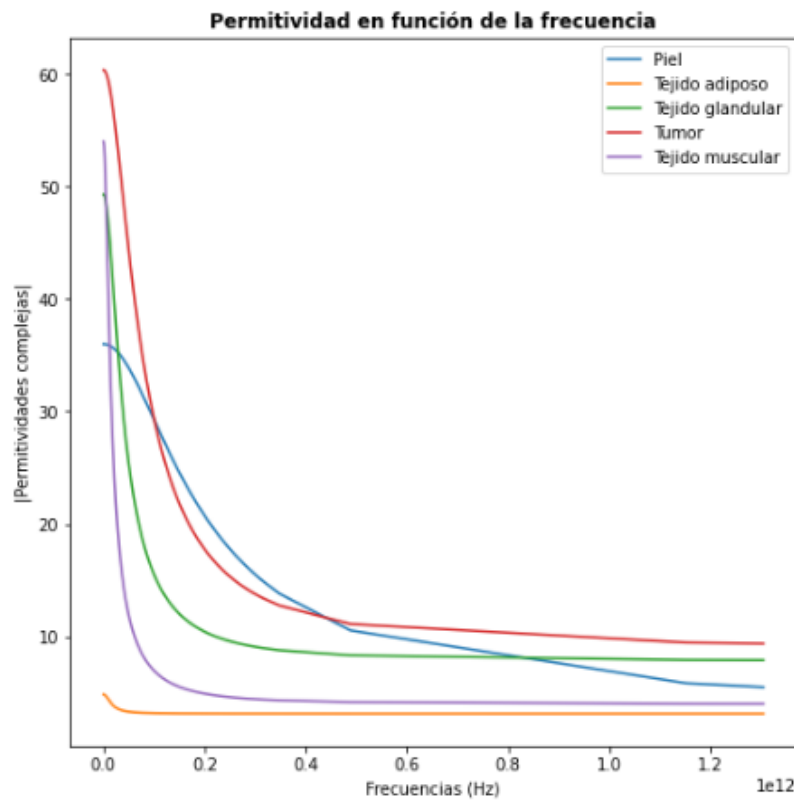


Figura 5.2: Valor absoluto de permitividades complejas en función de la frecuencia (valores propios)

El tejido mamario al ser un medio dispersivo, tiene propiedades eléctricas que varían en función de la frecuencia. En la Figura 5.2 se indican las permitividades calculadas en un rango de frecuencias determinado por los valores propios, es posible evidenciar un comportamiento que indica que a medida que la frecuencia aumenta, la permitividad de cada una de las capas del tejido mamario disminuye, así como lo menciona Gabriel et al. en [17].

5.3.2. Valores propios

Para un tamaño del tumor de 3.693 cm y una frecuencia deseada de 5 GHz, se limita el rango de valores propios y se obtiene como resultado los valores presentados en la Figura 5.3. Tener en cuenta que los valores propios están representados por ω .

```
array([2.73483518e+10, 2.84669241e+10, 2.95849705e+10, 3.05945283e+10,
       3.15186467e+10, 3.24326613e+10, 3.32466891e+10, 3.42063203e+10,
       3.53842041e+10])
```

Figura 5.3: Valores propios después de restringir el rango de frecuencias

5.3.3. Reflexión y transmisión

Teniendo en cuenta una estructura unidimensional multicapa de tamaño $L = 22\text{cm}$ en total, donde los tamaños vienen dados del siguiente modo:

- El vacío $L_0 = 0,10257m$
- La piel $L_P = 0,0015m$
- El tejido adiposo $L_A = 0,015m$
- El tejido glandular $TG = 0,059m$
- El tumor $L_4 = 0,03693m$
- El tejido muscular $L_5 = 0,005m$

y haciendo uso de las ecuaciones vistas en 1.1.3.2 se determinan los parámetros necesarios para calcular el coeficiente de reflexión. El índice de refracción viene dado por la ecuación 1.36 y los valores están plasmados en el Cuadro 5.1.

