



Pontificia Universidad
JAVERIANA
Cali

Facultad de Ingeniería y Ciencias
Secretaría de la Facultad

Acta de Correcciones al Proyecto de Grado
Matemáticas Aplicadas

Fecha: 12/07/2021

Autores: Juan Fernando Paz Paternina

Nombre del Proyecto de Grado: Dinámica de un mapa estroboscópico discontinuo. Una aplicación al convertidor DC-DC Buck-Boost.

Director:

Como indica el artículo 2.27 de las Directrices de Trabajo de Grado, he verificado que los estudiantes indicados arriba han implementado todas las correcciones que los Jurados del Proyecto de Grado definieron que se efectuaran, como consta en el Acta de Calificación correspondiente.

Firma de Director(a) del Proyecto de Grado

Firma de Director(a) del Proyecto de Grado

Facultad de Ingeniería

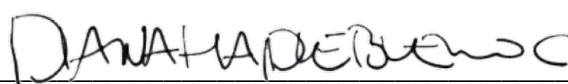
Calle 18 118-250 Av. Cañasgordas PBX 321 8200 • FAX 555 28 23 • www.javerianacali.edu.co

Nota de Aceptación

Aprobado por el Comité de Trabajo de Grado en cumplimiento de los requisitos exigidos por la Pontificia Universidad Javeriana para optar el título de Profesional en Matemáticas Aplicadas.



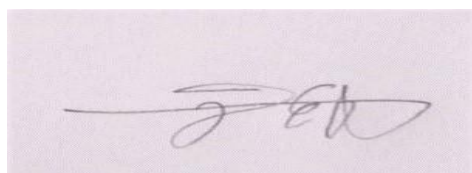
Hernán Camilo Rocha Niño
Decano de la Facultad de Ingeniería y Ciencias



Diana Haidive Bueno Carreño
Directora Carrera de Matemáticas Aplicadas




Nombre: Andrés Felipe Amador Rodríguez
Director(a) Trabajo



Nombre: Daniel Elías Núñez López
Codirector(a) Trabajo



Nombre: Enrique Ponce Núñez
Jurado 1



Nombre: Isabel Cristina García Arboleda
Jurado 2

Santiago de Cali 12 de julio de 2021

Director y Codirector

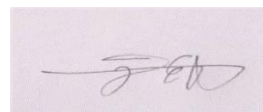
Por medio de la presente nos permitimos informar que el estudiante de Matemáticas Aplicadas, Juan Fernando Paz Paternina (código: 2653749) trabajó bajo nuestra dirección en el proyecto de grado titulado “Dinámica de un mapa estroboscópico discontinuo. Una aplicación al convertidor DC-DC Buck-Boost”, el cuál fue aprobado.

Cordialmente,



Andrés Felipe Amador

Director



Daniel Elías Nuñez

Codirector

**Dinámica de un mapa estroboscópico discontinuo.
Una aplicación al convertidor Buck-Boost.**

JUAN FERNANDO PAZ PATERNINA

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS
SANTIAGO DE CALI
2021**

**Dinámica de un mapa estroboscópico discontinuo.
Una aplicación al convertidor Buck-Boost.**

JUAN FERNANDO PAZ PATERNINA

Trabajo de grado

Carrera de Matemáticas Aplicadas

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS
SANTIAGO DE CALI
2021**

Agradecimientos

Mis agradecimientos a mi familia y a los profesores Andrés Felipe Amador Rodríguez y Daniel Elías Nuñez que me asesoraron y me motivaron para realizar mi tesis de pregrado.

Abstract

In this work we show the occurrence of big bang bifurcation in the two dimensional stroboscopic map associated at a canonical form of PWL systems given by [13, 14] with different matrix. The work consists of 3 chapters.

In the first chapter we give a rigorous study of one and two dimensional discrete maps, canonical forms to two dimensional PWL systems and stroboscopic maps.

At the second chapter we show the necessary results about the occurrence of big bang bifurcation in a one dimensional discrete maps and two dimensional stroboscopic maps with the same matrix, too get some elements of [2] to characterize the exponential matrix in the stroboscopic map and we study the main properties of the stroboscopic map associated a PWL system with two different matrix to show the occurrence of the big bang bifurcation in this map.

Finally in the third chapter we study the DC-DC Buck-Boost converter model given by [23], from a short description of its operation to the deduction of its model. After deduce the model we show the topologically equivalent system given by the canonical form studied in the Chapter 2 and we show the occurrence of the big bang bifurcation in this canonical form using the original parameters values and we show other phenomena like coexisting periodic orbits in the stroboscopic map associated at the original adimensional system of the Buck-Boost converter.

Contenido

1. Sistemas dinámicos	3
1.1. Sistemas dinámicos	3
1.2. Teoría de mapas	5
1.3. Las formas canónicas	19
1.3.1. La forma Canónica:	20
1.3.2. La forma canónica normalizada:	21
1.4. Mapas estroboscópicos	23
2. Mapas estroboscópicos y bifurcación big bang	25
2.1. La matriz exponencial	25
2.2. Motivación	29
2.3. Propiedades del mapa estroboscópico	39
2.3.1. Descripción del espacio de parámetros (a_R, a_L)	41
2.3.2. Soluciones periódicas	42
3. El convertidor DC-DC Buck-Boost	47
3.1. El modelo del convertidor	47
3.1.1. Variables eléctricas fundamentales	47
3.1.2. Leyes de Kirchhoff y ley de Ohm	49
3.1.3. Componentes del convertidor	49
3.1.4. Deducción del modelo	52
3.2. Modelo del convertidor	54
3.2.1. Adimensionalización del modelo	54
3.2.2. Cambio de coordenadas	56
3.2.3. Forma canónica del modelo	56
3.2.4. Forma canónica normalizada del modelo	57
3.3. Mapa del convertidor	59
4. Conclusiones y trabajos futuros	69

Lista de Tablas

1.1. Comportamiento de los equilibrios en la forma canónica normalizada.	22
1.2. Estabilidad de los equilibrios en la forma canónica normalizada.	22

Lista de Figuras

1.1.	Órbitas que convergen al punto fijo $x = 0$	11
1.2.	Órbitas que se alejan del punto fijo $x = -1$	12
1.3.	Bifurcación silla nodo para la familia exponencial	14
1.4.	Doblamiento de período para la familia exponencial	14
1.5.	Diagrama de bifurcación para la familia cuadrática	15
1.6.	Diagrama de bifurcación del mapa tienda	16
1.7.	Diagrama de periodos del mapa (1.14) con los parámetros $b = 0,5$, $a = 0,05$ y variando el parámetro c	17
1.8.	Diagrama de bifurcación del mapa (1.14) con los parámetros $b = 0,5$, $a = 0,05$ y variando el parámetro c	18
1.9.	Plano de parámetros (c, a) , las líneas rectas o curvas de codimensión uno que se intersecan en el origen separan las regiones del primer cuadrante en las que las órbitas periódicas del mapa (1.14) tienen el mismo periodo.	19
2.1.	Función d definida en (2.14) con $k = 1$ y $t = 0,5$	29
2.2.	(a) Plano (a, c) , las líneas separan las regiones en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ cuyas órbitas periódicas tienen el mismo periodo. (b) Diagrama de bifurcación del mapa f definido en (1.14) con el parámetro $b = 0$ variando el parámetro θ . (c) Periodos de las órbitas de (b) calculados numéricamente.	30
2.3.	(a) Plano (a, c) , las líneas separan las regiones en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ cuyas órbitas periódicas tienen el mismo periodo. (b) Diagrama de bifurcación del mapa f definido en (1.14) con el parámetro $b = 0,5$ variando el parámetro θ . (c) Periodos de las órbitas de (b) calculados numéricamente.	31
2.4.	Diagrama de bifurcación del mapa f definido en (1.14) con la configuración de parámetros $a = 0,05$, $b = -1,1$ y variando el parámetro c	31

2.5. (a) Plano (y_c, k) , las líneas separan las regiones en el intervalo $[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ cuyas órbitas periódicas tienen el mismo periodo. (b) Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (2.20) con los parámetros $a_0 = 1, a_1 = 5, b = 1, c = 1,5$ y $t = 0,1$ variando el parámetro θ . (c) Periodos de las órbitas de (b) calculados numéricamente. 34

2.6. (a) Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (2.21) con la configuración de parámetros $\gamma = -0,2, m = 0, t = 0,9, b = \frac{1}{\gamma}$ variando el parámetro θ . (b) Periodos de las órbitas de (a) calculados numéricamente. 38

2.7. (a) Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (2.21) con la configuración de parámetros $\gamma = -1,05, m = 1, t = 0,9, b = -9,27$. Los parámetros γ y b fueron tomados basandose en la conjetura 1. (b) Periodos de las órbitas de (a) calculados numéricamente. (c) zoom de (a). (d) zoom de (b). 39

2.8. (a) Espacio dos paramétrico (γ, b) , con las funciones b_1 y b_2 definidas en (2.22). El punto rojo pertenece al conjunto Δ_β y el punto azul al conjunto Δ , definido en (2.23). (b) Órbita dos periódica correspondiente al mapa P definido en (2.21) con la configuración de parámetros $m = i, t = 0,9, \gamma$ y b correspondientes al punto rojo. (c) Órbita dos periódica correspondiente al mapa P definido en (2.21) con la configuración de parámetros $m = i, t = 0,9, \gamma$ y b correspondientes al punto azul. . . . 40

2.9. (a) Plano (a_R, a_L) , las líneas separan las regiones en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ cuyas órbitas periódicas tienen el mismo periodo. (b) Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (2.29) con los parámetros $\gamma_L = \gamma_R = -2, t_R = t_L = 0,1, m_L = m_R = 1$ y $b = -0,5$ variando el parámetro θ . (c) Periodos de las órbitas de (b) calculados numéricamente. 42

2.10. (a) Plano (a_R, a_L) , las líneas separan las regiones en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ cuyas órbitas periódicas tienen el mismo periodo. (b) Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (2.29) con los parámetros $\gamma_L = \gamma_R = -2, t_L = t_R = 0,1, m_L = 0, m_R = 1$ y $b = -1$ variando el parámetro θ . (c) Periodos de las órbitas de (b) calculados numéricamente. 44

2.11. (a) Plano (a_R, a_L) , las líneas separan las regiones en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ cuyas órbitas periódicas tienen el mismo periodo. (b) Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (2.29) con los parámetros $\gamma_L = \gamma_R = -2$, $t_L = t_R = 0,1$, $m_L = i$, $m_R = 0$ y $b = -1$ variando el parámetro θ . (c) Periodos de las órbitas de (b) calculados numéricamente. 45

2.12. (a) Plano (a_R, a_L) , las líneas separan las regiones en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ cuyas órbitas periódicas tienen el mismo periodo. (b) Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (2.29) con los parámetros $\gamma_L = \gamma_R = -2$, $t_L = t_R = 0,1$, $m_L = 1$, $m_R = i$ y $b = -1$ variando el parámetro θ . (c) Periodos de las órbitas de (b) calculados numéricamente. 46

3.1. Circuito del convertidor DC-DC Buck-Boost estudiado en [23] 50

3.2. Órbita de periodo dos del mapa adimensional del convertidor definido en (3.10) para la configuración de parámetros $\beta = 1$, $\mu = 0,05$, $c_1 = -0,53$, $c_2 = 0,0265$, $d = 0,952$ y condición inicial $x_0 = [0,707, 0,473]^T$ 60

3.3. Órbita de periodo tres del mapa adimensional del convertidor definido en (3.10) para la configuración de parámetros $\beta = 1$, $\mu = 0,05$, $c_1 = -1,3$, $c_2 = -0,104$, $d = 0,952$ y condición inicial $x_0 = [0,7, 0,5]^T$ 61

3.4. Órbita de periodo cinco del mapa adimensional del convertidor definido en (3.10) para la configuración de parámetros $\beta = 1$, $\mu = 0,05$, $c_1 = -0,53$, $c_2 = -0,0265$, $d = 1,62$ y condición inicial $x_0 = [3,04, 1,14]^T$ 61

3.5. Órbita de periodo siete del mapa adimensional del convertidor definido en (3.10) para la configuración de parámetros $\beta = 1$, $\mu = 0,05$, $c_1 = -1,8$, $c_2 = -0,09$, $d = 0,952$ y condición inicial $x_0 = [0, 1]^T$ 62

3.6. Órbita de periodo nueve del mapa adimensional del convertidor definido en (3.10) para la configuración de parámetros $\beta = 2$, $\mu = 0,05$, $c_1 = -1,4$, $c_2 = -0,112$, $d = 0,952$ y condición inicial $x_0 = [0, 10]^T$ 62

3.7. Órbita de periodo ventiocho del mapa adimensional del convertidor definido en (3.10) para la configuración de parámetros $\beta = 1$, $\mu = 0,05$, $c_1 = -1,4$, $c_2 = -0,14$, $d = 0,952$ y condición inicial $x_0 = [0,65, 0,447]^T$ 63

- 3.8. Órbita de periodo treinta y cuatro del mapa adimensional del convertidor definido en (3.10) para la configuración de parámetros $\beta = 1$, $\mu = 0,05$, $c_1 = -1,4$, $c_2 = -0,112$, $d = 0,952$ y condición inicial $x_0 = [0,712, 0,422]^T$ 63
- 3.9. Órbita de periodo sesenta y cuatro del mapa adimensional del convertidor definido en (3.10) para la configuración de parámetros $\beta = 1$, $\mu = 0,05$, $c_1 = -1,3$, $c_2 = -0,104$, $d = 0,952$ y condición inicial $x_0 = [0,757, 0,444]^T$ 64
- 3.10. Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (3.23) con la configuración de parámetros $\gamma = -2$, $m_L = m_R = 1$, $c_L = 0,707$, $c_R = -0,707$, $b = -1$, $t_L = 0,1$ y variando el parámetro t_R 66
- 3.11. (a) Plano (a_R, a_L) , las líneas separan las regiones en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ cuyas órbitas periódicas tienen el mismo periodo. (b) Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (3.23) con los parámetros $\gamma_L = -1,19$, $\gamma_R = -2,21$, $t_L = 0,11$, $t_R = 0,21$, $m_L = i$, $m_R = 1$ y $b = -1$ variando el parámetro θ . (c) Periodos de las órbitas de (b) calculados numéricamente. . . . 67

Introducción

Un convertidor DC-DC es un dispositivo que permite controlar la intensidad de la corriente continua, es decir, se conecta a una fuente de corriente continua y este genera una corriente continua de salida regulada a un valor predeterminado. En particular, el convertidor Buck-Boost es un convertidor DC-DC de gran utilidad, debido a que como indica su nombre, este sirve para incrementar o disminuir la corriente de entrada para lograr una corriente de salida con una intensidad ideal. Es muy común encontrar este convertidor en electrodomésticos y paneles solares fotovoltaicos, entre otros dispositivos. Para más detalles ver [11, 18, 23, 25, 26].

En [23], se propone un sistema de ecuaciones diferenciales lineal a trozos de dimensión dos o PWL por sus siglas en inglés, que modela la corriente y la tensión de salida del convertidor DC-DC Buck-Boost. Este convertidor DC-DC cambia su modo de operación dependiendo del estado de un interruptor, lo que indica que puede ser modelado mediante un mapa estroboscópico discontinuo de dimensión dos, ver capítulo 1.

En [12] se presenta una conjetura y algunos resultados en cierta familia de mapas, referentes a la aparición de un punto en un espacio dos paramétrico tal que cualquier vecindad de este punto contiene infinitas ventanas en las que se pueden encontrar órbitas periódicas de periodos arbitrariamente grandes, conocido como punto de bifurcación big bang. En [2, 4] se reportan algunas propiedades del mapa estroboscópico asociado a una forma canónica estudiada en [13, 14] de los sistemas lineales a trozos discontinuos, familia a la cual pertenece el mapa estudiado en [12].

Motivados por los resultados reportados en [2, 4] respecto a la aparición de órbitas periódicas en una familia de mapas estroboscópicos, en este trabajo se estudia el mapa estroboscópico asociado a la forma canónica del modelo del convertidor DC-DC mediante simulaciones.

Capítulo 1

Sistemas dinámicos

Este capítulo se divide en cuatro secciones, en la primera se define el concepto de sistema dinámico, en la segunda se presentan algunos conceptos, definiciones y resultados del estudio de sistemas dinámicos discretos necesarios para el desarrollo de este trabajo, en la tercera parte se presentan las formas canónicas para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales a trozos de dimensión dos estudiadas en [13, 14], y finalmente en la cuarta sección se presenta el concepto de mapa estroboscópico.

1.1. Sistemas dinámicos

La noción de sistema dinámico proviene de la formalización de un proceso determinístico. El estado futuro de sistemas físicos, químicos, biológicos, ecológicos, económicos e incluso sociales puede predecirse conociendo su estado actual y la forma en que este evoluciona en el tiempo. Suponiendo que la forma en la que el sistema evoluciona no cambia, un sistema dinámico es una terna compuesta por un espacio de estados, un tiempo de evolución y una función que indica la evolución de los estados [33].

Definición 1. [33] *Un sistema dinámico es una terna $\{T, X, \phi^t\}$, donde T es el conjunto del tiempo, X es un espacio de estados y $\phi^t : X \rightarrow X$ es un operador que satisface las siguientes condiciones*

- 1) $\phi^0 = id$.
- 2) $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$, para todo $t, s \in T$.

En este orden de ideas, un sistema dinámico a tiempo continuo tiene por conjunto T a un subconjunto de \mathbb{R} y uno a tiempo discreto tiene por conjunto T a un subconjunto de \mathbb{Z} .

Los sistemas dinámicos a tiempo continuo por lo general están definidos por *ecuaciones diferenciales*. Un resultado fundamental del estudio de ecuaciones diferenciales conocido como el **teorema de existencia y unicidad**, permite definir el operador ϕ^t de un sistema dinámico a tiempo continuo definido por una ecuación diferencial.

Teorema 1. [33] *Considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

donde f es una función suave en una región $U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces existe una única función $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ que satisface las siguientes condiciones, para todo $\mathbf{x}_0 \in U$

- 1) $\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.
- 2) Existe un intervalo $J = (-\delta_1, \delta_2)$, con $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(\mathbf{x}_0) > 0$, tal que para todo $t \in J$,

$$y(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \quad \dot{y}(t) = f(y(t)),$$

Por el Teorema 1, se define el operador $\phi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$\phi^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \quad (1.2)$$

para sistemas a tiempo continuo, el operador $\phi^t(\mathbf{x})$ recibe el nombre de flujo y se representa como $\phi^t(\mathbf{x}) = \Phi(t, \mathbf{x})$.

Por otra parte, en los sistemas dinámicos a tiempo discreto el operador ϕ^t está definido por una función f que itera al componerse con sí misma y es conocida como mapa, por notación, la n -ésima composición de la función f con sí misma se simboliza como $f^{(n)}(\mathbf{x})$. Estos operadores se estudiarán a profundidad en la siguiente sección.

El estudio cualitativo de algunos sistemas dinámicos resulta ser una tarea sumamente compleja en algunos casos, por eso muchas veces se realizan transformaciones que dan como resultado sistemas dinámicos más simples.

Definición 2. [24] *Dos sistemas dinámicos $\{X, T, \phi^t\}$ y $\{X, T, \psi^t\}$ son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo h que preserve la dinámica de un sistema en el otro, por medio de la ecuación*

$$h \circ f = g \circ h, \quad (1.3)$$

con f y g mapas discretos o flujos a tiempo continuo.

Finalmente se define la *estabilidad estructural* de un sistema dinámico $\{X, T, \phi^t\}$,

Definición 3. *Un mapa f (o flujo) es estable estructuralmente si existe $\epsilon > 0$ tal que todas las perturbaciones $\delta < \epsilon$ de clase C^1 de f produzcan mapas (o flujos) topológicamente equivalentes a f .*

1.2. Teoría de mapas

En esta sección se estudian algunas definiciones de conceptos fundamentales en la teoría de mapas tomadas de algunos textos clásicos de sistemas dinámicos discretos. Considere el mapa definido por:

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n), \quad (1.4)$$

donde $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$, y $n, N \in \mathbb{N}$.

Definición 4. [24] *Un mapa de la forma (1.4) es invertible si para cada $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^N$, existe un único $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $\mathbf{x}_1 = f(\mathbf{x}_0)$.*

Ejemplo 1. *Tome el mapa definido por $x_{n+1} = x_n^2$, con $x_n \in \mathbb{R}$ y el punto $x_1 = 4$. Note que los puntos $\{-2, 2\}$ satisfacen $f(2) = f(-2) = x_1 = 4$, por lo tanto este mapa no es invertible.*

Por otra parte el mapa definido por $x_{n+1} = 3x_n + 1$ si es invertible, ya que para todo $x_1 \in \mathbb{R}$ existe un único $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 = 3x_0 + 1$ y está dado por $x_0 = \frac{x_1 - 1}{3}$.