Medio	Índice de refracción	Valor
Vacío	na	1
Piel	n1	5.99
Tejido adiposo	n2	2.19
Tejido glandular	n3	7.00
Tumor	n4	7.76
Tejido muscular	n5	7.21
Vacío	nb	1

Cuadro 5.1: Índices de refracción en la estructura multicapa unidimensional

El número de onda de propagación en el dieléctrico está dada por $k_i = \frac{L3}{c_i}$, donde $i=1,2,3,4,5$ que representan las secciones de piel, tejido adiposo, tejido glandular, tumor y tejido muscular, $L3$ son las frecuencias (ω) obtenidas en los valores propios dentro del rango deseado y c_i representa la velocidad de propagación de la onda en cada una de las secciones de la estructura. Como $L3$ es un vector que representa un rango de frecuencias, el Cuadro 5.2 presenta los valores del número de onda para cada frecuencia dentro del rango.

ω (GHz)	k1	k2	k3	k4	k5
30.1	602.24	219.77	702.97	779.35	723.77
30.8	615.55	224.63	718.51	796.58	739.77
31.3	627.01	228.81	731.89	811.41	753.55
31.9	639.60	233.40	746.58	827.69	768.67
33.3	665.67	242.92	777.01	861.43	799.99

Cuadro 5.2: Número de onda para cada capa de la estructura de acuerdo al rango de frecuencias.

Se reemplazan los términos necesarios en las ecuaciones 1.33, 1.34 y 1.35 para obtener $|\Gamma_i|^2$ cuyo resultado se encuentra en el Cuadro 5.3 para cada una de las frecuencias dentro del rango. A partir de lo obtenido se puede decir que la cantidad de onda reflejada es muy alto para esta estructura que representa el tejido mamario afectado con cáncer.

$ \Gamma_1 ^2$	$ \Gamma_2 ^2$	$ \Gamma_3 ^2$	$ \Gamma_4 ^2$	$ \Gamma_5 ^2$
0.44	0.69	0.85	0.60	0.59
0.87	0.52	0.21	0.61	0.58
0.12	0.72	0.84	0.59	0.58
0.86	0.55	0.19	0.55	0.58
0.87	0.51	0.18	0.59	0.57

Cuadro 5.3: Reflectancia

Para el tejido muscular, se tiene que lo reflejado está indicado por la ecuación 5.1:

$$|\Gamma_6|^2 = 0,57 \quad (5.1)$$

5.3.4. Campo eléctrico para un tumor de tamaño: 3.693 cm evaluado cerca a una frecuencia de 3GHz

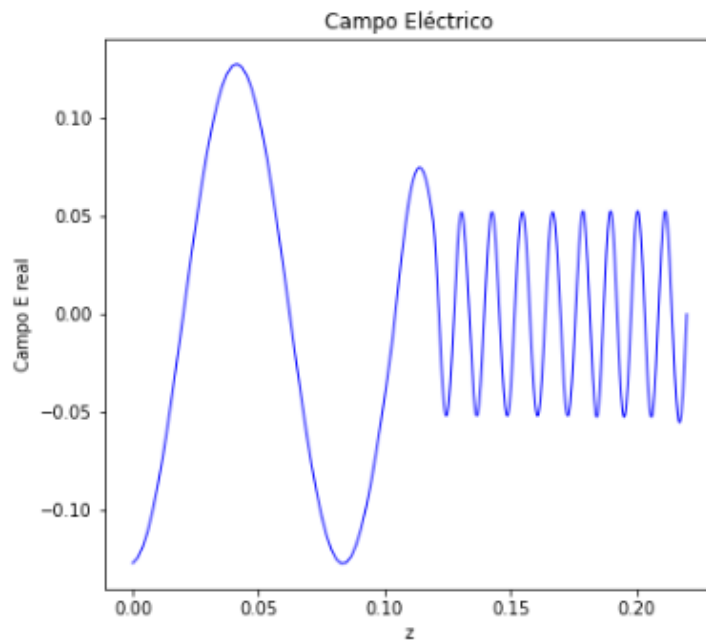


Figura 5.4: Campo E a 3 GHz para una estructura multicapa

La Figura 5.4 presenta la respuesta del campo eléctrico a una frecuencia cercana a 3 GHz, se observa como la onda pasa de propagarse en vacío a través de la estructura hasta un tamaño de 0.103 m donde se perturba la propagación al modificar amplitud y longitud de onda a medida que atraviesa las diferentes capas.

A continuación, se mostrarán otros resultados para diferentes frecuencias y tamaños de tumor analizados.

5.3.5. Campo eléctrico para un tumor tamaño: 3.693 cm evaluado cerca a una frecuencia de 5GHz

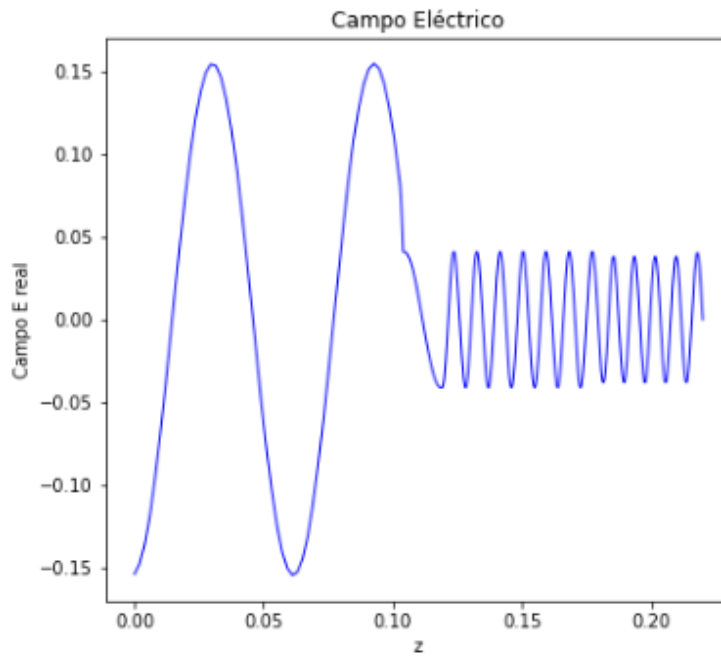


Figura 5.5: Campo E a 5 GHz para una estructura multicapa

La figura 5.5 es la respuesta del campo eléctrico a una frecuencia cercana a 5 GHz, se logra observar la interacción del campo en la estructura que modela el tejido, así como se observa un cambio de longitud de onda al propagarse entre las distintas capas de la estructura, quizá es más notorio al principio debido a que la sección de vacío cuenta con mayor longitud dentro de la estructura (0.103 m) y hay mayor rango visual para notar esa longitud de onda y la perturbación de la misma al cambiar de medio.

5.3.6. Campo eléctrico para un tumor tamaño: 0.03 cm evaluado cerca a una frecuencia de 3GHz

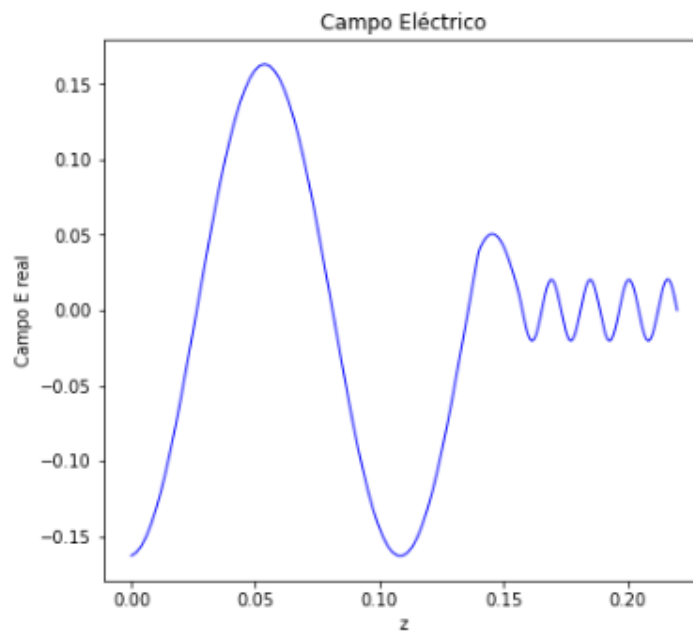


Figura 5.6: Campo E a 3 GHz para una estructura multicapa

Se disminuye considerablemente el tamaño del tumor dejándolo en 0.3 mm y se evalúa en un rango de frecuencias cercanas a 3 GHz, para obtener lo visto en la Figura 5.6.