Definición 5. *Un mapa $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es lineal si es de la forma*

$$\mathbf{x}_{n+1} = F(\mathbf{x}_n) = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}, \quad (1.5)$$

con A una matriz cuadrada de orden N y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$.

Definición 6. [33] *Dado un mapa f . La órbita de un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ es un subconjunto ordenado de \mathbb{R}^N , definido por*

$$Or(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^N : \mathbf{x}_n = f^{(n)}(\mathbf{x}), n \in T\}, \quad (1.6)$$

donde T es el conjunto del tiempo correspondiente al sistema dinámico, note que si el mapa f no es invertible entonces $T \subset \mathbb{N}$.

Definición 7. [10] *El punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ es un punto fijo para f si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. El punto \mathbf{x} es un punto periódico de período $n \in \mathbb{N}$ si $f^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. El n menor entero positivo para el cual $f^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ se llama período principal de \mathbf{x} . Note que un punto fijo es un punto periódico con período principal $n = 1$.*

Ejemplo 2. Considere el mapa $x_{n+1} = f(x_n) = -x_n^3$, note que $f(0) = 0$, lo que convierte a 0 en un punto fijo de f . Por otra parte $f(1) = -1$ y $f(-1) = 1$, lo que convierte a -1 y 1 en puntos periódicos de f con periodo principal 2.

Un mapa no necesariamente tiene un solo punto fijo, por ejemplo el siguiente mapa tiene infinitos puntos fijos.

Ejemplo 3. Considere el mapa de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 definido por

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_n.$$

Los puntos fijos del mapa anterior son todos los puntos de la forma:
 $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

Definición 8. La órbita $Or(\mathbf{p})$ de un punto periódico \mathbf{p} de periodo principal n , se conoce como una órbita periódica de periodo n .

Note que la órbita del punto $x = -1$ del mapa presentado en el Ejemplo 2, es una órbita periódica de periodo dos y esta compuesta por los puntos $\{-1, 1\}$.

Si la función f esta definida a trozos o es discontinua, se dice que el mapa está definido a trozos o es discontinuo y su dimensión es la dimensión del espacio de salida y de llegada de la función f . En este trabajo se estudian mapas lineales discontinuos de dimensión dos definidos a trozos con dos zonas y el eje y como zona de conmutación. Este tipo de mapas pueden tener problemas con sus órbitas en cuanto la posibilidad de que estas se presenten o no, dependiendo de los dominios que tome la función f . Para ilustrar esta idea considere el siguiente mapa:

Ejemplo 4. Definamos las siguientes regiones de la recta real:

$$\begin{aligned} \Sigma_L &= \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}, \\ \Sigma_R &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}. \end{aligned}$$

Ahora considere el siguiente mapa de dimensión uno:

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} f_R(x_n) = -2x_n^3, & x_n \in \Sigma_R, \\ f_L(x_n) = \frac{x_n^2}{4}, & x_n \in \Sigma_L. \end{cases} \quad (1.7)$$

Note que los puntos $\{-2, 1\}$ forman una órbita periódica para este mapa, porque $f(-2) = 1 \in \Sigma_R$ y $f(1) = -2 \in \Sigma_L$. Si las regiones Σ_R y Σ_L cambian, entonces esta órbita puede dejar de existir. Si se redefinen las regiones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Sigma_L &= \{x \in \mathbb{R} : x < -3\}, \\ \Sigma_R &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq -3\},\end{aligned}$$

la órbita $\{-2, 1\}$ deja de existir, pues $f(-2) = -16 \neq 1$.

La zona de conmutación de un mapa definido a trozos con dos zonas es la frontera de sus zonas, en Ejemplo anterior la zona de conmutación es el punto $x = 0$ y después el punto $x = -3$. Note que los mapas f_R y f_L comparten el mismo punto fijo $x = 0$, pero el mapa f_L nunca alcanza este punto fijo debido a que este se encuentra en la región Σ_R , esto se conoce como un punto fijo virtual. En el caso del mapa f_R que su punto fijo está en su dominio se le conoce como un punto fijo real.

Para estudiar la presencia de órbitas periódicas en mapas definidos a trozos con dos zonas como el mapa del Ejemplo anterior se adopta la **dinámica simbólica** utilizada en [2, 5, 16], esta es una secuencia de símbolos que muestran la zona en que se ubica la n -ésima iteración del mapa f sobre una condición inicial \mathbf{x} .

Definición 9. Dado un mapa $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, se considera la representación simbólica de la órbita de un punto \mathbf{x} como $I_P(\mathbf{x}) \in \{L, R\}^N$, donde

$$I_P(\mathbf{x})(k) = \begin{cases} L & \text{si } \mathbf{e}_1^T P^k(\mathbf{x}) < 0, \\ R & \text{si } \mathbf{e}_1^T P^k(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

con \mathbf{e}_1 el primer vector canónico de \mathbb{R}^2 . Si el mapa P es de dimensión uno entonces la representación simbólica es la siguiente

$$I_P(\mathbf{x})(k) = \begin{cases} L & \text{si } P^k(x) < 0, \\ R & \text{si } P^k(x) \geq 0 \end{cases}$$

Note que la representación simbólica de una órbita periódica también es periódica, por eso la tomamos como una secuencia finita de símbolos L y R . La dinámica simbólica también permite clasificar a las órbitas periódicas en familias, por ejemplo la familia LR es una familia a la que pertenecen todas las órbitas de periodo dos que tengan un punto en semiplano izquierdo y

otro en el semiplano derecho en mapas de dimensión dos o del punto $x = 0$ en mapas de dimensión uno. En el caso del Ejemplo 4, la representación simbólica de la órbita $\{-2, 1\}$ estaría dada por LR debido a que es una órbita de periodo dos con su condición inicial es negativa y su siguiente componente es positiva.

Una vez definida la dinámica simbólica de una órbita, se habla del concepto de admisibilidad de una órbita, ya que como se mostró en el Ejemplo 4, se puede presentar que un mapa definido a trozos admita o no la existencia de una órbita periódica dependiendo de su zona de conmutación.

Por notación se tomarán los exponentes dentro de paréntesis como índice de una sucesión.

Definición 10. Sea $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Una órbita periódica de periodo n con representación simbólica $(I^{(1)}, \dots, I^{(n)})$, donde $I^{(j)} \in \{L, R\}$, $j = 1, \dots, n$ es admisible si existe \mathbf{x} tal que $I_P(\mathbf{x}) = (I^{(1)}, \dots, I^{(n)})$.

Debido a que el enfoque de este trabajo es detectar numéricamente la existencia de órbitas periódicas, es necesario que estas órbitas puedan alcanzarse mediante iteraciones. Para empezar a estudiar el comportamiento de las órbitas de un mapa, se define el concepto de punto asintótico hacia adelante de un punto periódico.

Definición 11. [19] Sea \mathbf{p} un punto periódico de período principal n del mapa f . Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ es asintótico hacia adelante a \mathbf{p} si $\lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(\mathbf{x})) = \mathbf{p}$. El conjunto estable de \mathbf{p} , denotado por $W^S(\mathbf{x})$, consiste en todos los puntos asintóticos hacia adelante de \mathbf{p} .

Ejemplo 5. Tome el mapa del Ejemplo 2. Note que para todo $x \in (-1, 1)$ se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(x)) = 0,$$

además, para todo $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(x))$ no existe, por lo anterior, el conjunto $W_s(0) = (-1, 1)$.

Si se toma una condición inicial dentro del intervalo $(-1, 1)$, después de cierto número de iteraciones el mapa del Ejemplo 2 converge al punto fijo $x = 0$, pero fuera de este intervalo ninguna condición inicial lo alcanzará. Por lo anterior es necesario garantizar que si las órbitas periódicas existen, estas puedan alcanzarse después de algún número finito de iteraciones. Esta propiedad se conoce como la **estabilidad** de las órbitas periódicas.

Existen resultados relacionados con una propiedad de los puntos periódicos de los mapas que permite predecir el comportamiento de las órbitas de ciertos puntos bajo algunas iteraciones del mapa. Esta propiedad es la **hiperbolicidad** de los puntos periódicos que será definida a continuación.

Definición 12. [10] Un punto fijo \mathbf{p} del mapa $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ se llama hiperbólico si el jacobiano de F en \mathbf{p} , $JF(\mathbf{p})$ no tiene valores propios en el círculo unitario. Si el punto es periódico de periodo n , entonces \mathbf{p} es hiperbólico si $JF^n(\mathbf{p})$ no tiene valores propios en el círculo de unidad.

Note que todos los puntos fijos del mapa del Ejemplo 3 son puntos no hiperbólicos, pues el valor propio de su jacobiano tiene valor absoluto de uno y multiplicidad algebraica 2. En total existen tres tipos de puntos hiperbólicos, estos son: *atractores*, *repulsores* y *sillas*.

Definición 13. Sea $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ y \mathbf{p} tal que $F^n(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$, para $n \in \mathbb{N}$:

- 1) \mathbf{p} es un sumidero o punto periódico atractor si todos los valores propios de $JF^n(\mathbf{p})$ son menores a uno en modulo.
- 2) \mathbf{p} es una fuente o punto periódico repulsor si todos los valores propios de $JF^n(\mathbf{p})$ son mayores a uno en modulo.
- 3) \mathbf{p} es una silla si algunos valores propios de $JF^n(\mathbf{p})$ son menores a uno en modulo y otros mayores.

Si un punto es atractor, este será estable, si es repulsor será inestable y si es una silla existen conjuntos en los que es estable y otros en los que es inestable, ya que tiene algunos valores propios son menores a uno en modulo y otros mayores.

Teorema 2. Si el punto fijo \mathbf{x}^* de un mapa lineal $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es un sumidero, su conjunto $W_s(\mathbf{x}^*)$ es igual a \mathbb{R}^N .

Demostración. Por definición, el conjunto $W_s(\mathbf{x}^*) \subset \mathbb{R}^N$. Ahora se probará que $\mathbb{R}^N \subset W_s(\mathbf{x}^*)$, tomando $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ y $\mathbf{x}_{n+1} = F(\mathbf{x}_n) = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$.

Para empezar, note que el punto fijo del mapa F esta dado por

$$\mathbf{x}^* = (I - A)^{-1}\mathbf{b},$$

Iterando el mapa F n veces se llega al siguiente resultado

$$\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0 - (A^n - I)\mathbf{x}^*,$$

Como \mathbf{x}^* es un sumidero y el jacobiano de F es la matriz A , entonces los valores propios de A son en modulo menores a uno, por lo tanto el siguiente límite es cero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \mathbf{0}_{N \times N},$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}^*.$$

A continuación se muestra un resultado clave en el estudio de la dinámica clásica de mapas discretos, conocido como el teorema de Hartman-Grobman.

Teorema 3. [10] Sea \mathbf{p} un punto fijo hiperbólico del mapa f y suponga que $f'(\mathbf{p}) = \mathbf{A}$ con los valores propios de \mathbf{A} diferentes de 0 y de 1. Entonces existen las vecindades U de \mathbf{p} y V de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ y un homeomorfismo $h : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ el cual corresponde al mapa f en U con el mapa lineal $L(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ en V .

El Teorema 3 junto con la clasificación de los puntos hiperbólicos, son herramientas muy útiles al momento de estudiar la dinámica de un mapa con puntos fijos hiperbólicos. Gracias al Teorema 3 es posible estudiar localmente el comportamiento del mapa f como un mapa lineal de la forma $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$ con $\mathbf{A} = JF(\mathbf{p})$ para alguna vecindad del punto fijo \mathbf{p} mientras este sea hiperbólico.

Estudiando los valores propios de A , el punto fijo \mathbf{p} se clasifica como uno de los tres tipos de punto fijo hiperbólico. Al clasificar el comportamiento del punto fijo \mathbf{p} como atractor, repulsor o silla, es posible conocer las variedades en donde las órbitas tienden a acercarse o a alejarse de este punto.

Ejemplo 6. Considere el mapa de dimensión uno definido por $x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{2}x_n(1-x_n)$. Sus puntos fijos son los x que satisfacen la ecuación $f(x) - x = 0$, estos puntos son $\{-1, 0\}$.

Examinemos si estos puntos son hiperbólicos, verificando que el valor absoluto de la derivada de f es diferente de uno en ambos casos.

$$f'(-1) = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2} > 1,$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} < 1,$$

Una vez verificada la condición de hiperbolicidad de ambos puntos fijos, se cumplen las hipótesis necesarias para el teorema de Hartman-Grobman. Aplicando este resultado, se tiene que en una vecindad del punto $x = 0$ el mapa f se comporta como el mapa $x_{n+1} = L(x_n) = \frac{1}{2}x_n$, note que $L'(x) = \frac{1}{2}$, lo que lo convierte en un atractor. Gracias a este análisis es posible concluir que existe una vecindad del punto $x = 0$ en la que las órbitas de sus puntos tienden al punto fijo $x = 0$.

Por otra parte, existe una vecindad U del punto fijo $x = -1$ y un homeomorfismo $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ que corresponde las órbitas de los puntos de f en U con las del mapa $x_{n+1} = L(x_n) = \frac{3}{2}x_n$ en una vecindad V de $x = 0$. Como $L'(x) = \frac{3}{2}$, el punto $x = -1$ se comporta localmente como un repulsor.

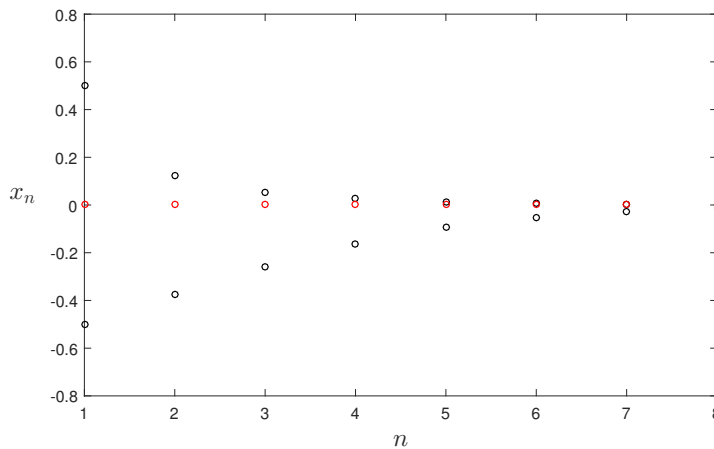


Figura 1.1: Órbitas que convergen al punto fijo $x = 0$.

En la Figura 1.1, se muestra que las órbitas de varias condiciones iniciales cercanas al punto fijo $x = 0$ convergen a él, es por ello que este punto fijo es estable. Ahora tome condiciones iniciales cercanas al punto fijo $x = -1$.

La Figura 1.2 muestra que las condiciones iniciales cercanas al punto fijo $x = -1$ tienen órbitas que tienden a alejarse de este punto con las iteraciones.

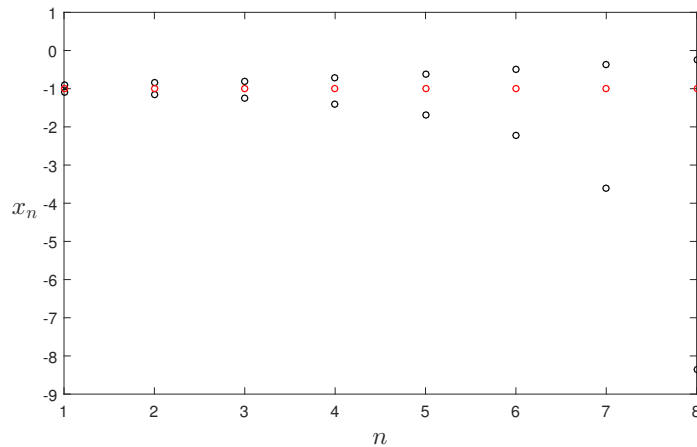


Figura 1.2: Órbitas que se alejan del punto fijo $x = -1$.

La cantidad y estabilidad de las órbitas periódicas junto con otros comportamientos de un mapa pueden cambiar si algunos factores *fijos* llamados **parámetros** alcanzan ciertos valores críticos. Para ilustrar el concepto de parámetro considere los siguientes ejemplos

Ejemplo 7. *Suponga que usted solicita un préstamo bancario por una cantidad x de dinero y el banco accede a prestarle este dinero en el primer mes a una tasa de interés mensual λ . La cantidad de dinero que usted deberá al banco en el mes $n + 1$ (x_{n+1}), dependerá de la cantidad que debe en el mes n (x_n), esta cantidad también depende de la tasa de interés de la forma $x_{n+1} = x_n + \lambda x_n$*

El ejemplo anterior es de un mapa de dimensión uno con un parámetro (la tasa de interés λ), porque a pesar de que es fija, si usted solicita un préstamo por la misma cantidad inicial de dinero pero con una tasa de interés diferente, el dinero que deberá al cabo de un tiempo será distinto.

Ejemplo 8. *Considere una población aislada de zorros y conejos, los conejos se reproducen a una tasa mensual de α y los zorros los cazan a una tasa mensual β , por lo tanto la población de conejos en el mes $n+1$ (x_{n+1}) depende de la población de conejos y zorros en el mes n (x_n y y_n respectivamente) de la forma $x_{n+1} = \alpha x_n - \beta x_n y_n$, mientras que la población de zorros en el mes $n + 1$ será $y_{n+1} = -\gamma y_n + \delta x_n y_n$, donde γ es la tasa de reproducción mensual de los zorros y δ es una tasa de aprovechamiento o beneficio de los zorros por comer conejos.*

El ejemplo anterior es el caso de un mapa de dimensión dos con cuatro parámetros, α, β, γ y δ . Si estos parámetros cambian pueden llevar a las

especies de una posición de equilibrio en la que la cantidad de ambas especies se mantenga constante al pasar del tiempo a que alguna de las dos especies se extinga. Estos cambios se conocen como **bifurcaciones**

Definición 14. [24] Una **bifurcación** ocurre en un valor del parámetro $\mu = \mu_0$ del sistema dinámico $\{X, T, \phi^t\}$ si el sistema no es estructuralmente estable.

La **codimensión** de la bifurcación es la dimensión del espacio de parámetros al que pertenece el parámetro μ .

Un diagrama de bifurcación es una gráfica de la dinámica estacionaria del sistema dinámico para un rango de valores del parámetro μ y una cierta condición inicial x_0 .

Una forma intuitiva para entender el significado de bifurcación es pensar en un valor crítico para un parámetro, que si se mueve de este valor modificará la dinámica del sistema. Para ilustrar este concepto que es fundamental para este trabajo, considere los siguientes ejemplos

Ejemplo 9.

$$E(x) = \lambda e^x, \quad x, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

El mapa generado por la función presentada en (1.9) es conocido como el mapa exponencial, este mapa presenta dos bifurcaciones: la **bifurcación silla nodo o bifurcación tangente** y la **bifurcación del doblamiento de período**. La primera se presenta en $\lambda = \frac{1}{e}$, aquí el mapa pasa de tener dos puntos fijos, uno estable y uno inestable cuando $\lambda < \frac{1}{e}$ a uno solo inestable cuando $\lambda = \frac{1}{e}$ a ninguno después. En la figura 1.3 se muestran los puntos fijos del mapa (negro estable y rojo inestable), los últimos puntos de la órbita generada por una condición inicial $x_0 = 0$.

La otra bifurcación ocurre en $\lambda = -e$, aquí el mapa pasa de tener un punto periódico de período 2 cuando $\lambda < -e$, a un punto fijo no hiperbólico cuando $\lambda = -e$, a un punto fijo atractivo cuando $-e < \lambda < 0$, como se muestra en la Figura 1.4:

Note que en la Figura 1.4 hay un punto periódico estable de período 2, que luego se convierte en un punto fijo estable, a diferencia de la Figura 1.3, donde hay dos puntos de fijos que luego colisionan.

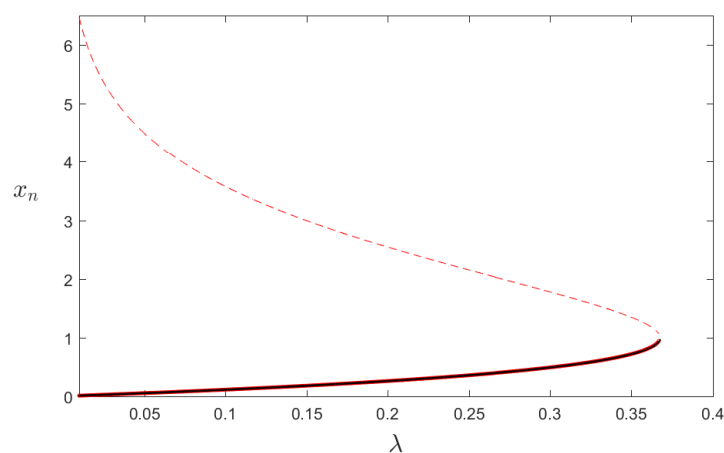


Figura 1.3: Bifurcación silla nodo para la familia exponencial

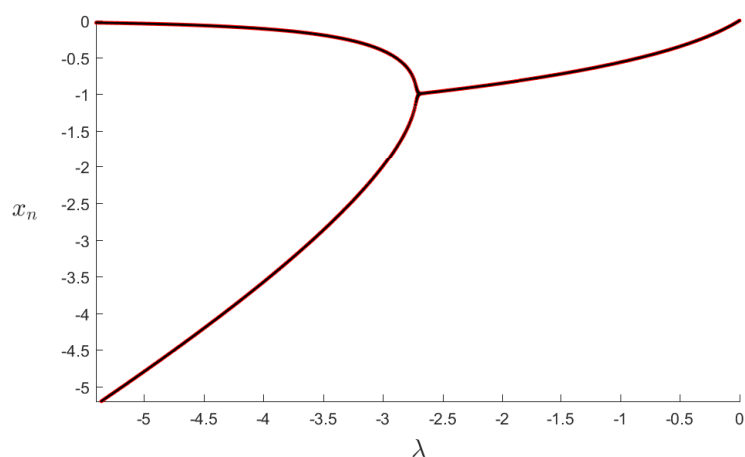


Figura 1.4: Doblamiento de período para la familia exponencial

Ejemplo 10. Ahora considere la familia cuadrática definida por:

$$F(x) = \mu x(1 - x), \quad x, \mu \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Esta familia presenta una bifurcación en $\mu = 1$, cuando $\mu = 1$ el mapa tiene solo un punto fijo no hiperbólico, en caso contrario tiene dos puntos fijos cuya estabilidad depende del signo del producto de μ con el punto, también presenta doblamiento de período, como se muestra en la figura 1.5.

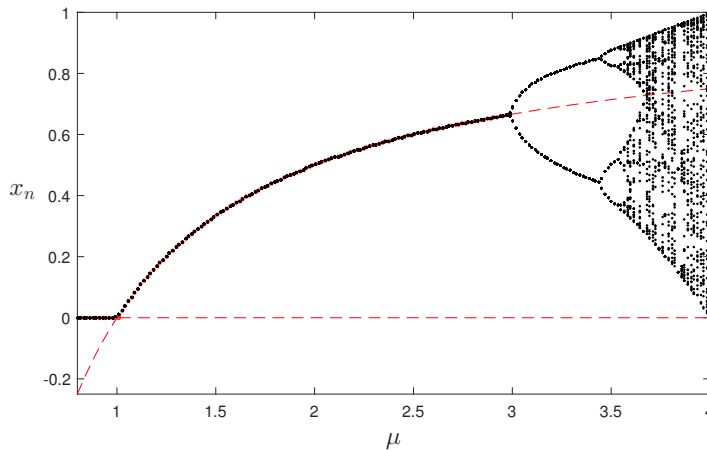


Figura 1.5: Diagrama de bifurcación para la familia cuadrática

Note que esta familia se diferencia de la familia exponencial por que siempre tiene 2 puntos fijos, pero su estabilidad cambia para distintos valores de μ , note que a diferencia de la familia exponencial, la familia cuadrática permite dar una formula explícita de sus punto fijos.

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = \frac{\mu - 1}{\mu} \quad (1.11)$$

Note que cuando $\mu = 1$, los dos puntos fijos colisionan, pero después se separan de nuevo y que para cierto valor de μ , el equilibrio x_2^ deja de ser estable y aparece un punto periódico de período 2, luego uno de período 4.*

Ejemplo 11.

$$X_{n+1} = T_\mu(x_n) = \begin{cases} \mu x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \mu(1 - x) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad (1.12)$$

este mapa tiene un único punto fijo para $\mu \in (0, 1)$ y para $\mu > 1$ el mapa T tiene dos y presenta doblamiento de periodo. Su punto fijo esta dado por:

$$x_1^* = 0, \\ x_2^* = \frac{\mu}{1+\mu} \text{ si } \mu > 1. .$$

El diagrama de bifurcación del mapa T se muestra en la Figura 1.6

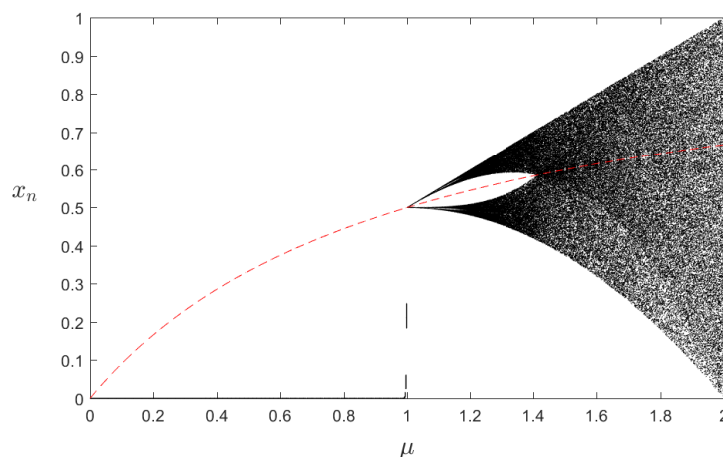


Figura 1.6: Diagrama de bifurcación del mapa tienda

Los mapas mostrados en los Ejemplos 9, 10 y 11 son mapas clásicos, con ellos se espera haber dado claridad al lector sobre el concepto de bifurcación.

Una bifurcación es suave si se presenta en mapas no definidos a trozos [24], como las bifurcaciones mostradas en los Ejemplos 9, 10 y 11. Por otra parte una bifurcación es no suave si solo se presenta en mapas discontinuos definidos a trozos, las *bifurcaciones por colisión de borde* son bifurcaciones no suaves que se presentan cuando un integrante de la órbita periódica colisiona con la zona de conmutación discontinua del mapa y genera cambios en dicha órbita.

Ejemplo 12. Considere el siguiente mapa lineal a trozos de dimensión uno con un parámetro

$$x_{n+1} = f(x_n, \alpha) = \begin{cases} f_L(x_n, \alpha) = \frac{1}{2}x_n + \alpha, & \text{si } x_n \geq 0, \\ f_R(x_n, \alpha) = \frac{1}{2}x_n + \frac{2}{3}, & \text{si } x_n < 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

la zona de conmutación del mapa f es discontinua si $\alpha \neq \frac{2}{3}$.

Note que $\left\{ \frac{12\alpha+4}{9}, \frac{6\alpha+8}{9} \right\}$ es una órbita periódica del mapa f para valores de α dentro del intervalo $\left(\frac{-4}{3}, \frac{-1}{3} \right)$, pero cuando $\alpha = \frac{-4}{3}$ o $\alpha = \frac{-1}{3}$ alguno de los integrantes de la órbita periódica colisiona con la zona de conmutación discontinua, la órbita desaparece pues deja de ser admisible.

El Ejemplo 12 es el ejemplo de una bifurcación por colisión de borde, para mas detalles ver [16, 24]. La bifurcación que se busca detectar en este trabajo es una bifurcación por colisión de borde de codimensión dos llamada *bifurcación big bang*, que será estudiada en el Capítulo 2. A continuación se

presenta el mapa estudiado en [6, 7] en el que se reportó por primera vez una bifurcación de codimensión dos que implica la existencia de un punto en un espacio dos paramétrico en el que colisionan infinitas curvas de bifurcación.

$$x_{n+1} = f(x_n, a, b, c) = \begin{cases} f_L(x_n, b, c) = bx_n + c, & \text{si } x_n < 0, \\ f_R(x_n, a) = x_n - a, & \text{si } x_n \geq 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

El mapa (1.14) tiene la zona de conmutación $x = 0$ discontinua, ya que $f_L(0) \neq f_R(0)$. A continuación se muestran dos bifurcaciones por colisión de borde que presenta este mapa llamadas *adición de periodo* y *bifurcación big bang*

Ejemplo 13. *La adición de periodo se obtiene variando uno de los parámetros del mapa, en el caso del mapa (1.14) se varia el parámetro c . Esta bifurcación implica que si el mapa alcanza una órbita periódica de periodo n para un valor $c = c_0$ y una órbita de periodo m para un valor $c = c_1$, con $c_0 < c_1$, entonces existe un valor $c_* \in [c_0, c_1]$ para el cual el mapa tiene una órbita de periodo $n + m$.*

Ahora analice el punto fijo del mapa f_L , dado por

$$x_L^* = \frac{c}{1-b}, \quad (1.15)$$

Note que si se toma $b < 1$, el punto fijo será virtual para valores positivos de c y si tomamos $c < 1$ este punto fijo también será estable.

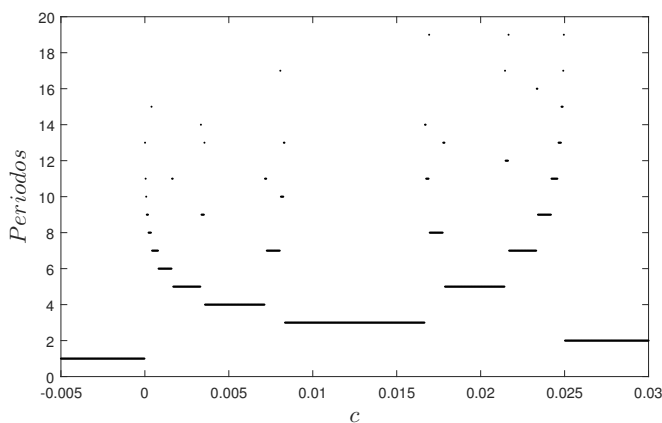


Figura 1.7: Diagrama de periodos del mapa (1.14) con los parámetros $b = 0,5$, $a = 0,05$ y variando el parámetro c .

El gráfico de la Figura 1.7 es un diagrama de periodos, un gráfico que muestra el valor de los periodos de las órbitas periódicas alcanzadas por el mapa para cada valor del parámetro que se mueve c en este caso.

La Figura 1.7, nos permite concluir que el mapa (1.14) presenta una bifurcación de tipo adición de periodo para cierto rango de valores del parámetro c .

En la Figura 1.8 se muestra el diagrama de bifurcación del mapa (1.14) para el rango de valores de c usado en la Figura 1.7. En este diagrama también se puede observar la adición de periodo que presenta el mapa (1.14).

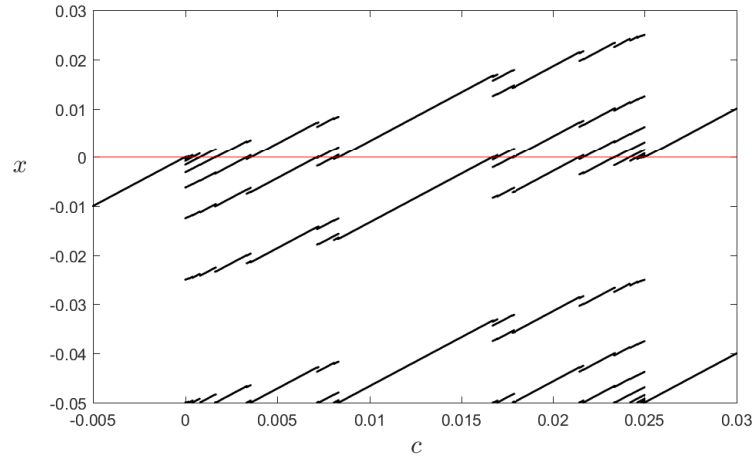


Figura 1.8: Diagrama de bifurcación del mapa (1.14) con los parámetros $b = 0,5$, $a = 0,05$ y variando el parámetro c .

Ahora se mostrará que el origen del plano de parámetros (c, a) es un punto en el que se intersecan infinitas curvas de bifurcación, en otras palabras es un punto de bifurcación big bang, ver Capítulo 2.

Ejemplo 14. Para empezar se tomara la sustitución de los parámetros a y c por $r \sin \theta$ y $r \cos \theta$ respectivamente, con $r > 0$ y $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Proposición 1. El mapa f de (1.14) satisface la siguiente propiedad de homotecia

$$f(r\mathbf{x}, r, \theta, b) = rf(\mathbf{x}, 1, \theta, b), \quad (1.16)$$

La prueba de esta proposición es trivial, ya que una vez hecha la sustitución solo debe factorizar r . Como una consecuencia directa de la Proposición 1 se tiene el siguiente resultado para las órbitas del mapa (1.14).

Proposición 2. *Las órbitas de cada \mathbf{x} bajo el mapa f de (1.14) satisfacen la siguiente igualdad*

$$O(\mathbf{x}, r, \theta, b) = rO(r^{-1}\mathbf{x}, 1, \theta, b), \quad (1.17)$$

Por lo que estudiar el comportamiento del mapa f puede reducirse a estudiar el caso particular $r = 1$. Este resultado permite saber que las curvas de bifurcación en este espacio de parámetros son líneas rectas que cortan en el origen. Para estudiar la aparición de la bifurcación big bang en el mapa (1.14), se muestra el diagrama de la Figura 1.9

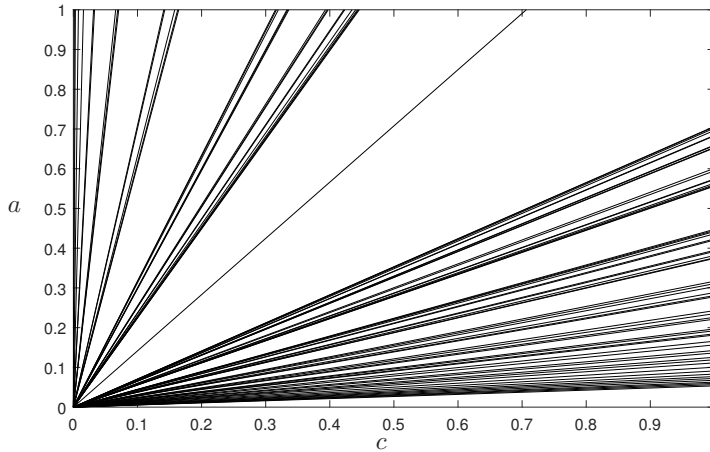


Figura 1.9: Plano de parámetros (c, a) , las líneas rectas o curvas de codimensión uno que se intersectan en el origen separan las regiones del primer cuadrante en las que las órbitas periódicas del mapa (1.14) tienen el mismo período.

1.3. Las formas canónicas

En esta sección se presentarán las formas canónicas definidas en [13] y [14] para un sistema de ecuaciones diferenciales lineal a trozos o PWL por sus siglas en inglés (piecewise linear), cuya zona de conmutación es la recta $e_1^T \mathbf{x} = 0$, con e_1 el primer vector canónico de \mathbb{R}^2 y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Los sistemas PWL son de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) = \begin{cases} F_L(\mathbf{x}), & \text{si } \mathbf{x} \in \Sigma_L, \\ F_R(\mathbf{x}), & \text{si } \mathbf{x} \in \Sigma_R, \end{cases} \quad (1.18)$$

donde los campos vectoriales F_L y F_R están definidos por:

$$F_L(\mathbf{x}) = A_L \mathbf{x} + \mathbf{b}_L, \quad F_R(\mathbf{x}) = A_R \mathbf{x} + \mathbf{b}_R,$$

con $A_{\{L,R\}}$ matrices de orden 2, $\mathbf{b}_{\{L,R\}} \in \mathbb{R}^2$ y las zonas Σ_L, Σ_R están dadas por:

$$\begin{aligned} \Sigma_L &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : e_1^T \mathbf{x} < 0\}, \\ \Sigma_R &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : e_1^T \mathbf{x} \geq 0\}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

Se dice que el sistema (1.18) es continuo si todo $y \in \mathbb{R}$ satisface $F_L(0,y) = F_R(0,y)$, en este caso se asume que el sistema (1.18) es discontinuo.

1.3.1. La forma Canónica:

En [13] se presenta por primera vez el siguiente homomorfismo para un PWL de la forma (1.18) que cumpla con $a_{12}^L a_{12}^R > 0$ para llevar al sistema a una forma canónica:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^L & -a_{12}^L \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ b_1^L \end{bmatrix}, & \mathbf{x} \in \Sigma_L, \\ \frac{a_{12}^L}{a_{12}^R} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^R & -a_{12}^R \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ b_1^L \end{bmatrix}, & \mathbf{x} \in \Sigma_R. \end{cases} \quad (1.20)$$

Al aplicar (1.20) a un PWL de la forma (1.18), se llega al siguiente sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} F_L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} T_L & -1 \\ d_L & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ c_L \end{bmatrix}, & \text{si } \mathbf{x} \in S_L, \\ F_R(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} T_R & -1 \\ d_R & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} -b \\ c_R \end{bmatrix}, & \text{si } \mathbf{x} \in \Sigma_R, \end{cases} \quad (1.21)$$

donde $T_{\{L,R\}}$ y $d_{\{L,R\}}$ son las trazas y determinantes de las matrices $A_{\{L,R\}}$ respectivamente y los parámetros c_L, c_R y b están definidos por

$$\begin{aligned} c_L &= a_{12}^L b_2^L - a_{22}^L b_1^L, & c_R &= \frac{a_{12}^L}{a_{12}^R} (a_{12}^R b_2^R - a_{22}^R b_1^R), \\ b &= \frac{a_{12}^L}{a_{12}^R} b_1^R - b_1^L. \end{aligned}$$

Note que (1.21) y (1.18) son sistemas topológicamente equivalentes debido a que sus órbitas se corresponden bajo el homomorfismo $H(x)$ definido en (1.20) (ver [22, 33]). Por lo tanto estudiar el comportamiento del sistema (1.18) es equivalente a estudiar el comportamiento del sistema (1.21), solo que con siete parámetros en vez de doce.

Ahora se presentará un breve análisis de la estabilidad de la zona de conmutación de (1.21), para eso es necesario conocer el comportamiento de los campos $F^{\{L,R\}}$ en dicha zona (Σ):

$$(\mathbf{e}_1^T F^L(\mathbf{x}))(\mathbf{e}_1^T F^R(\mathbf{x})) \leq 0. \quad (1.22)$$

Ahora considerando el parámetro b mostrado en (1.21), definimos el conjunto de deslizamiento dado por:

$$\Sigma^s = \{\mathbf{x} \in \Sigma : \mathbf{e}_2^T \mathbf{x} b > 0, |y| < |b|\}. \quad (1.23)$$

Para b positivo el conjunto definido en (1.23) será inestable y para b negativo estable.

1.3.2. La forma canónica normalizada:

En [14] se define un cambio de variable que convierte a la forma canónica (1.21) en un nuevo sistema, la forma canónica normalizada, dichas variables son:

$$\begin{aligned} \Delta_j &= (T_j)^2 - 4d_j, \\ m_j &= \begin{cases} i, & \text{si } \Delta_j < 0, \\ 0, & \text{si } \Delta_j = 0, \\ 1, & \text{si } \Delta_j > 0, \end{cases} \\ \omega_j &= \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{|\Delta_j|}, & \Delta_j \neq 0, \\ 1, & \Delta_j = 0, \end{cases} \\ a_j &= \frac{c_j}{\omega_j}, \\ \gamma_j &= \frac{T_j}{2\omega_j}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

con $j \in \{L, R\}$.

Al transformar las coordenadas (x, y, t) a $(\frac{x}{\omega}, y, \frac{t}{\omega})$ se obtiene la forma canónica normalizada definida por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} F_L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2\gamma_L & -1 \\ \gamma_L^2 - m_L^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ a_L \end{bmatrix}, & \text{si } e_1^T \mathbf{x} < 0, \\ F_R(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2\gamma_R & -1 \\ \gamma_R^2 - m_R^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} -b \\ a_R \end{bmatrix}, & \text{si } e_1^T \mathbf{x} \geq 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Note que la traza y determinante de las matrices en la forma canónica normalizada están dadas por $2\gamma_j$ y $D_j = \gamma_j^2 - m_j^2$, $j \in \{L, R\}$ respectivamente, y que sus valores propios son:

$$\lambda_j = \gamma_j \pm m_j. \quad (1.26)$$

Lo que le da al parámetro modal m_j el papel de controlar la naturaleza topológica del equilibrio del campo vectorial $F_j(\mathbf{x})$ del sistema (1.25) siempre que este exista, es decir su comportamiento y junto al parámetro γ_j su estabilidad. En la tabla 1.1 se muestra el comportamiento de los equilibrios del sistema dependiendo de los parámetros γ_j y m_j , $j \in \{L, R\}$ y en la tabla 1.2 se muestra su estabilidad dependiendo de los mismos parámetros:

Casos de la forma canónica normalizada			
$ \gamma_j , m_j$	1	0	i
$ \gamma_j = 0$	Silla	No hiperbólico	Centro
$0 < \gamma_j < 1$	Silla	Nodo	Foco
$ \gamma_j = 1$	No hiperbólico	Nodo	Foco
$ \gamma_j > 1$	Nodo	Nodo	Foco

Tabla 1.1: Comportamiento de los equilibrios en la forma canónica normalizada.