5.3.7. Campo eléctrico para un tumor tamaño: 0.03 cm evaluado cerca a una frecuencia de 5GHz

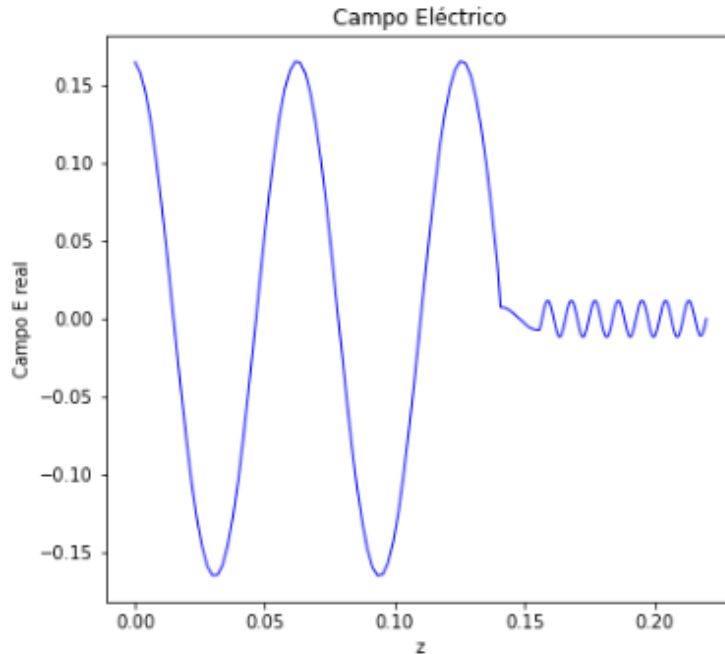


Figura 5.7: Campo E a 5 GHz para una estructura multicapa

Se mantiene el mismo tamaño del tumor visto en la Figura 5.6, sin embargo, esta vez se analiza cerca a una frecuencia de 5 GHz, para obtener lo observado en la Figura 5.7.

Al visualizar el tejido mamario afectado con cáncer como un material dieléctrico dispersivo y modelarlo como una estructura multicapa unidimensional, fue posible cumplir con los objetivos planteados para el desarrollo de este proyecto. Se hizo uso de un modelo físico de tejidos biológicos que permite hallar la permitividad en función de la frecuencia. Se implementó el Método de Diferencias Finitas en el Dominio de la Frecuencia que permitió calcular los campos electromagnéticos, teniendo en cuenta la impedancia característica del medio y la velocidad de propagación de la onda. Finalmente, se simuló el comportamiento de los campos electromagnéticos en interacción con tejido mamario afectado con cáncer, observando la disminución de la longitud de onda a medida que se aumenta la frecuencia.

El código que se desarrolló para evaluar la interacción de las ondas EM y tejido mamario visto como una estructura multicapa unidimensional se encuentra en el repositorio:

<https://github.com/dianamq/Campos-EM-en-interaccion-con-tejidos-biologicos-usando-FDFD> con el nombre de “Estructuramulticapa”.

Conclusiones

Teniendo en cuenta el trabajo de grado desarrollado, se puede concluir que:

- Se logró cumplir con el objetivo general de este trabajo de grado al implementar un modelado computacional que permitió simular la interacción entre campos electromagnéticos y tejidos mamarios afectados con cáncer.
- El caso de la cavidad en vacío permitió evaluar la validez y funcionamiento del método de diferencias en el dominio de la frecuencia, se conocían las propiedades que caracterizan el medio y se tenía una referencia de cómo debería verse la longitud de onda en los distintos modos de vibración de la cavidad, la cual se verificó.
- El caso de estructura vacío con pared dieléctrica permitió explorar distintas formas de solución para problemas de interfaz o de condición de frontera, así como también evaluar la funcionalidad y validez del método implementado al comprobar con una pared transparente que efectivamente no hubiese modificación en amplitud de la onda al propagarse.
- La aplicación del Método de Diferencias Finitas en el Dominio de la Frecuencia permite finalmente observar la interacción entre campos EM y el tejido biológico. Este se construyó como un material dieléctrico dispersivo que modela el tejido mamario con cáncer.
- Realizar una abstracción geométrica de los casos a evaluar, permitió visualizar claramente lo que se buscaba implementar, además, de esta manera fue posible recurrir a ayudas geométricas para resolver problemas de condición de frontera así como también de la interfaz entre distintos medios.
- De igual modo, se logró observar la relación de intensidades de campo Eléctrico y Magnético en función de la impedancia intrínseca del medio.
- Se logró un entendimiento del funcionamiento del método en una sola dimensión.