Casos de la forma canónica normalizada			
γ_j, m_j	1	0	i
$\gamma_j < -1$	Estable	Estable	Estable
$-1 < \gamma_j < 0$	Semiestable	Estable	Estable
$\gamma_j = 0$	Semiestable	No hiperbólico	Estable
$0 < \gamma_j < 1$	Semiestable	Inestable	Inestable
$\gamma_j > 1$	Inestable	Inestable	Inestable

Tabla 1.2: Estabilidad de los equilibrios en la forma canónica normalizada.

Finalmente es importante aclarar que el conjunto de deslizamiento definido en (1.23) de los sistemas (1.21) y (1.25) tienen la misma estabilidad.

1.4. Mapas estroboscópicos

El concepto de mapa estroboscópico es fundamental para el desarrollo de este trabajo, pues es este el tipo de mapa que se estudiará en el capítulo 2 y en el que se buscará la presencia de la bifurcación big bang .

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales (1.1) con $\mathbf{x} \in S^+$, $N \in \mathbb{N}$, $S^+ \subset \mathbb{R}^N$ y $f : S^+ \rightarrow \mathbb{R}^N \in C^1(\mathbb{R}^N)$.

suponga que $T > 0$, la sección de Poincaré Π_s se define como:

$$\Pi_s = \{\mathbf{x} : s := t \bmod(T) = s_0\} \cap S^+. \quad (1.27)$$

El mapa estroboscópico de Poincaré $P : \Pi_s \rightarrow \Pi_s$ se define como

$$P_s(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{x}(t_0 + T). \quad (1.28)$$

El mapa estroboscópico es un *salto* en el tiempo de la variable \mathbf{x} , este tipo de mapas se usan frecuentemente para modelar de forma adecuada distintos fenómenos de electrónica, economía, entre otras disciplinas [31, 15, 28, 30, 29, 3].

Capítulo 2

Mapas estroboscópicos y bifurcación big bang

Este capítulo se divide en tres secciones, en la primera sección se presenta la caracterización de la matriz exponencial del mapa estroboscópico asociado a la forma canónica normalizada de un sistema PWL utilizada en [2]. En la segunda sección se reproducen los resultados reportados en [2] y [12] que motivaron este estudio. Finalmente en la tercera sección se presenta un estudio del mapa estroboscópico siguiendo la metodología empleada en [2] y se muestra la presencia de la bifurcación big bang en este mapa.

2.1. La matriz exponencial

En esta sección se toman algunas funciones definidas en [2] que permiten el estudio de la matriz exponencial $\Phi = e^{At}$ de un mapa estroboscópico asociado a un sistema PWL en su forma canónica normalizada, ver (1.25).

Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere las funciones $C_k(mt)$ y $S_k(mt)$ definidas por:

$$C_k(mt) = \cosh kmt, \quad S_k(mt) = \begin{cases} \frac{\sinh kmt}{m}, & \text{si } m \neq 0, \\ kt, & \text{si } m = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

Estas funciones pueden ser reescritas en términos del parámetro m de la forma que se muestra en (2.2):

$$C_k(mt) = \begin{cases} \cosh kt, & \text{si } m = 1, \\ 1, & \text{si } m = 0, \\ \cos kt & \text{si } m = i, \end{cases}, \quad S_k(mt) = \begin{cases} \sinh kt, & \text{si } m = 1, \\ kt, & \text{si } m = 0, \\ \sin kt & \text{si } m = i, \end{cases} \quad (2.2)$$

Para aligerar la notación, se definen las siguientes funciones:

$$\mu_k^\pm(mt) = C_k(mt) \pm \gamma S_k(mt), \quad (2.3)$$

Note que para todo $k \in \mathbb{N}$ las funciones definidas anteriormente satisfacen las siguientes identidades:

$$S_1(kmt) = S_k(mt), \quad C_1(kmt) = C_k(mt), \quad \mu_1^\pm(kmt) = \mu_k^\pm(mt). \quad (2.4)$$

Proposición 3. Usando las identidades definidas en (2.2), la matriz exponencial $\Phi = e^{At}$ puede reescribirse como

$$\Phi = \Phi(mt) = e^{t\gamma} \begin{bmatrix} \mu_1^+(mt) & -S_1(mt) \\ DS_1(mt) & \mu_1^-(mt) \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

Donde $D = \gamma^2 - m^2$,

Para aligerar la notación se escribirá a conveniencia de la siguiente forma:

$$\Phi = \Phi(mt), \quad C_k = C_k(mt), \quad S_k = S_k(mt), \quad \mu_k^\pm = \mu_k^\pm(mt), \quad (2.6)$$

Usando (2.4) y (2.5) se puede escribir la k -ésima potencia de la matriz $\Phi = e^{At}$ de la forma:

$$\Phi^k = \Phi(kmt) = e^{kt\gamma} \begin{bmatrix} \mu_k^+ & -S_k \\ DS_k & \mu_k^- \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Proposición 4. Dado $m \in \{0, 1, i\}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $D = \gamma^2 - m^2$, considere las funciones C_k , S_k y μ_k^\pm definidas en (2.2), (3.12). Para todo $k \geq 1$ se satisfacen las siguientes identidades

$$\mu_k^+ \mu_k^- + (\gamma^2 - m^2) S_k^2 = 1, \quad (2.8)$$

A continuación se presenta un resultado que permite conocer algunas propiedades de la k -ésima potencia de la matriz Φ (2.7):

Proposición 5. [2] *Considere la función C_k definida en (2.2) y la matriz (2.5), para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple:*

a) *La traza y el determinante de la matriz (2.7) esta dada por:*

$$\det(\Phi^k) = e^{2k\gamma t}, \quad \text{tr}(\Phi^k) = 2e^{k\gamma t}C_k. \quad (2.9)$$

b) *El polinomio característico de la matriz (2.7) esta dado por:*

$$\det(\Phi^k - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda 2e^{k\gamma t}C_k + e^{2k\gamma t}. \quad (2.10)$$

Además sus valores propios están dados por $\lambda_m^\pm = e^{kt(\gamma \pm m)}$ y en el caso que $\gamma^2 - m^2 > 0$ y $\gamma < 0$ se tiene que $|\lambda_m^\pm| < 1$.

c) *La matriz (2.7) es invertible y su matriz inversa puede ser escrita como:*

$$\Phi^{-k} = \Phi(kmt) = e^{-kt\gamma} \begin{bmatrix} \mu_k^- & S_k \\ -DS_k & \mu_k^+ \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

d) *Si los valores propios de la matriz (2.7) son diferentes de 1 entonces la matriz inversa de $\Phi^k - I$ puede escribirse de la forma:*

$$(\Phi^k - I)^{-1} = \frac{1}{d(kt, \gamma)} \begin{bmatrix} \mu_k^- e^{k\gamma t} - 1 & S_k e^{k\gamma t} \\ -S_k e^{k\gamma t} D & \mu_k^+ e^{k\gamma t} - 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

donde la función $d(kt, \gamma)$ esta dada por:

$$d(kt, \gamma) = \det(\Phi^k - I) = 1 - e^{2k\gamma t}C_k + e^{2k\gamma t}. \quad (2.13)$$

Demostración. a) *Tomando la traza de la matriz (2.5) $\text{tr}(\Phi^k) = e^{kt\gamma}(\mu_k^+ + \mu_k^-)$ y usando la definición de μ_k^\pm se obtiene el primer resultado, el segundo resultado se obtiene tomando el determinante de la matriz (2.5) $\det(\Phi^k) = e^{2kt\gamma}(\mu_k^+ \mu_k^- + (\gamma^2 - m^2)S_k^2)$ y las identidades (2.8)*

b) *Tomando $(\Phi^k) = 2e^{k\gamma t}C_k$ y $\det(\Phi^k) = e^{2k\gamma t}$, el polinomio característico de la matriz (2.5) esta dado por $\det(\Phi^k - \lambda I_2) = \lambda^2 - 2C_k e^{kt\gamma} \lambda + e^{2kt\gamma}$. Los valores propios que corresponden a las raíces del polinomio característico estan dados por $\lambda = e^{kt(\gamma \pm m)}$.*

- c) El determinante de la matriz (2.7) es distinto de cero para cualquier valor de k, γ y t , por lo que la matriz es invertible. Para calcular la inversa basta con usar la siguiente formula para matrices invertibles de orden dos

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

- d) Suponga que $k \geq 1$ y que 1 no es un valor propio de la matriz (2.5), la matriz $\Phi^k - I_2$ es:

$$\Phi^k - I_2 = \begin{bmatrix} e^{kt\gamma} \mu_k^+ - 1 & -S_k \\ (\gamma^2 - m^2)S_k & e^{kt\gamma} \mu_k^- - 1 \end{bmatrix}.$$

Su determinante esta dado por:

$$d(kt, \gamma) = e^{2kt\gamma} - 2C_k e^{kt\gamma} + 1.$$

Con lo que su inversa es:

$$(\Phi^k - I_2)^{-1} = \frac{1}{d(kt, \gamma)} \begin{bmatrix} e^{kt\gamma} \mu_k^- - 1 & S_k \\ -(\gamma^2 - m^2)S_k & e^{kt\gamma} \mu_k^+ - 1 \end{bmatrix}.$$

La función $d(kt, \gamma)$ puede ser reescrita como:

$$d(kt, \gamma) = \begin{cases} e^{2k\gamma t} - e^{2k\gamma t} \cos kt + 1, & \text{si } m = i, \\ e^{2k\gamma t} - e^{2k\gamma t} \cosh kt + 1, & \text{si } m = 1, \\ e^{2k\gamma t} - e^{2k\gamma t} + 1, & \text{si } m = 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

En la Figura 2.1 se muestra la función d (2.14) para $k = 1$ y $t = 0,5$, la figura muestra los casos $m = 0, 1, i$ respectivamente.

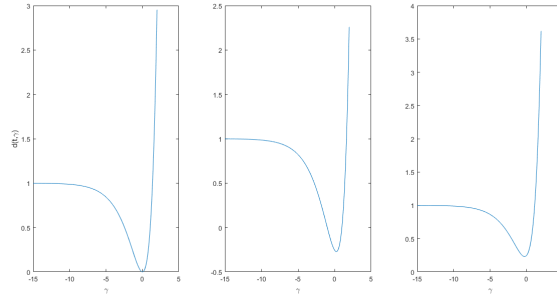


Figura 2.1: Función d definida en (2.14) con $k = 1$ y $t = 0,5$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ y $t > 0$, es suficiente estudiar d con $k = 1$, ver la figura 2.1. A continuación hay unas propiedades de la función $d(t, \gamma)$.

Proposición 6. *Dado $m \in \{0, 1, i\}$ y $t > 0$, considere la función d definida en (2.14) con $k = 1$. Para todo γ, m excepto el caso $\gamma = 0$ y $m = i$ se cumple:*

a)

$$\operatorname{sgn}(d(t, \gamma)) = \operatorname{sgn}(\gamma^2 - m^2).$$

b) Para todo $t > 0$ se tiene que:

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} (d(t, \gamma)) = 1, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (d(t, \gamma)) = \infty.$$

Demostración. a) Para probar que $\operatorname{sgn}(d(t, \gamma)) = \operatorname{sgn}(\gamma^2 - m^2)$, basta con probar que su producto siempre es positivo:

Si $\gamma^2 - m^2 > 0$ entonces $|\gamma| > |m|$, por lo tanto $\cosh t\gamma - \cosh tm > 0$, multiplicando esta desigualdad por $2e^{t\gamma}$ se obtiene que $0 < d(t, \gamma)$. Los casos $\gamma^2 - m^2 < 0$ y $\gamma^2 - m^2 = 0$, se prueban análogamente.

b) La prueba es trivial, ya que $t > 0$.

Por conveniencia se escribirá la función $d(kt, \gamma)$ de la siguiente forma:

$$d_k = d(kt, \gamma). \quad (2.15)$$

2.2. Motivación

En el capítulo anterior se presentó el mapa (1.14), que fue estudiado en [6]. Este mapa presentó la existencia de un punto en un espacio dos y

trés paramétrico en el que se intersecan infinitas líneas de bifurcación, este comportamiento fue definido en este trabajo como bifurcación big bang. Más adelante en [7] se estudia este fenómeno en mapas de dimensión uno y se clasificó en tres tipos: la bifurcación big bang con incremento de periodo puro, la bifurcación big bang de incremento de periodo con co-existencia de atractores y la bifurcación con adición de periodo. Después en [8], el autor y sus colaboradores extienden el concepto de bifurcación big bang hasta definir un punto de bifurcación big bang de codimensión N , el cual es un punto en un espacio de parámetros de esta dimensión en el que se intersecan infinitas curvas de bifurcación de condimensión $N - 1$. Posterior a este estudio, en [5] se plantean algunas condiciones para la presencia de la bifurcación big bang de tipo incremento de periodo en mapas de dimensión uno. Ejemplos de los tipos de bifurcación big bang con incremento de periodo puro, incremento de periodo con co-existencia de atractores y la bifurcación con adición de periodo se muestran en las Figuras 2.2 2.3 y 2.4 respectivamente.

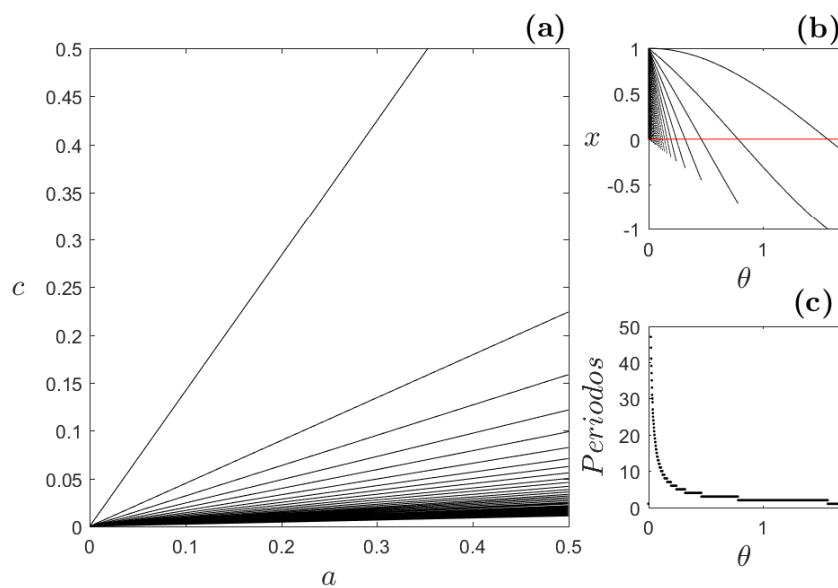


Figura 2.2: (a) Plano (a, c) , las líneas separan las regiones en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ cuyas órbitas periódicas tienen el mismo periodo. (b) Diagrama de bifurcación del mapa f definido en (1.14) con el parámetro $b = 0$ variando el parámetro θ . (c) Periodos de las órbitas de (b) calculados numéricamente.

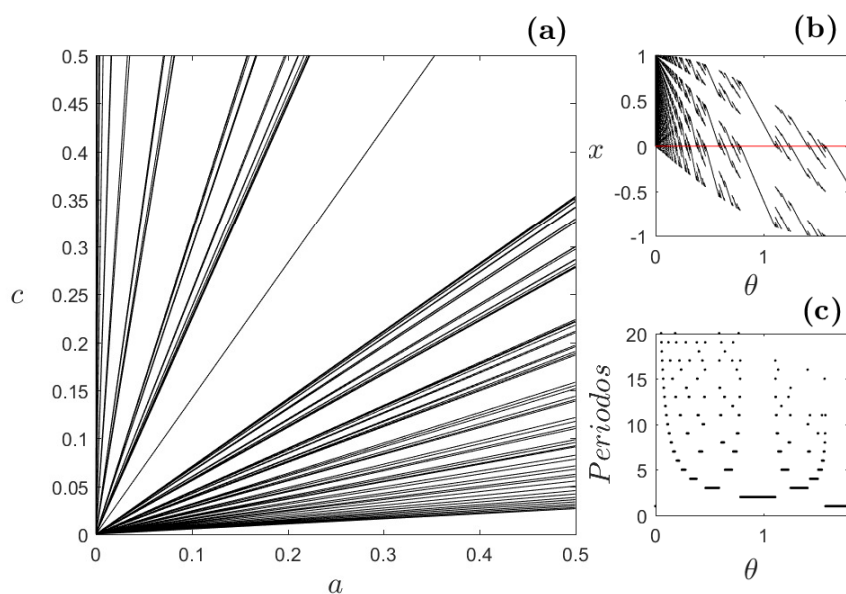


Figura 2.3: (a) Plano (a, c) , las líneas separan las regiones en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ cuyas órbitas periódicas tienen el mismo periodo. (b) Diagrama de bifurcación del mapa f definido en (1.14) con el parámetro $b = 0,5$ variando el parámetro θ . (c) Periodos de las órbitas de (b) calculados numéricamente.

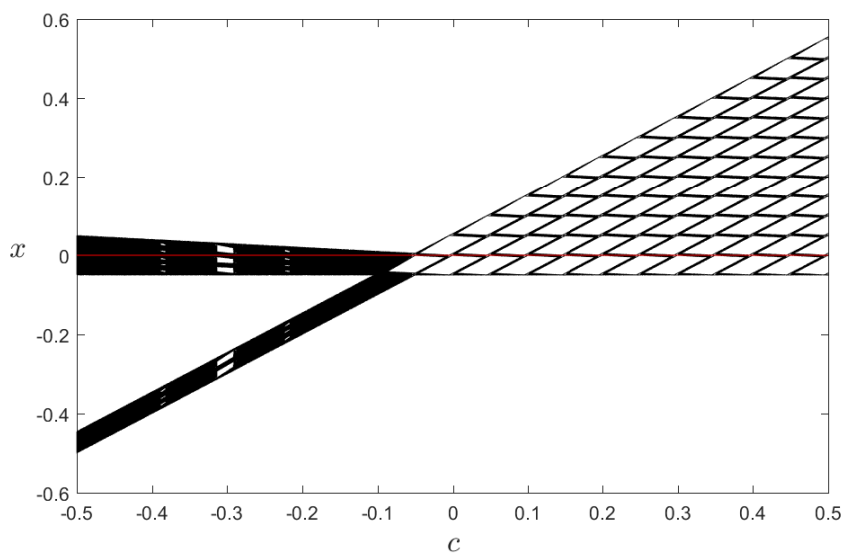


Figura 2.4: Diagrama de bifurcación del mapa f definido en (1.14) con la configuración de parámetros $a = 0,05$, $b = -1,1$ y variando el parámetro c

En la Figura 2.2 se observa la colisión de infinitas curvas de codimensión uno en el origen del espacio de parámetros (a, c) , el diagrama de periodos muestra que el periodo de las órbitas alcanzadas se incrementa a medida que el parámetro θ tiende a cero. En la Figura 2.3 también se muestra la colisión de infinitas curvas de colisión uno en el origen del espacio de parámetros (a, c) , pero en este caso los periodos de las órbitas alcanzadas no solo se incrementan a medida que el parámetro θ tiende a cero sino que también entre los valores de θ para los que se alcanza una órbita de periodo n y otra de periodo m existe un valor del parámetro para el que se alcanza una órbita de periodo $n + m$, este comportamiento se conoce como adición de periodo.

La Figura 2.4 muestra la colisión de dos bandas caóticas que colisionan para un valor de c y despues se presenta una estructura conocida como doblamiento de periodo, para más detalles ver [6, 7].

El salto de dimensión de uno a dos representa un problema diferente al estudiado en los trabajos mencionados anteriormente, en [17] se da un riguroso estudio de la bifurcación big bang en mapas de dimensión dos. La presencia de este fenomeno en mapas de dimensión dos ha sido detectada en algunos trabajos. En [12] muestran la presencia de un punto de bifurcación big bang de codimensión dos en un sistema de dimensión dos con una zona de conmutación lineal. En [3] se muestra la existencia de un punto de bifurcación big bang en un mapa estroboscópico que modela el comportamiento de un convertidor DC-DC Boost. En [2], se conjetura la presencia de un punto de bifurcación big bang de codimensión dos en la familia de mapas a la que pertenece el mapa estudiado en [12] (considerando ambas matrices iguales), finalmente en [4] se continua el estudio de [2] sobre mapas de dimensión dos y la presencia de puntos de bifurcación big bang de codimesión dos en estos.

Siguiendo a [12], considere el siguiente sistema de dimensión dos:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A\mathbf{x} + \mathbf{b}, & \text{si } \sigma(\mathbf{x}) \geq 0, \\ A\mathbf{x} - \mathbf{b}, & \text{si } \sigma(\mathbf{x}) < 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

donde la matriz A y el vector \mathbf{b} estan definidos como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ bk \end{bmatrix},$$

y la zona de conmutación $\sigma(\mathbf{x})$ esta dada por:

$$\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_1^T \mathbf{x} + c\mathbf{e}_2^T \mathbf{x} - y_c. \quad (2.17)$$

con \mathbf{e}_j , $j \in \{1, 2\}$ los vectores canónicos de \mathbb{R}^2 y a_0, a_1, b, c, k, y_c números reales.

Proposición 7. *El sistema (2.16) es topológicamente equivalente al siguiente sistema:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} F_R(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}_R, & \text{si } \mathbf{e}_1^T \mathbf{x} \geq 0, \\ F_L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}_L, & \text{si } \mathbf{e}_1^T \mathbf{x} < 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

donde la matriz A y los vectores \mathbf{b}_R y \mathbf{b}_L estan dados por:

$$A = \begin{bmatrix} -ca_0 & a_0c^2 - a_1c + 1 \\ -a_0 & ca_0 - a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_R = \begin{bmatrix} bkc - ca_0y_c \\ bk - a_0y_c \end{bmatrix}, \mathbf{b}_L = \begin{bmatrix} -bkc - ca_0y_c \\ -bk - a_0y_c \end{bmatrix},$$

Demostración. *Para la prueba de la proposición 2.16, basta tomar el siguiente cambio de coordenadas y aplicarlo al sistema (2.16):*

$$\bar{\mathbf{x}} = h(\mathbf{x}) = \bar{A}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ y_c \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Despejando \mathbf{x} se obtiene

$$\mathbf{x} = \bar{A}^{-1}\bar{\mathbf{x}} + \bar{A}^{-1}\bar{\mathbf{b}},$$

Derivando a ambos lados del campo vectorial correspondiente a la zona del plano $\sigma(\mathbf{x}) \geq 0$ y acomodando variables se obtiene

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{A}\bar{A}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{x}}} + \bar{A}\bar{A}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{b}}} + \bar{A}\dot{\mathbf{b}},$$

tomando $A = \bar{A}\bar{A}^{-1}$ y $\mathbf{b}_R = \bar{A}\bar{A}^{-1}\bar{\mathbf{b}} + \bar{A}\dot{\mathbf{b}}$ se obtiene el campo vectorial $F_R(\mathbf{x})$, análogamente se obtiene el campo vectorial $F_L(\mathbf{x})$.

Fijando el periodo de conmutación en $t > 0$, el mapa estroboscópico asociado al sistema (2.18) se presenta a continuación:

$$\mathbf{x}_{n+1} = P(\mathbf{x}_n; t) = \begin{cases} P_R(\mathbf{x}_n; t) = e^{At}\mathbf{x} + (e^{At} - I)A^{-1}\mathbf{b}_R, & \text{si } \mathbf{e}_1^T \mathbf{x} \geq 0, \\ P_L(\mathbf{x}_n; t) = e^{At}\mathbf{x} + (e^{At} - I)A^{-1}\mathbf{b}_L, & \text{si } \mathbf{e}_1^T \mathbf{x} < 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

Note que sus puntos fijos son:

$$\mathbf{x}_R^* = -A^{-1}\mathbf{b}_R \qquad \mathbf{x}_L^* = -A^{-1}\mathbf{b}_L,$$

los cuales son virtuales si $\mathbf{e}_1^T \mathbf{x}_R^* < 0$ y $\mathbf{e}_1^T \mathbf{x}_L^* > 0$.

En [12], se estudia numéricamente el plano de parámetros (y_c, k) del mapa (2.20) mediante una sustitución de estos parámetros por coordenadas polares, demostrando de esta forma que las curvas de co-dimensión uno en el espacio dos paramétrico (y_c, k) son líneas rectas que se intersecan en el origen. En este espacio detectan la presencia de infinitas órbitas periódicas de periodos arbitrariamente grandes cerca del punto $(0, 0)$, lo que indica la presencia de un punto de bifurcación big bang de codimensión dos. Estas órbitas periódicas se detectaron mapas que corresponden a la discretización estroboscópica de sistemas a tiempo continuo cuyo conjunto de deslizamiento Σ^s (ver 1) es atractivo y ambos puntos fijos son virtuales, ver Figura 2.5.

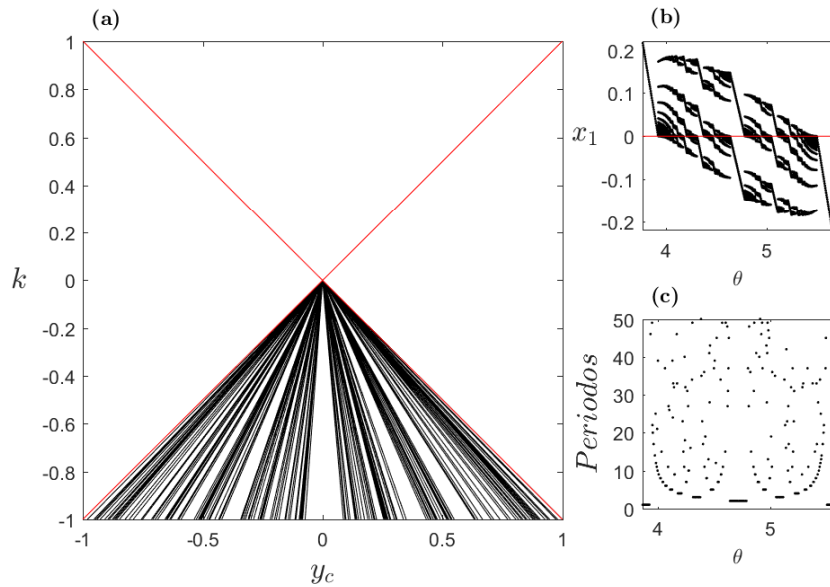


Figura 2.5: **(a)** Plano (y_c, k) , las líneas separan las regiones en el intervalo $[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ cuyas órbitas periódicas tienen el mismo periodo. **(b)** Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (2.20) con los parámetros $a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $b = 1$, $c = 1,5$ y $t = 0,1$ variando el parámetro θ . **(c)** Periodos de las órbitas de **(b)** calculados numéricamente.

Como resultado de este estudio, los autores de [12] conjeturan que siempre y cuando el mapa (2.20) cumpla con tener ambos puntos fijos virtuales, los valores propios de la matriz $e^{\mathbf{A}t}$ son menores que uno y un conjunto de deslizamiento Σ^s atractivo, este mapa tendrá un punto de bifurcación big bang en $(y_c, k) = (0, 0)$.

Note que el mapa (2.20) cumple con los requisitos para ser llevado a la formas canónicas definidas en [13, 14]. En [2] se estudia de forma general

el mapa estroboscópico asociado a esta forma canónica normalizada y se presenta una conjetura respecto a la presencia de la bifurcación big bang en este mapa.

Siguiendo a [2], considere el siguiente mapa estroboscópico

$$\mathbf{x}_{n+1} = P(\mathbf{x}_n; t) = \begin{cases} P_R(\mathbf{x}_n; t) = \Phi \mathbf{x} - (\Phi - I)A^{-1}\mathbf{b}_R, & \text{si } \mathbf{e}_1^T \mathbf{x} \geq 0, \\ P_L(\mathbf{x}_n; t) = \Phi \mathbf{x} - (\Phi - I)A^{-1}\mathbf{b}_L, & \text{si } \mathbf{e}_1^T \mathbf{x} < 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

donde $t > 0$, la matriz A y los vectores \mathbf{b}_R y \mathbf{b}_L están definidos como

$$A = \begin{bmatrix} 2\gamma & -1 \\ \gamma^2 - m^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_R = \begin{bmatrix} -b \\ a_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ a_L \end{bmatrix},$$

con los parámetros γ , m , b , c_L y c_R definidos en (1.25) y $\Phi = e^{At}$.

Los puntos fijos de este mapa son

$$\mathbf{x}_R^* = \frac{1}{\gamma^2 - m^2} \begin{bmatrix} a_R \\ b(\gamma^2 - m^2) + 2\gamma a_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_L^* = \frac{a_L}{\gamma^2 - m^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2\gamma \end{bmatrix},$$

El autor estudia el caso $\gamma < 0$ y $\gamma^2 - m^2 > 0$, lo que hace que los puntos fijos sean virtuales si $a_L > 0$ y $a_R < 0$.

Tomando una sustitución en coordenadas polares de los parámetros a_L y a_R a $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$, el autor muestra que las curvas de bifurcación en el espacio dos paramétrico (a_R, a_L) son líneas rectas que cortan el origen de este plano y llega al siguiente resultado.

Conjetura 1. *Dado $m \in \{0, 1\}$ y $0 < t < 1$. Considere el mapa P definido en (2.21), el plano dos paramétrico (a_R, a_L) y las funciones*

$$\begin{aligned} d_3(\gamma, t)h_3^{(2)}(\gamma, t) &= e^{4t\gamma}\mu_2^+ - e^{3t\gamma}\mu_3^+ - e^{t\gamma}\mu_1^- + 1, \\ d_3(\gamma, t)r_3^{(2)}(\gamma, t) &= e^{4t\gamma}S_2 - e^{3t\gamma}S_3 + e^{t\gamma}S_1, \\ d_3(\gamma, t) &= e^{6t\gamma} - 2C_3e^{3t\gamma} + 1, \end{aligned}$$

donde las funciones C_k , S_k y μ_k están definidas en (2.2) y (3.12) respectivamente. Para $\gamma + m < 0$ suficientemente pequeño y

$$b = \min \left\{ \frac{1}{\gamma + m}, F(\gamma, t) \right\},$$

con $F(\gamma, t)$ definida por

$$F(\gamma, t) = \frac{1}{D} \frac{2h_3^{(2)}(\gamma, t) - 1}{\sqrt{2}r_3^{(2)}(\gamma, t)},$$

el mapa estroboscópico P tiene un punto de bifurcación big bang de codimensión dos en $(a_R, a_L) = (0, 0)$.

Otro resultado aportado por [2] es el siguiente teorema que garantiza la existencia de una órbita de periodo dos en el mapa P definido en (2.21)

Teorema 4. Dado $m \in \{0, 1, i\}$, $0 < t < 1$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $D = \gamma^2 - m^2 > 0$ y $\gamma < 0$. Considere las funciones

$$\begin{aligned} d_2(\gamma)h_2^{(1)}(\gamma) &= e^{4t\gamma} - e^{3t\gamma}\mu_1^+ - e^{2t\gamma}\mu_2^- + e^{t\gamma}\mu_1^-, \\ d_2(\gamma)r_2^{(1)}(\gamma) &= e^{2t\gamma}S_2 - (e^{3t\gamma} + e^{t\gamma})S_2, \\ x_2^{(1)}(\theta) &= \frac{1}{D}(br_2^{(1)}(\gamma)D + (1 + h_2^{(1)}(\gamma))\sin\theta + h_2^{(1)}(\gamma)\cos\theta), \end{aligned}$$

donde la función d_2 esta definida en (2.13).

El mapa P satisface las siguientes afirmaciones

a) Si $x_2^{(1)}(\pi) \geq 0$ o equivalentemente, si existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$bDr_2^{(1)}(\gamma) - h_2^{(1)}(\gamma) \geq 0,$$

entonces el mapa P tiene una única y estable órbita de periodo dos para todo $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

b) Si $x_2^{(1)}(\pi) < 0$ y $x_2^{(1)}(\frac{3\pi}{4}) > 0$ o equivalentemente, si existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$bDr_2^{(1)}(\gamma) - h_2^{(1)}(\gamma) < 0, \quad 2bDr_2^{(1)}(\gamma) + \sqrt{2}(1 - 2h_2^{(1)}(\gamma)) > 0,$$

entonces existe un único $\beta \in [\frac{3\pi}{4}, \pi]$ tal que $x_2^{(1)}(\beta) = 0$ y para todo $\theta \in [\frac{3\pi}{2} - \beta, \beta]$ el mapa P tiene una única y estable órbita de periodo dos.

De los incisos **a** y **b** del teorema 4 se definen las siguientes funciones que dividen el plano en tres regiones llamadas Δ y Δ_β , en las que se satisfacen las condiciones de los incisos **a** y **b** respectivamente.

$$\begin{aligned} b_1(\gamma) &= \frac{h_2^{(1)}(\gamma)}{r_2^{(1)}(\gamma)D}, \\ b_2(\gamma) &= \frac{2h_2^{(1)}(\gamma) - 1}{\sqrt{2}r_2^{(1)}(\gamma)D}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \{(\gamma, b) : \gamma^2 - m^2 > 0, \gamma < 0, b \leq b_1(\gamma)\}, \\ \Delta_\beta &= \{(\gamma, b) : \gamma^2 - m^2 > 0, \gamma < 0, b_1(\gamma) < b < b_2(\gamma)\}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

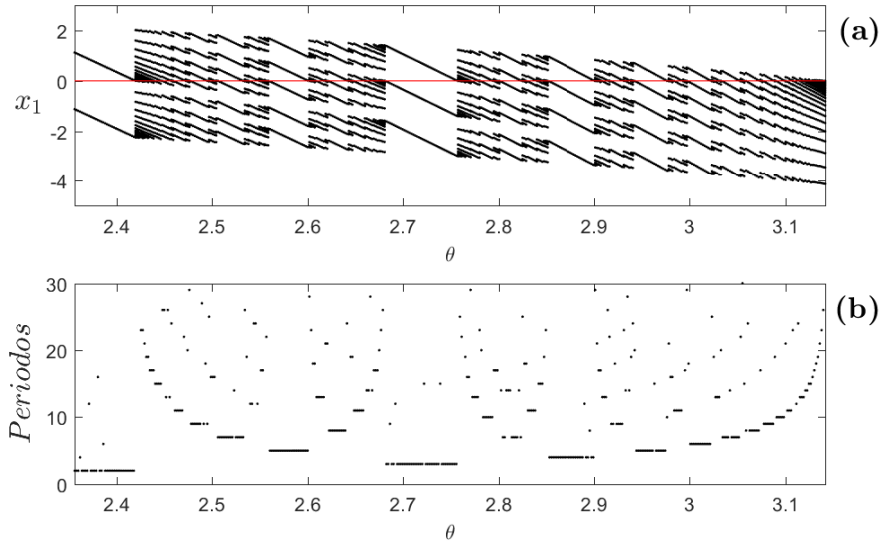


Figura 2.6: (a) Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (2.21) con la configuración de parámetros $\gamma = -0,2$, $m = 0$, $t = 0,9$, $b = \frac{1}{\gamma}$ variando el parámetro θ . (b) Periodos de las órbitas de (a) calculados numéricamente.

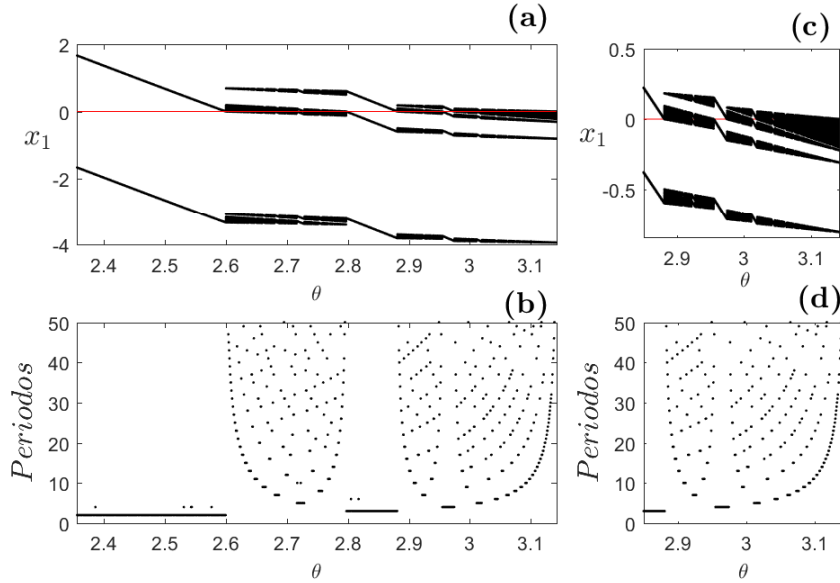


Figura 2.7: (a) Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (2.21) con la configuración de parámetros $\gamma = -1,05$, $m = 1$, $t = 0,9$, $b = -9,27$. Los parámetros γ y b fueron tomados basándose en la conjetura 1. (b) Periodos de las órbitas de (a) calculados numéricamente. (c) zoom de (a). (d) zoom de (b).

2.3. Propiedades del mapa estroboscópico

En esta sección se estudiará el comportamiento de un mapa estroboscópico asociado a un PWL en su forma canónica normalizada, es decir un sistema de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A_L \mathbf{x} - \mathbf{b}_L, & \text{si } e_1^T \mathbf{x} < 0, \\ A_R \mathbf{x} - \mathbf{b}_R, & \text{si } e_1^T \mathbf{x} \geq 0, \end{cases} \quad (2.24)$$

cuando las trazas de sus matrices son negativas ($\gamma_L, \gamma_R < 0$) y sus determinantes son positivos ($\gamma_L^2 - m_L^2 > 0$, $\gamma_R^2 - m_R^2 > 0$). Recuerde que en esta forma los tiempos a izquierda y a derecha son distintos, estos se denotarán como t_R y t_L respectivamente.

El mapa estroboscópico asociado al sistema (2.24) es la discretización de su solución. Si $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in S_j$ con $j \in \{L, R\}$, la solución del sistema (2.24) esta dada por:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi_j \mathbf{x}_0 - \Gamma_j(t) b_j, \quad x \in S_j, \quad (2.25)$$

donde Φ_j es la matriz exponencial de $A_j t_j$ y $\Gamma_j(t_j)$ esta dado por:

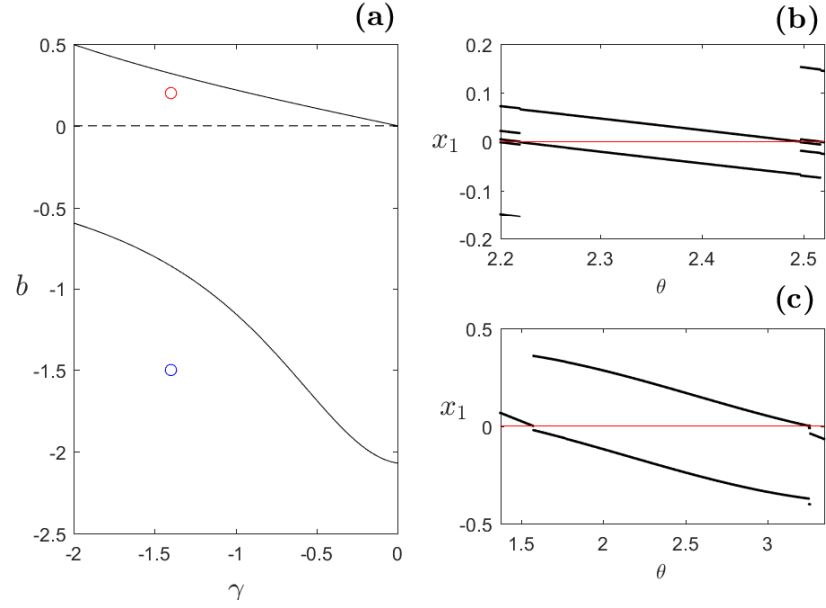


Figura 2.8: (a) Espacio dos paramétrico (γ, b) , con las funciones b_1 y b_2 definidas en (2.22). El punto rojo pertenece al conjunto Δ_β y el punto azul al conjunto Δ , definido en (2.23). (b) Órbita dos periódica correspondiente al mapa P definido en (2.21) con la configuración de parámetros $m = i$, $t = 0,9$, γ y b correspondientes al punto rojo. (c) Órbita dos periódica correspondiente al mapa P definido en (2.21) con la configuración de parámetros $m = i$, $t = 0,9$, γ y b correspondientes al punto azul.

$$\Gamma_j(t_j) = \int_0^t \Phi_j(t_j - \tau) d\tau. \quad (2.26)$$

Como la matriz A_j es no singular, la matriz Γ_j esta dada por:

$$\Gamma_j(t_j) = (\Phi_j - I_2)A_j^{-1}. \quad (2.27)$$

Fijando los periodos de conmutación como $0 < tr < 1$ y $0 < t_L < 1$, se muestra la expresión del mapa estroboscópico asociado al sistema (2.24):

$$\mathbf{x}_{n+1} = P(\mathbf{x}_n, a_R, a_L, b) = \begin{cases} P_L(\mathbf{x}_n) = \Phi_L \mathbf{x}_n - (\Phi_L - I)A_L^{-1} \mathbf{b}_L, & e_1^T \mathbf{x} < 0, \\ P_R(\mathbf{x}_n) = \Phi_R \mathbf{x}_n - (\Phi_R - I)A_R^{-1} \mathbf{b}_R, & e_1^T \mathbf{x} \geq 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

Los puntos fijos del mapa (2.28) estan dados por:

$$\mathbf{x}_L^* = \frac{a_L}{\gamma_L^2 - m_L^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2\gamma_L \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_R^* = \frac{1}{\gamma_R^2 - m_R^2} \begin{bmatrix} a_R \\ b(\gamma_R^2 - m_R^2) + 2\gamma_R a_R \end{bmatrix}.$$

Una de las condiciones de [2] en el estudio de la dinámica del mapa estroboscópico es que sus equilibrios sean virtuales, la condición necesaria para que esto se cumpla en el mapa (2.28) es $a_L > 0$ y $a_R < 0$.