Trabajos Futuros

Este trabajo de grado tuvo como objetivo sentar las bases para trabajos futuros muy interesantes. A continuación, se presentan algunos trabajos futuros que podrían ser desarrollados:

- Aplicación del método de diferencias finitas en el dominio de la frecuencia en 2D.
- Aplicación del método de diferencias finitas en el dominio de la frecuencia en 3D, modelando lo más real posible el tejido mamario con sus distintas capas, tomando como base lo observado en [21].
- Llevar el análisis al método de elementos finitos, lo que permitirá modelar geometrías más complejas.
- Profundizar en temas relacionados a la reflexión y transmisión de la onda, para analizar casos de reflexión total que permita controlar la interacción de los campos electromagnéticos con el tumor sin propagarse hacia las demás capas de tejido.
- Complementar el estudio al implementar un prototipo que emule las características del tejido mamario afectado con cáncer.

Los códigos que contienen el desarrollo de los diferentes casos evaluados pueden ser encontrados en el siguiente repositorio:

<https://github.com/dianamq/Campos-EM-en-interaccion-con-tejidos-biologicos-usando-FDFD>

Bibliografía

- [1] Ondas. *Recuperado de:*
<https://www.upo.es/depa/webdex/quimfis/docencia/basesFQ/Tema6BFQ04ByN.pdf>.
- [2] Finite difference method. *Recuperado de:* <http://www.multiphysics.us/FDM.html>.
- [3] Lidia Tortajada Giménez. Anatomía de la mama. <http://www.acmcb.es/files/425-9996-DOCUMENT/Tortajada4416Mar16.pdf>.
- [4] Lidy Wijers e Indra Dennert Robin Smithuis. Ultrasonido de la mama. *Recuperado de:* <https://radiologyassistant.nl/breast/ultrasound/ultrasound-of-the-breast>. Hospital de Alrijne en Leiderdorp - Países Bajos.
- [5] Douglas A. Woten and Magda El-Shenawee. Error analysis of breast tumor signature versus skin thickness at microwave frequencies. In *2008 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, pages 1–4, 2008.
- [6] Rebecca L. Siegel, Kimberly D. Miller, and Ahmedin Jemal. Cancer statistics, 2016. *CA: A Cancer Journal for Clinicians*, 66(1):7–30, January 2016.
- [7] Departamento Administrativo Nacional de Estadística DANE. Instituto Nacional de Cancerología INC. *Datos mortalidad nacional. Sistema de información de cáncer en Colombia -SICC (Versión 1.0)*. [Internet]. Bogotá, Colombia: INC, DANE. 2017.
- [8] Cáncer de mama. *Ministerio de Salud. Disponible:*
<https://www.minsalud.gov.co/salud/publica/ssr/Paginas/Cancer-de-mama.aspx>.
- [9] J. Ferreiro, J. García, R. Barceló, and I. Rubio. Quimioterapia: efectos secundarios. *Gaceta Médica de Bilbao*, 100:69–74, 2003.
- [10] Facts about the american cancer society. *American Cancer Society*, 2017.
- [11] Ministerio de Salud y protección Social. Resolución 001 presupuesto desagregado 2020. *Instituto Nacional de Cancerología*, 2019.
- [12] Consecuencias físicas. *MD Anderson Cancer Center. Disponible:*
<https://mdanderson.es/el-cancer/vivir-con-el-cancer/consecuencias-fisicas>.
- [13] Las consecuencias del cáncer: precariedad laboral y económica. *RRHH Digital*.
- [14] Movimiento ondulatorio. *Recuperado de:*
<http://www.ehu.eus/acustica/bachillerato/onares/onares.html>.