2.3.1. Descripción del espacio de parámetros (a_R, a_L)

En esta sección se dará una descripción del espacio de parámetros (a_R, a_L) , fijando los demás parámetros del mapa P definido en (2.28), para empezar considere el siguiente cambio de coordenadas:

$$a_R = r \cos \theta, \quad a_L = r \sin \theta, \quad r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Sustituyendo los parámetros en el mapa P de (2.28), se llega a la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_{n+1} = P(\mathbf{x}_n, \theta, r, b) = \begin{cases} P_L(\mathbf{x}_n) = \Phi_L \mathbf{x}_n - (\Phi_L - I)A_L^{-1} \mathbf{b}_L, & e_1^T \mathbf{x} < 0, \\ P_R(\mathbf{x}_n) = \Phi_R \mathbf{x}_n - (\Phi_R - I)A_R^{-1} \mathbf{b}_R, & e_1^T \mathbf{x} \geq 0, \end{cases} \quad (2.29)$$

Con $\Phi_j, j \in \{L, R\}$ dada en (2.5) y $\mathbf{b}_L, \mathbf{b}_R$ dados por:

$$\mathbf{b}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_R = \begin{bmatrix} -b \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Note que al factorizar el parámetro r del mapa P , se obtiene la siguiente propiedad de homotecia:

Proposición 8. *Dado $r > 0$, el mapa P definido en (2.29), este mapa satisface la ecuación:*

$$P(r\mathbf{x}, t_L, t_R, rb, r, \theta) = rP(\mathbf{x}, t_L, t_R, b, 1, \theta).$$

Como consecuencia directa de la Proposición 8, se tiene el siguiente resultado para el mapa:

Proposición 9. *Dado $r > 0$, la órbita de un punto \mathbf{x} bajo en mapa P cumple con:*

$$Or(\mathbf{x}, t_L, t_R, b, r, \theta) = r(Or(r^{-1}\mathbf{x}, t_L, t_R, b, 1, \theta)).$$

Por la Proposición 9, es suficiente estudiar el caso $r = 1$ para conocer la dinámica del mapa P , debido a que las rectas que cortan el origen en el plano de parámetros (a_R, a_L) presentan la misma dinámica, lo que significa que las curvas de bifurcación del mapa serán líneas rectas que corten el origen en este espacio de parámetros, ver la Figura 2.9.

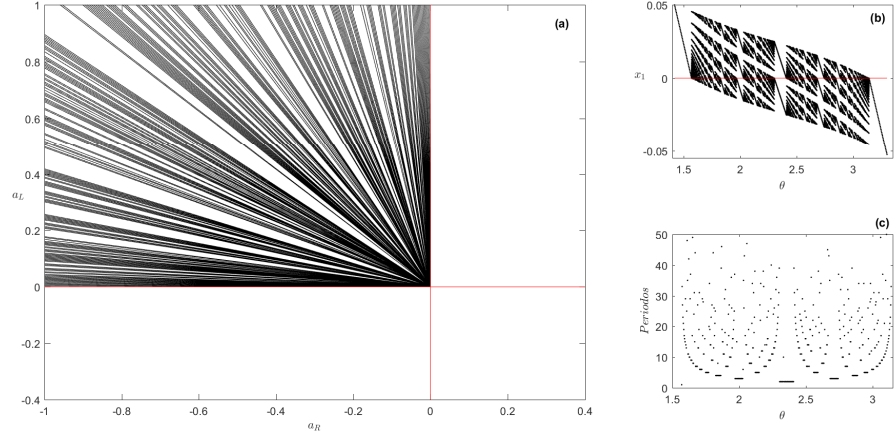


Figura 2.9: (a) Plano (a_R, a_L) , las líneas separan las regiones en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ cuyas órbitas periódicas tienen el mismo periodo. (b) Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (2.29) con los parámetros $\gamma_L = \gamma_R = -2$, $t_R = t_L = 0,1$, $m_L = m_R = 1$ y $b = -0,5$ variando el parámetro θ . (c) Periodos de las órbitas de (b) calculados numéricamente.

Ahora los puntos fijos del mapa P definido en (2.29) son:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_L^* &= \frac{\sin \theta}{\gamma_L^2 - m_L^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2\gamma_L \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}_R^* &= \frac{1}{\gamma_R^2 - m_R^2} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ 2\gamma_R \cos \theta + (\gamma_R^2 - m_R^2)b \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para que ambos puntos fijos sean virtuales $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, pues para valores de θ en este intervalo la función $\sin \theta$ es positiva y la función $\cos \theta$ es negativa.

2.3.2. Soluciones periódicas

Tomando la dinámica simbólica usada en [5, 16], que es un conjunto de símbolos $\{L, R\}$ los cuales determinan si la primera coordenada de la n -ésima iteración de una condición inicial \mathbf{x}_0 bajo dicho mapa se encuentra a la derecha o izquierda del eje y , como se estudió en el capítulo 1.

Siguiendo la metodología utilizada en [5, 16], en esta sección se estudiará la familia LR^{n-1} y su dual RL^{n-1} . En la siguiente proposición se muestra la n -ésima iteración de una condición inicial \mathbf{x} cuya órbita es periódica y pertenece a cada familia.

Proposición 10. *Considere el mapa P definido en (2.29), los siguientes enunciados se cumplen para $n \geq 2$*

- a) *Suponga que $\mathbf{x} \in \Sigma_R$ y $I_P(\mathbf{x}) = RL^{n-1}$. La n -ésima iteración de \mathbf{x} bajo el mapa P esta dada por:*

$$P_{RL^{n-1}}(\mathbf{x}) := (P_L^{n-1} \circ P_R)(\mathbf{x}) = \Phi_L^{n-1} \Phi_R \mathbf{x} - \Phi_L^{n-1} (\Phi_R - I) A_R^{-1} \mathbf{b}_R - (\Phi_L^{n-1} - I) A_L^{-1} \mathbf{b}_L. \quad (2.32)$$

- b) *Suponga que $\mathbf{x} \in \Sigma_R$ y $I_P(\mathbf{x}) = RL^{n-1}$. La n -ésima iteración de \mathbf{x} bajo el mapa P esta dada por:*

$$P_{LR^{n-1}}(\mathbf{x}) = (P_R^{n-1} \circ P_L)(\mathbf{x}) = \Phi_R^{n-1} \Phi_L \mathbf{x} - \Phi_R^{n-1} (\Phi_L - I) A_L^{-1} \mathbf{b}_L - (\Phi_R^{n-1} - I) A_R^{-1} \mathbf{b}_R. \quad (2.33)$$

Como una consecuencia directa de la proposición 10, se encuentra una expresión analítica para los puntos fijos de los mapas definidos en (2.32) y (2.33).

Proposición 11. *Considere el mapa P definido en (2.29), los siguientes enunciados se cumplen para $n \geq 2$*

- a) *Considere el mapa definido en (2.32), el punto fijo de este mapa esta dado por:*

$$\mathbf{x} = (\Phi_L^{n-1} \Phi_R - I)^{-1} (\Phi_L^{n-1} (\Phi_R - I) A_R^{-1} \mathbf{b}_R + (\Phi_L^{n-1} - I) A_L^{-1} \mathbf{b}_L). \quad (2.34)$$

- b) *Considere el mapa definido en (2.33), el punto fijo de este mapa esta dado por:*

$$\mathbf{x} = (\Phi_R^{n-1} \Phi_L - I)^{-1} (\Phi_R^{n-1} (\Phi_L - I) A_L^{-1} \mathbf{b}_L + (\Phi_R^{n-1} - I) A_R^{-1} \mathbf{b}_R). \quad (2.35)$$

En la Figura 2.9 (b), se muestra que existen órbitas de ambas familias para la configuración de parámetros $\gamma = -2$, $t_L = t_R = 0,1$, $m_L = m_R = 1$ y $b = -0,5$. En la Figura 2.9 (c), se nota que los periodos de estas toman la estructura de adición de periodo mostrada en [9]. Por lo anterior es evidente que para cada periodo $n \geq 2$, existe una ventana de valores de θ en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, para la cual una órbita de periodo n es admisible.

La admisibilidad de estas órbitas se pierde cuando uno de sus puntos fijos colisiona con la zona de conmutación del mapa, pues al pasar a la zona contraria aunque el punto (2.34) o (2.35) exista, una de sus n -ésimas iteraciones no estará en la zona que le corresponde, por lo tanto la secuencia simbólica de la órbita de este punto será distinta a la de una órbita de tipo RL^{n-1} o su dual LR^{n-1} .

A continuación se muestran algunos diagramas de bifurcación que muestran que el punto $(0,0)$ del plano de parámetros (a_R, a_L) es un punto de bifurcación big bang para los supuestos $b < 0$, puntos fijos virtuales y estables, al igual que la conjetura de [12], pero con el mapa P definido en (2.28) con determinantes distintos y trazas iguales.

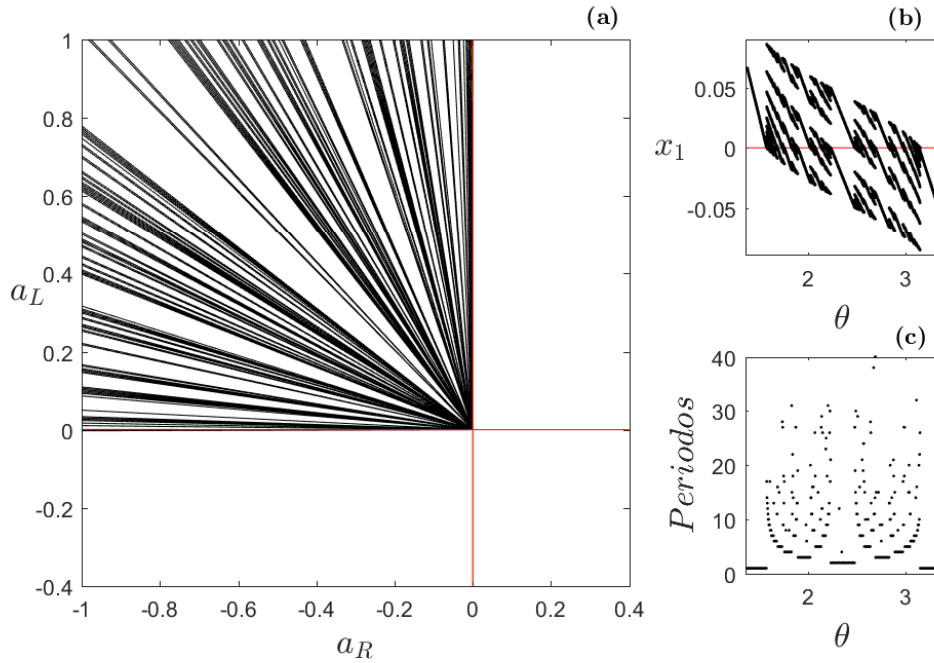


Figura 2.10: (a) Plano (a_R, a_L) , las líneas separan las regiones en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ cuyas órbitas periódicas tienen el mismo periodo. (b) Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (2.29) con los parámetros $\gamma_L = \gamma_R = -2$, $t_L = t_R = 0,1$, $m_L = 0$, $m_R = 1$ y $b = -1$ variando el parámetro θ . (c) Periodos de las órbitas de (b) calculados numéricamente.



Figura 2.11: (a) Plano (a_R, a_L) , las líneas separan las regiones en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ cuyas órbitas periódicas tienen el mismo periodo. (b) Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (2.29) con los parámetros $\gamma_L = \gamma_R = -2$, $t_L = t_R = 0,1$, $m_L = i$, $m_R = 0$ y $b = -1$ variando el parámetro θ . (c) Periodos de las órbitas de (b) calculados numéricamente.

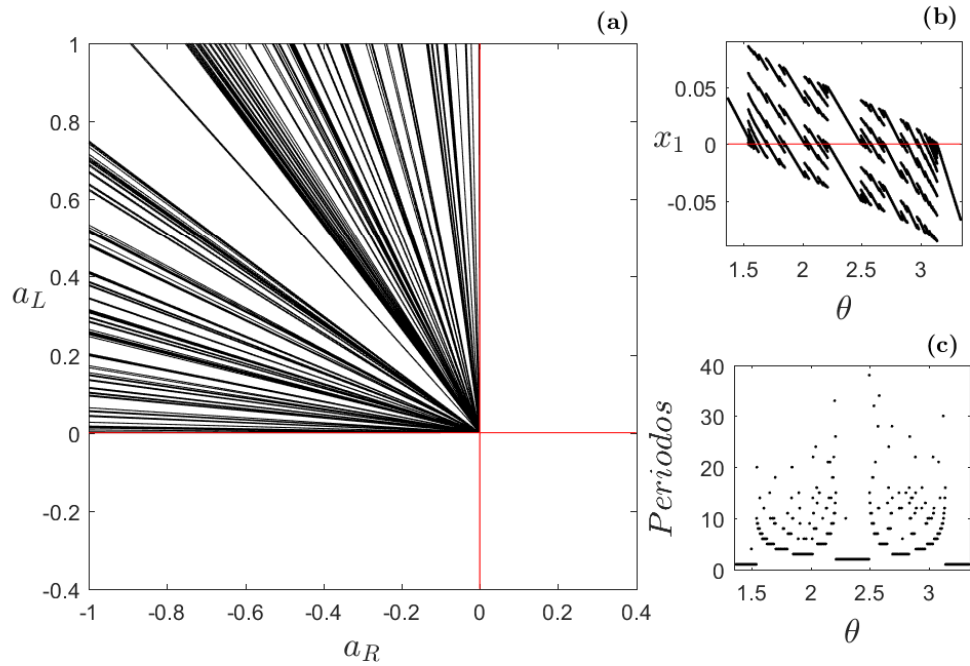


Figura 2.12: (a) Plano (a_R, a_L) , las líneas separan las regiones en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ cuyas órbitas periódicas tienen el mismo periodo. (b) Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (2.29) con los parámetros $\gamma_L = \gamma_R = -2$, $t_L = t_R = 0,1$, $m_L = 1$, $m_R = i$ y $b = -1$ variando el parámetro θ . (c) Periodos de las órbitas de (b) calculados numéricamente.

Capítulo 3

El convertidor DC-DC Buck-Boost

En este capítulo se estudia el modelo del convertidor DC-DC Buck-Boost propuesto en [18, 23] desde las leyes físicas que gobiernan su comportamiento hasta mostrar la existencia de órbitas periódicas en el mapa estroboscópico asociado a la forma canónica normalizada del modelo del convertidor, pasando por todas las transformaciones necesarias para llevar el modelo de su forma original a su forma canónica normalizada.

3.1. El modelo del convertidor

En esta sección se presentan los preliminares en física y teoría de circuitos necesarios para entender el comportamiento del convertidor DC-DC Buck-Boost, empezando por una breve descripción de las variables eléctricas fundamentales (carga, corriente, tensión y potencia). Después se hace un breve reconocimiento de los elementos del circuito y su funcionamiento, seguido por una intuitiva explicación de las leyes físicas que gobiernan a los circuitos cerrados como es el caso del convertidor y terminando con la deducción de los modelos planteados en [18, 23].

3.1.1. Variables eléctricas fundamentales

La carga eléctrica es una propiedad de la materia, por la física clásica se sabe que los átomos están compuestos por electrones, protones y neutrones, partículas subatómicas con carga negativa, positiva y neutra respectivamente. La carga eléctrica se simboliza como (q) mide en Coulombs (C), la carga de un protón y de un electrón son en magnitud igual a $1,6 \times 10^{-19}C$ pero

con signos opuestos, es por esto que cuando un átomo tiene igual cantidad de protones que de neutrones se dice que este se encuentra cargado neutralmente, en caso contrario el átomo estará cargado positiva o negativamente según corresponda.

Los átomos pueden transferirse electrones entre sí, lo que se conoce como el flujo de electrones. Cuando esto ocurre el electrón deja un vacío en el átomo que lo transfirió, este vacío se conoce como *hueco*, estos *huecos* y electrones son conocidos como portadores libres de carga, los primeros positivos y los segundos negativos, ver [27].

Cuando una estructura sólida de átomos se encuentra en presencia de una fuerza electromotriz (fem) como una batería, los portadores libres positivos se mueven en el sentido de esta fuente y los portadores libres negativos se mueven en el sentido contrario. El movimiento de los portadores positivos se conoce como corriente eléctrica que se simboliza como i y se mide en Ampere (A) que equivale a un Coulomb sobre segundo, ver[20]. Cuando esta corriente es constante se le conoce como corriente directa y cuando varía en forma sinusoidal se le conoce como corriente alterna. Matemáticamente la corriente eléctrica es la derivada de la carga con respecto al tiempo:

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (3.1)$$

Para mover un portador libre desde un punto a hasta otro punto b , se requiere de un esfuerzo por parte de la fuente que provoca el movimiento, dicho esfuerzo se conoce como tensión o diferencia de potencial entre los puntos a y b . Esta se representa como v_{ab} y se mide en Volt (V) que equivalen a un Joule sobre Coulomb. Matemáticamente la tensión se expresa como la derivada de la energía con respecto a la carga:

$$v_{ab} = \frac{dw}{dq}. \quad (3.2)$$

Analogamente a la corriente eléctrica, la tensión constante se conoce *tensión de cd* y la tensión variable como *tensión de ca*.

Con estas dos variables fundamentales claras, se puede hablar del concepto de potencia eléctrica que hace referencia al consumo o suministro de energía que tiene cada elemento de un circuito. Cada elemento del circuito que consume energía se le conoce como un elemento pasivo y aquel que la suministra se le conoce como activo. Por definición la potencia es la derivada de la energía con respecto al tiempo, por regla de la cadena se obtiene la siguiente relación entre potencia, tensión y corriente:

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \frac{dq}{dt} = vi. \quad (3.3)$$

La potencia se simboliza como p y se mide en Watt (W), que equivale a un Joule por cada segundo.

3.1.2. Leyes de Kirchhoff y ley de Ohm

La resistencia eléctrica es una propiedad de la materia, todos los cuerpos la poseen y mide la oposición de un cuerpo al flujo de corriente a través de él. Los cuerpos que poseen una resistencia eléctrica lo suficientemente baja para no provocar pérdidas considerables en el flujo de corriente a través de ellos se conocen como *conductores eléctricos*, por otra parte si su resistencia eléctrica es lo suficientemente alta se le conoce como aislante. Un ejemplo de un conductor eléctrico somos usted y yo, debido a que un porcentaje considerable de nuestra masa corporal es agua con hierro y otros compuestos conductores.

Existen elementos especiales en los que la tensión a la que se somete el cuerpo es proporcional a la corriente que circula a través de ellos, estos elementos se conocen como elementos *óhmicos* y la constante de proporcionalidad se denota como R y se mide en Ohm que equivale a 1 Volt sobre Ampere (Ω). Esta propiedad se conoce como la ley de Ohm en honor al físico alemán Georg Simon Ohm (1787-1854).

Junto con la ley de Ohm, las leyes de Kirchhoff son la base de un vasto conjunto de técnicas para el análisis de una gran variedad de circuitos eléctricos. Estas leyes fueron introducidas por el físico alemán Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) y se les conoce formalmente como la ley de corrientes de Kirchhoff (LCK) y la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK) [1].

La LCK se basa en la ley de la conservación de la carga, mientras que la LVK se fundamenta en el principio de conservación de la energía, por lo que ambas son leyes físicas fundamentales [21]. La LCK dice que la suma de las corrientes que entran a un punto de un circuito es igual a la suma de las corrientes que salen de este.

Cuando un elemento es pasivo se dice que en este hay una caída de tensión, ya que este elemento consume energía, en el caso contrario se dice que en el elemento hay una elevación de la tensión. Con esto claro, la LVK dice que la suma de todas las elevaciones de tensión es igual a la suma de las caídas de tensión alrededor de cualquier camino cerrado del circuito.

3.1.3. Componentes del convertidor

En esta sección se identificarán los componentes del circuito del convertidor DC-DC Buck-Boost estudiado en [23] y se explicará brevemente su funcionamiento. Para empezar, a continuación se muestra el circuito estudiado

en [23].

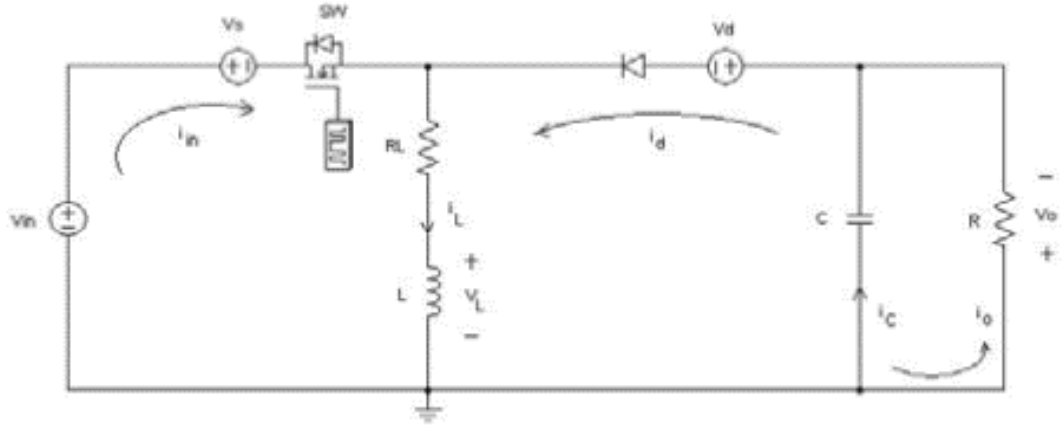


Figura 3.1: Circuito del convertidor DC-DC Buck-Boost estudiado en [23]

El circuito de la Figura 3.1 tiene un condensador C , un inductor L , un diodo D y dos resistencias R y R_L , la primera es una resistencia de carbon y la segunda es una resistencia propia del inductor.

El elemento más sencillo es la resistencia eléctrica, pues este siempre se comporta como un elemento pasivo y la relación entre la corriente que pasa a través de el es proporcional a la tensión en sus terminales (ley de ohm), por lo que concluimos que la caída de tensión V_0 que pasa por la resistencia R es igual al producto de la corriente i_0 con la resistencia R . Note que los signos de la tensión V_0 se ponen como un $+$ a la entrada de la corriente y un $-$ en la salida de este, lo que indica que el elemento consume energía, si los signos se colocan de forma contraria indicando una elevación de tensión, esta será negativa.

El condensador es lo que se conoce como un elemento almacenador de energía, analogo a una batería pero con una capacidad de almacenamiento mucho menor claro, regularmente se utiliza para suavizar una señal o darle un retraso, ver [1, 21]. A diferencia de la resistencia este elemento puede comportarse como pasivo y activo, pues en presencia de una fuente que le suministre energía este la va a almacenar comportandose como pasivo, pero en caso contrario la va a liberar al circuito comportandose como un elemento activo.

La capacitancia se define como la relación entre la cantidad de carga almacenada por el condensador y la tensión en sus terminales. En un condensador ideal la capacitancia depende puramente de las propiedades geométricas del condensador, ver [32]. Matemáticamente se expresa como

$$Q(t) = CV(t), \quad (3.4)$$

si se denota i_C la corriente que fluye en el condensador, se deriva a ambos lados de la ecuación (3.4), se obtiene la siguiente relación entre corriente y tensión en el condensador.

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}. \quad (3.5)$$

Otro elemento del circuito es el inductor, este al igual que el condensador es un elemento almacenador de energía y la relación entre corriente y tensión en el es no lineal. Este elemento funciona gracias a una ley física conocida como la ley de inducción de Faraday que dice que un circuito cerrado en presencia de un flujo magnético variable experimenta una corriente inducida por este campo y la tensión en sus terminales es proporcional a la derivada de este flujo magnético, ver [32]. En el caso del inductor el campo magnético es el producto de la cantidad de espiras del inductor, el área de estas espiras, una constante universal μ_0 y la corriente que fluye en estas espiras. Tomando v_L e i_L como la tensión y corriente en el inductor, matemáticamente se puede expresar la relación entre estas dos variables como

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad (3.6)$$

donde $L = nA\mu_0$, con n el número de espiras del inductor y A el área de las espiras. Note que al igual que la capacitancia de un condensador, la inductancia de un inductor depende puramente de las dimensiones geométricas del inductor.

El número de elementos almacenadores de energía en un circuito determinan lo que se conoce como el orden del circuito, ver [21, 1]. El circuito mostrado en la Figura 3.1 es un circuito de orden dos, debido a que tiene un condensador y un inductor, esto significa que el comportamiento de las variables del circuito puede ser modelado mediante una ecuación diferencial de orden dos o un sistema de ecuaciones diferenciales de orden dos.

Finalmente el diodo D es un elemento no lineal especial, que funciona como una *compuerta*. Cuando este elemento está en presencia de una tensión muy pequeña v_d , permite el flujo de corriente a través de él en un solo sentido, que es el sentido de la corriente i_d mostrada en el circuito de la Figura 3.1. La caída de tensión en este elemento pasivo es despreciable, aún así en la Figura 3.1 se muestra una fuente de tensión v_d que compensa esta caída de tensión y que se asegura de que el elemento siempre esté en operación.

Cuando el interruptor está abierto, este desconecta a la fuente v_{in} del resto del circuito, en este caso se dice que el diodo está cerrado. Cuando

el interruptor esta cerrado, el diodo no permite que esta fuente suministre corriente a la parte derecha del circuito, aislando esta parte del circuito de la fuente v_{in} , en este caso se dirá que el diodo esta abierto.

3.1.4. Deducción del modelo

Para empezar la deducción del modelo suponga que el diodo esta abierto, por lo que la corriente i_d es 0 y el circuito esta *separado*, de acuerdo con la LVK, la suma de la tensión de la fuente con la tensión del inductor debe dar 0, por lo tanto queda la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} v_{in} - v_{RL} - v_L &= 0, \\ v_{in} - R_L i_L - L \frac{di_L}{dt} &= 0, \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{v_{in}}{L} - \frac{R_L i_L}{L}, \end{aligned}$$

donde v_{RL} es la caída de tensión en la resistencia R_L del inductor. Por otra parte, al sumar la tensión del condensador con la tensión en la resistencia, esta también debe dar 0:

$$v_C = -v_0,$$

sustituyendo a v_0 en la ecuación (3.5), se obtiene:

$$\begin{aligned} C \frac{dv_C}{dt} &= -i_C, \\ -C \frac{dv_0}{dt} &= i_0, \\ -C \frac{dv_0}{dt} &= \frac{v_0}{R}, \\ \frac{dv_0}{dt} &= -\frac{v_0}{RC}, \end{aligned}$$

Con estas dos ecuaciones, el comportamiento de la tensión en el condensador y la corriente en el inductor se modelan mediante el siguiente arreglo matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_0}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v_{in}}{L} \\ 0 \end{bmatrix},$$

Ahora se plantean las ecuaciones del circuito cuando el diodo se encuentra cerrado, es decir que la corriente i_{in} es 0. Por la LCK, se tiene que:

$$\begin{aligned} i_L - i_d &= 0, \\ i_L &= i_d, \end{aligned}$$

por otra parte, también por LCK:

$$\begin{aligned} i_c + i_0 &= i_d, \\ i_c + i_0 &= i_L, \\ -C \frac{dv_C}{dt} - \frac{v_C}{R} &= i_L, \\ \frac{dv_C}{dt} &= -\frac{v_C}{RC} - \frac{i_L}{C}, \\ \frac{dv_0}{dt} &= \frac{i_L}{C} - \frac{v_0}{RC}, \end{aligned}$$

Aplicando una LVK en el camino cerrado central del circuito:

$$\begin{aligned} v_L + v_{RL} - v_C &= 0, \\ L \frac{di_L}{dt} + v_{RL} + v_0 &= 0, \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{Ri_L}{L} - \frac{v_0}{L}, \end{aligned}$$

con lo anterior se tiene que el comportamiento de las variables i_L y V_0 es:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_0}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_0 \end{bmatrix},$$

3.2. Modelo del convertidor

En la sección anterior se deduce el modelo del convertidor DC-DC Buck-Boost considerando un inductor con resistencia, que es el modelo propuesto en [23]. El modelo propuesto en [18] es el mismo modelo pero considerando que la resistencia del inductor R_L es nula, debido a que esta resistencia por lo general es muy pequeña respecto a la resistencia R del circuito.

Cuando se considera que la resistencia R_L es nula, la matriz del modelo cuando el diodo esta abierto es no invertible, lo que hace que el homomorfismo (1.20) sea no inyectivo haciendo que se pierda la equivalencia topológica al aplicarlo al modelo. Por lo tanto se estudiará el modelo propuesto en [23] con R_L mayor que cero.

En esta sección se propone una zona de conmutación recta para el modelo y se realizan unos cambios de variable adecuados para adimensionalizar el sistema y trasladar su zona de conmutación a la recta $\mathbf{e}_1^T \mathbf{x} = 0$. Una vez realizados estos cambios se fija el periodo de evolución del circuito y se muestra el mapa estroboscópico asociado a este, sobre el que se concluye basandose en los resultados del capítulo anterior.

$$\sigma \left(\begin{bmatrix} i_L \\ V_0 \end{bmatrix} \right) = k_1(i_L - i_{ref}) + k_2(V_0 - V_{ref}), \quad (3.7)$$

donde V_{ref} e i_{ref} son la tensión y corriente que se desean obtener y k_1, k_2 son constantes con las dimensiones adecuadas. Con esta zona de conmutación el PWL queda de la forma

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dV_0}{dt} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{-R_L}{L} & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{RC} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_0 \end{bmatrix}, & \sigma \left(\begin{bmatrix} i_L \\ V_0 \end{bmatrix} \right) < 0, \\ \begin{bmatrix} \frac{-R_L}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, & \sigma \left(\begin{bmatrix} i_L \\ V_0 \end{bmatrix} \right) \geq 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

con C, L, R, R_L, V_{in} parámetros positivos del circuito.

3.2.1. Adimensionalización del modelo

Adimensionalizar el sistema (3.8) permite reducir la cantidad de parámetros del sistema y hace más sencilla su simulación, para esto considere las siguientes variables adimensionales

$$\begin{aligned}
x_1 &= \left(1 + \frac{R_L}{R}\right) \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{i_L}{V_{in}}, \\
x_2 &= \left(1 + \frac{R_L}{R}\right) \frac{V_0}{V_{in}}, \\
s &= \frac{t}{\sqrt{LC}},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Realizando el cambio de las variables de (3.8) por las de (3.9), el modelo adimensional queda de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -\mu & -1 \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} \mathbf{x}, & \mathbf{x} \in S_1, \\ \begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 + \mu\beta \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{x} \in S_2. \end{cases} \tag{3.10}$$

Con $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ y β, μ dadas por

$$\beta = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}}, \tag{3.11}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{R_L^2 C}{L}}. \tag{3.12}$$

Note que β y μ son parámetros positivos.

ahora considere la siguiente zona de conmutación para el sistema adimensional:

$$\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T(\mathbf{x} - \mathbf{r}), \tag{3.13}$$

Con $\mathbf{r} = [x_{1ref}, x_{2ref}]^T$ es el vector con la corriente y tensión de salida ideal y $\mathbf{c} = [c_1, c_2] \in \mathbb{R}^2$, recta que divide el plano en las siguientes tres zonas:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \sigma(\mathbf{x}) < 0\}, \\
S_2 &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \sigma(\mathbf{x}) > 0\}, \\
\Sigma &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \sigma(\mathbf{x}) = 0\}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Este sistema aún no se puede llevar a la forma canónica mediante el homomorfismo H definido en (1.20), debido a que su zona de conmutación no es la recta $\mathbf{e}_1^T \mathbf{x} = 0$ y a que la entrada $a_{12}^R = 0$. Por lo tanto es necesario aplicar un cambio de coordenadas adecuado que solucione estos problemas.

3.2.2. Cambio de coordenadas

Ahora se tomará el siguiente cambio de coordenadas que permitirá trasladar la zona de conmutación del sistema adimensional (3.10) a la recta $\mathbf{e}_1^T \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, para que el modelo del convertidor quede de la forma del sistema (1.18):

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

con $d = -\mathbf{c}^T \mathbf{r}$. Este nuevo cambio de coordenadas divide el plano en las siguientes zonas:

$$\begin{aligned} \Sigma_L &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{e}_1^T \mathbf{x} < 0\}, \\ \Sigma_R &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{e}_1^T \mathbf{x} \geq 0\}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por simplicidad en la notación se escribirá la nueva variable como \mathbf{x} . Con lo que el sistema PWL queda de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{c_2 - \mu c_1}{c_1} & -\left(\frac{c_1^2 + (\beta - \mu)c_1 c_2 + c_2^2}{c_1}\right) \\ \frac{1}{c_1} & -\left(\frac{\beta c_1 + c_2}{c_1}\right) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} d \frac{\mu c_1 - c_2}{c_1} \\ -\frac{d}{c_1} \end{bmatrix}, & \mathbf{e}_1^T \mathbf{x} < 0, \\ \begin{bmatrix} -\mu & -c_2(\beta - \mu) \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} d\mu + c_1(1 + \beta\mu) \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{e}_1^T \mathbf{x} \geq 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

El siguiente resultado es fundamental para la aplicación de la teoría mostrada en capítulos anteriores, ya que da condiciones sobre los parámetros del sistema que garantizan su equivalencia topológica con su escritura en la forma canónica definida en (1.21).

Proposición 12. *Considere el sistema (3.17) con $\beta, \mu > 0$ y el parámetro $c = \frac{c_2}{c_1}$, $c_1 \neq 0$. Si $c^3 + (\beta + \mu)c^2 + c > 0$, entonces el sistema se puede reescribir en la forma canónica definida en (1.21).*

Note que, en particular si $c_1 c_2 > 0$ entonces se cumple la anterior desigualdad.

3.2.3. Forma canónica del modelo

Al aplicar el homomorfismo (1.20) al sistema (3.17), se llega a la forma canónica del modelo del convertidor Buck Boost dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -\beta - \mu & -1 \\ 1 + \beta\mu & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ c_L \end{bmatrix}, & e_1^T \mathbf{x} < 0, \\ \begin{bmatrix} -\beta - \mu & -1 \\ \beta\mu & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} -b \\ c_R \end{bmatrix}, & e_1^T \mathbf{x} \geq 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Con los parámetros:

$$\begin{aligned} c_L &= d(1 + \beta\mu), \\ c_R &= \beta \left(1 + \frac{c_1^2 + c_2^2}{c_1 c_2 (\beta - \mu)} \right) (d\mu + c_2(1 + \beta\mu)), \\ b &= \left(1 + \frac{c_1^2 + c_2^2}{c_1 c_2 (\beta + \mu)} \right) (d\mu + c_2(1 + \beta\mu)) + d \frac{c_2 - \mu c_1}{c_1}. \end{aligned}$$

Note que $b = \frac{c_R}{\beta} + d \left(\frac{c_2}{c_1} - \mu \right)$, esta relación facilita encontrar los parámetros del sistema (3.17) que al transformarse en la forma canónica esta tenga unos parámetros deseados.

Por otra parte ambas matrices tienen la misma traza $-\beta - \mu < 0$ y también tienen determinantes positivo, sus discriminantes $\Delta_{\{R,L\}}$ están dados por

$$\begin{aligned} \Delta_R &= (\beta - \mu)^2, \\ \Delta_L &= (\beta - \mu)^2 - 4, \end{aligned} \quad (3.19)$$

entonces $\Delta_R \geq 0$ y Δ_L puede tomar cualquier signo dependiendo de los parámetros β, μ .

3.2.4. Forma canónica normalizada del modelo

Al realizar el escalamiento en las variables adecuadas, se lleva el sistema (3.18) a su forma normalizada, con las siguientes restricciones sobre sus parámetros

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 2\gamma & -1 \\ \gamma^2 - m_L^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ a_L \end{bmatrix}, & e_1^T \mathbf{x} < 0, \\ \begin{bmatrix} 2\gamma & -1 \\ \gamma^2 - m_R^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} -b \\ a_R \end{bmatrix}, & e_1^T \mathbf{x} \geq 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

con

$$\omega_j = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{|\Delta_j|}, & \Delta_j \neq 0, \\ 1, & \Delta_j = 0, \end{cases}, \quad \gamma_j = \frac{-\beta - \mu}{\omega_j}, \quad (3.21)$$

$$m_L \in \{0, 1, i\}, \quad m_R \in \{0, 1\}, \quad a_j = \frac{c_j}{\omega_j}, \quad t_j = \frac{t}{\omega_j},$$

$j \in \{R, L\}$.

Con estas restricciones, es evidente que el sistema (3.20) pertenece a la familia de sistemas cuyo mapa estroboscópico se estudió en el capítulo 2.

3.3. Mapa del convertidor

En esta sección se presentan algunas simulaciones del mapa estroboscópico asociado al sistema PWL adimensional del convertidor definido en (3.10) en donde este alcanza distintas órbitas periódicas de distintos periodos, después se presenta el mapa estroboscópico de la forma canónica normalizada del modelo del convertidor junto con algunas simulaciones de este mapa.

El siguiente mapa corresponde a la discretización estroboscópica del sistema PWL adimensional definido en (3.10)

$$\mathbf{x}_{n+1} = F(\mathbf{x}_n, \zeta) = \begin{cases} F_L(\mathbf{x}_n, \beta, \mu, t) = e^{B_L t} \mathbf{x}_n, & \sigma(\mathbf{x}_n) < 0, \\ F_R(\mathbf{x}_n, \beta, \mu, t) = e^{B_R t} \mathbf{x}_n + (e^{B_L t} \mathbf{x}_n - I) B_R^{-1} \mathbf{v}_R, & \sigma(\mathbf{x}_n) \geq 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

donde el vector $\zeta = [\beta, \mu, c_1, c_2, d, t]$ y las matrices B_L , B_R y el vector \mathbf{v}_R estan definidos por

$$B_L = \begin{bmatrix} -\mu & -1 \\ 1 & -\beta \end{bmatrix}, \quad B_R = \begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_R = \begin{bmatrix} 1 + \mu\beta \\ 0 \end{bmatrix},$$

y la recta de conmutación $\sigma(\mathbf{x})$ esta dada por

$$\sigma(\mathbf{x}) = c_1 \mathbf{e}_1^T \mathbf{x} + c_2 \mathbf{e}_2^T \mathbf{x} + d,$$

Este mapa presenta órbitas periódicas de distintos periodos y sus órbitas siempre son estables, ya que los valores propios de las matrices B_L y B_R están dados por las expresiones

$$\begin{aligned} \lambda_1^L &= \frac{-(\beta + \mu) + \sqrt{(\beta - \mu)^2 - 4}}{2}, & \lambda_2^L &= \frac{-(\beta + \mu) - \sqrt{(\beta - \mu)^2 - 4}}{2}, \\ \lambda_1^R &= -\beta, & \lambda_2^R &= -\mu, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que los parámetros β y μ son positivos, todas las expresiones de los valores propios de las matrices B_L y B_R tienen parte real negativa en todos los casos, lo que implica que los valores propios de las matrices $e^{B_L t}$ y $e^{B_R t}$, con $t > 0$ se encuentran dentro del círculo unitario.

Los puntos fijos del mapa (3.22) están dados por

$$\mathbf{x}_L^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_R^* = \begin{bmatrix} \frac{1+\beta\mu}{\mu^{-1}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

para que estos sean virtuales se necesita que $\sigma(\mathbf{x}_L^*) = d > 0$ y $\sigma(\mathbf{x}_R^*) = \frac{c_1(1+\beta\mu)}{\mu^{-1}} + d < 0$.