- [15] Claudia Villamizar. Influencia de los parámetros de excitación electromagnética en la respuesta térmica de los tejidos de glándulas mamarias en aplicaciones de hipertermia para el tratamiento de cáncer de mama. *Recuperado de: <http://riuc.bc.uc.edu.ve/bitstream/123456789/4906/1/cvillamizar.pdf>*, 2014.
- [16] Permitividad. *Recuperado de: <https://iupsm.files.wordpress.com/2010/08/permitividad.pdf>*.
- [17] C Gabriel, S Gabriel, and E Corthout. The dielectric properties of biological tissues: I. literature survey. *Physics in Medicine and Biology*, 41(11):2231–2249, nov 1996.
- [18] S Gabriel, R W Lau, and C Gabriel. The dielectric properties of biological tissues: II. measurements in the frequency range 10 hz to 20 GHz. *Physics in Medicine and Biology*, 41(11):2251–2269, November 1996.
- [19] S Gabriel, R W Lau, and C Gabriel. The dielectric properties of biological tissues: III. parametric models for the dielectric spectrum of tissues. *Physics in Medicine and Biology*, 41(11):2271–2293, nov 1996.
- [20] Mariya Lazebnik, Dijana Popovic, Leah McCartney, Cynthia B Watkins, Mary J Lindstrom, Josephine Harter, Sarah Sewall, Travis Ogilvie, Anthony Magliocco, Tara M Breslin, Walley Temple, Daphne Mew, John H Booske, Michal Okoniewski, and Susan C Hagness. A large-scale study of the ultrawideband microwave dielectric properties of normal, benign and malignant breast tissues obtained from cancer surgeries. *Physics in Medicine and Biology*, 52(20):6093–6115, October 2007.
- [21] Earl Zastrow *, Shakti K. Davis, Mariya Lazebnik, Frederick Kelcz, Barry D. Van Veen, and Susan C. Hagness. Development of anatomically realistic numerical breast phantoms with accurate dielectric properties for modeling microwave interactions with the human breast. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 55(12):2792–2800, 2008.
- [22] Boundary conditions. *Recuperado de: <https://support.lumerical.com/hc/en-us/articles/360045467453-Simulation-Tips-Accuracy-and-Performance-Tips-Boundary-Conditions>*.
- [23] Cavidad resonante. *Recuperado de: https://www.ecured.cu/Cavidad_resonante*.
- [24] Vikas Khare et al. *Prefeasibility Assessment of a Tidal Energy System*, chapter 3. Elsevier, 2019.
- [25] Absorbing boundary conditions. *Recuperado de: https://encyclopediaofmath.org/wiki/Absorbing_boundary_conditions*.
- [26] Patrick Marchesiello, James C. McWilliams, and Alexander Shchepetkin. Open boundary conditions for long-term integration of regional oceanic models. *Ocean Modelling*, 3(1):1–20, 2001.

-
- [27] Jian-Ming Jin. *Theory and Computation of Electromagnetic Fields*. Wiley-IEEE Press, 2010.
- [28] Reflexión y refracción de ondas. *Recuperado de: <https://www.hiru.eus/es/fisica/reflexion-y-refraccion-de-ondas>*.
- [29] S. J. Orfanidis. *Electromagnetic waves and antennas*, 2013.
- [30] Método de las diferencias finitas en el dominio de la frecuencia (fdfd). *Recuperado de: <https://es.remcom.com/xf-fdtd-method>*.
- [31] Hans-Dieter Lang. The finite-difference frequency-domain method. *Recuperado de: http://www.hade.ch/docs/report_FDFD.pdf*.
- [32] W. M. Brink, I. E. Lager, and B. J. Kooij. Electromagnetic focusing in biological tissues. In *Proceedings of the 5th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)*, pages 2915–2919, 2011.
- [33] Numpy. *Recuperado de: <https://numpy.org/doc/stable/>*.
- [34] A. et al. Sarno. Homogeneous vs. patient specific breast models for monte carlo evaluation of mean glandular dose in mammography. *Physica Medica: European Journal of Medical Physics*, 51.
- [35] Pam Stephan. Breast tumor size and staging. *<https://www.verywellhealth.com/know-your-breast-tumor-size-4114640>*, 2019.
- [36] Earl Zastrow *, Shakti K. Davis, Mariya Lazebnik, Frederick Kelcz, Barry D. Van Veen, and Susan C. Hagness. Development of anatomically realistic numerical breast phantoms with accurate dielectric properties for modeling microwave interactions with the human breast. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 55(12):2792–2800, 2008.