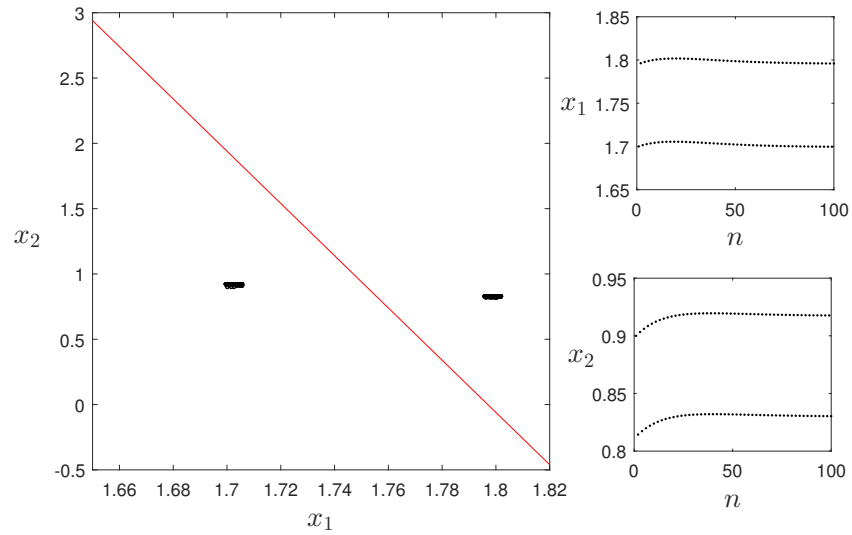


Figura 3.2: Órbita de periodo dos del mapa adimensional del convertidor definido en (3.10) para la configuración de parámetros $\beta = 1$, $\mu = 0,05$, $c_1 = -0,53$, $c_2 = 0,0265$, $d = 0,952$ y condición inicial $x_0 = [0,707, 0,473]^T$.

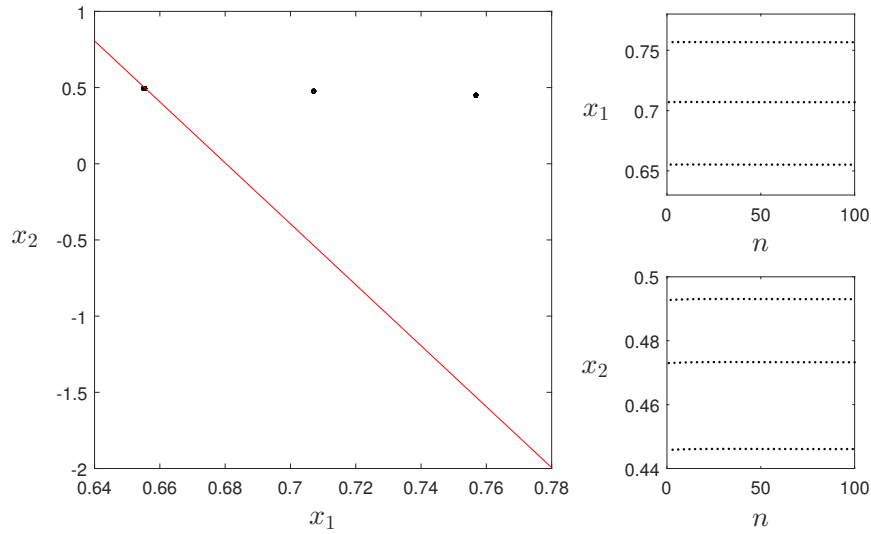


Figura 3.3: Órbita de periodo tres del mapa adimensional del convertidor definido en (3.10) para la configuración de parámetros $\beta = 1$, $\mu = 0,05$, $c_1 = -1,3$, $c_2 = -0,104$, $d = 0,952$ y condición inicial $x_0 = [0,7,0,5]^T$.

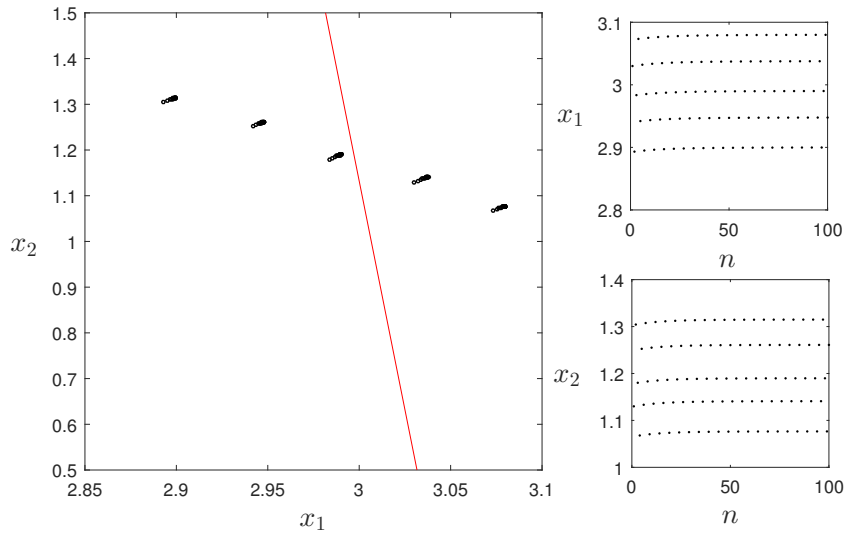


Figura 3.4: Órbita de periodo cinco del mapa adimensional del convertidor definido en (3.10) para la configuración de parámetros $\beta = 1$, $\mu = 0,05$, $c_1 = -0,53$, $c_2 = -0,0265$, $d = 1,62$ y condición inicial $x_0 = [3,04,1,14]^T$.

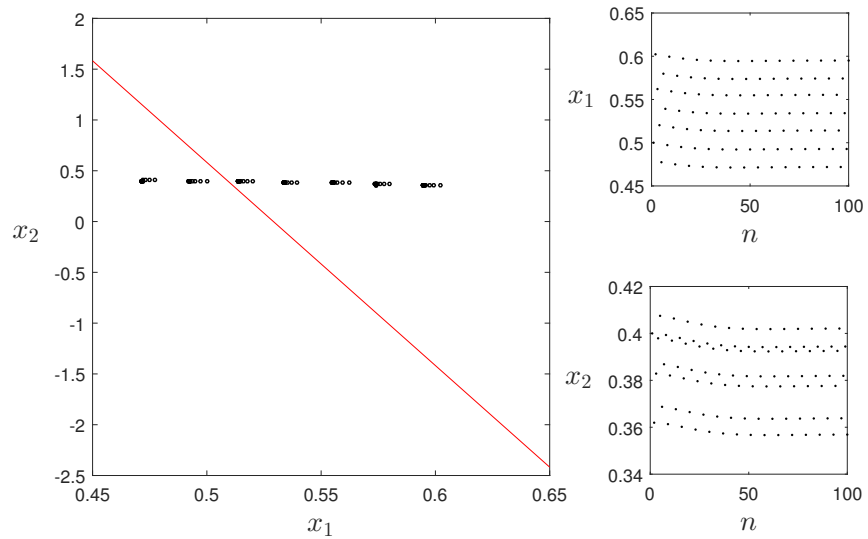


Figura 3.5: Órbita de periodo siete del mapa adimensional del convertidor definido en (3.10) para la configuración de parámetros $\beta = 1$, $\mu = 0,05$, $c_1 = -1,8$, $c_2 = -0,09$, $d = 0,952$ y condición inicial $x_0 = [0, 1]^T$.

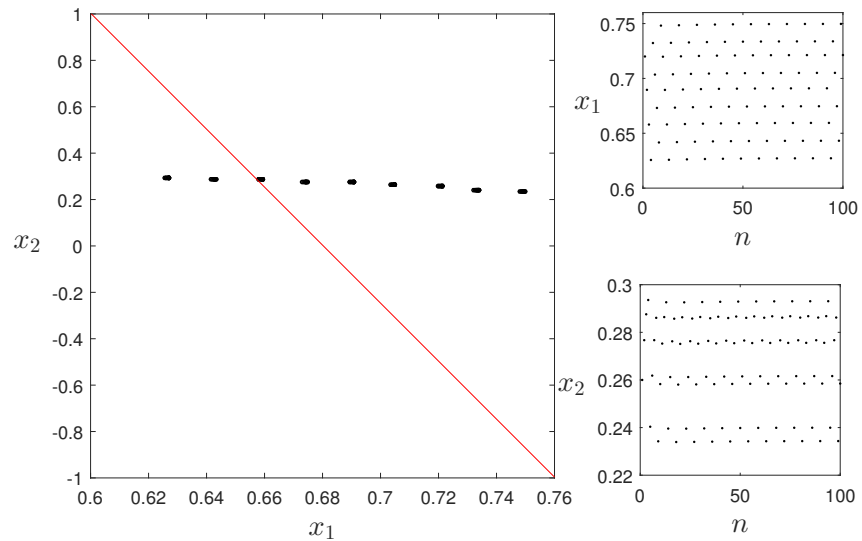


Figura 3.6: Órbita de periodo nueve del mapa adimensional del convertidor definido en (3.10) para la configuración de parámetros $\beta = 2$, $\mu = 0,05$, $c_1 = -1,4$, $c_2 = -0,112$, $d = 0,952$ y condición inicial $x_0 = [0, 10]^T$.

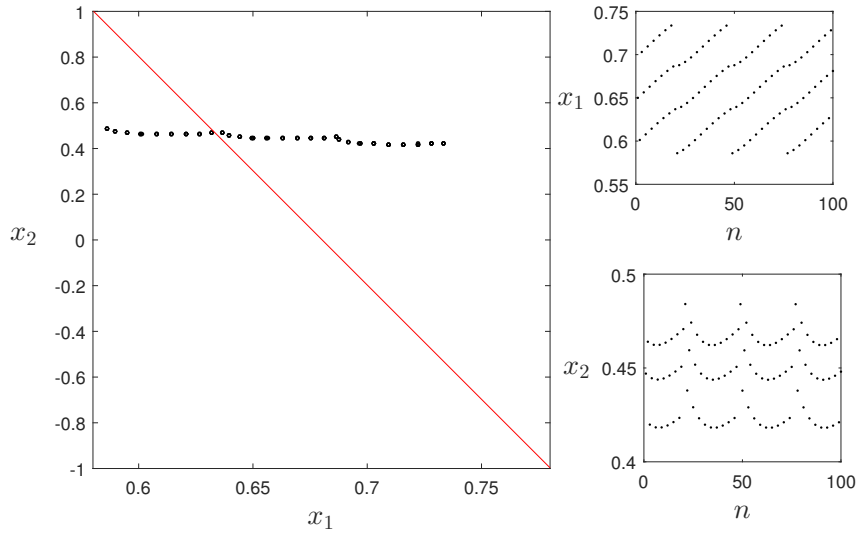


Figura 3.7: Órbita de periodo ventiocho del mapa adimensional del convertidor definido en (3.10) para la configuración de parámetros $\beta = 1$, $\mu = 0,05$, $c_1 = -1,4$, $c_2 = -0,14$, $d = 0,952$ y condición inicial $x_0 = [0,65, 0,447]^T$.

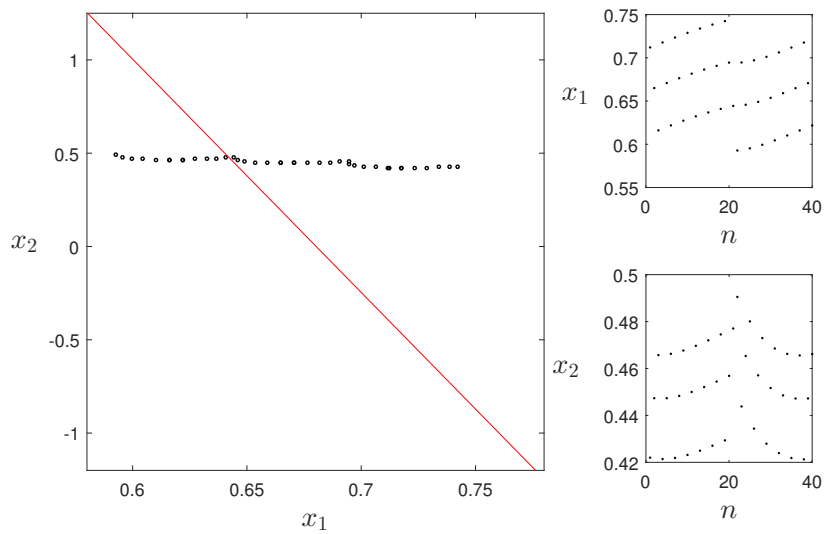


Figura 3.8: Órbita de periodo treinta y cuatro del mapa adimensional del convertidor definido en (3.10) para la configuración de parámetros $\beta = 1$, $\mu = 0,05$, $c_1 = -1,4$, $c_2 = -0,112$, $d = 0,952$ y condición inicial $x_0 = [0,712, 0,422]^T$.

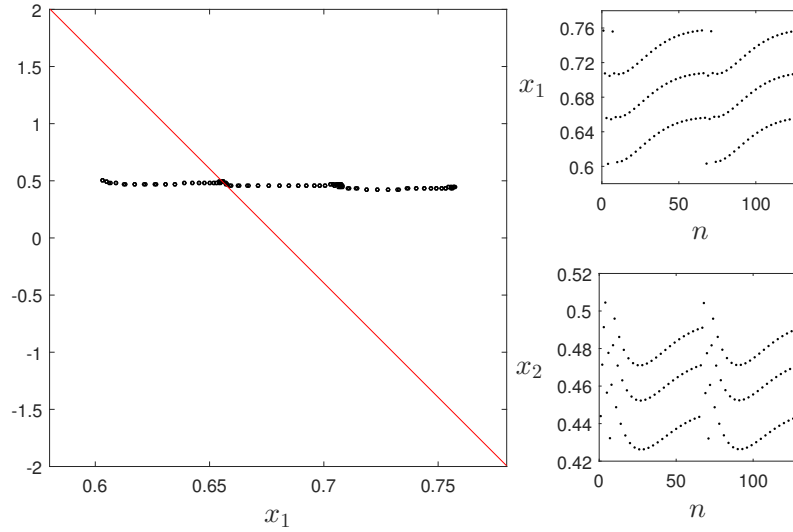


Figura 3.9: Órbita de periodo sesenta y cuatro del mapa adimensional del convertidor definido en (3.10) para la configuración de parámetros $\beta = 1$, $\mu = 0,05$, $c_1 = -1,3$, $c_2 = -0,104$, $d = 0,952$ y condición inicial $x_0 = [0,757, 0,444]^T$.

Note que las órbitas de periodo tres y sesenta y cuatro que se muestran en las Figuras 3.3 y 3.9 respectivamente comparten la misma configuración de parámetros, solo cambia su condición inicial. Lo que significa que para ciertas configuraciones de parámetros el mapa F definido en (3.22) presenta una co-existencia de órbitas periódicas, lo que significa que existen varias órbitas periódicas y cada una posee su propia cuenca de atracción. Por lo anterior es necesario conocer estas cuencas de atracción si se desea encontrar parámetros del convertidor que presenten una órbita periódica específica.

Un problema con las transformaciones de un sistema a otro topológicamente equivalente es que las cuencas de atracción de las órbitas periódicas por lo general cambian, lo que significa que aunque se pueda garantizar que existe una órbita periódica de periodo n debido a que se encontró una órbita periódica de este periodo en un sistema topológicamente equivalente, si el sistema original presenta una co-existencia de órbitas periódicas, no basta con los parámetros para poder alcanzar esta órbita periódica.

Las matrices B_L y B_R del mapa F definido en (3.22) no son matrices semejantes, por lo tanto sus discriminantes Δ_L y Δ_R son distintos. Lo anterior implica que los periodos de muestreo a izquierda y derecha de la recta de conmutación $\mathbf{e}_1^T \mathbf{x} = 0$ son diferentes, por lo que es posible obtener bifurcaciones gracias a la diferencia de estos periodos de muestreo.

El siguiente es el mapa estroboscópico asociado a la forma canónica normalizada del sistema PWL del convertidor

$$\mathbf{x}_{n+1} = P(\mathbf{x}_n, \eta) = \begin{cases} P_L(\mathbf{x}_n, \eta) = \Phi_L \mathbf{x}_n - (\Phi_L - I)A_L^{-1} \mathbf{b}_L, & e_1^T \mathbf{x} < 0, \\ P_R(\mathbf{x}_n, \eta) = \Phi_R \mathbf{x}_n - (\Phi_R - I)A_R^{-1} \mathbf{b}_R, & e_1^T \mathbf{x} \geq 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

donde $\eta = [a_R, a_L, b, t_L, t_R]^T$ y las matrices A_L , A_R y los vectores \mathbf{b}_L , \mathbf{b}_R estan dados por

$$A_L = \begin{bmatrix} 2\gamma_L & -1 \\ \gamma_L^2 - m_L^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ a_L \end{bmatrix},$$

$$A_R = \begin{bmatrix} 2\gamma_R & -1 \\ \gamma_R^2 - m_R^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_R = \begin{bmatrix} -b \\ a_R \end{bmatrix},$$

con los parámetros $a_{\{L,R\}}$, $\gamma_{\{L,R\}}$, $m_{\{L,R\}}$, b definidos en (3.21) y $\Phi_{\{L,R\}} = e^{A_{\{L,R\}} t_{\{L,R\}}}$.

Note que la relación entre los tiempos de muestreo t_L y t_R esta dada por

$$t_L = \frac{\omega_L}{\omega_R} t_R = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{4}{(\beta - \mu)^2}} t_R, & \text{si } |\beta - \mu| \notin \{0, 2\}, \\ t_R, & \text{si } |\beta - \mu| \in \{0, 2\}, \end{cases}$$

para valores de μ muy cercanos a β la relación entre los tiempos de muestreo crece indiscriminadamente. La diferencia en estos tiempos de muestreo puede ocasionar bifurcaciones en el mapa P de la forma canónica normalizada del convertidor, para ilustrar esto considere el siguiente diagrama de bifurcación variando el parámetro t_R

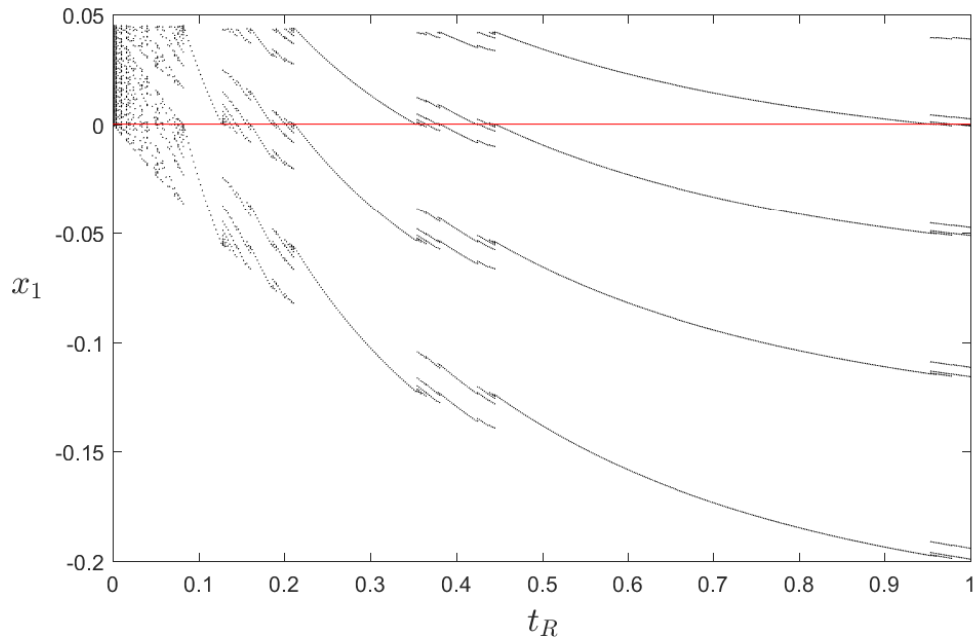


Figura 3.10: Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (3.23) con la configuración de parámetros $\gamma = -2$, $m_L = m_R = 1$, $c_L = 0,707$, $c_R = -0,707$, $b = -1$, $t_L = 0,1$ y variando el parámetro t_R .

Por otra parte, los resultados del Capítulo 2 muestran que en el mapa estroboscópico asociado a la forma canónica normalizada de un sistema PWL con matrices cuyas trazas son iguales y negativas, determinantes positivos puede presentar un punto de bifurcación big bang. A continuación se presenta un conjunto de parámetros del sistema PWL definido en (3.17)

$$\begin{array}{lll} \beta = 1, & \mu = 0,05, & t = 0,1, \\ c_1 = -0,53, & c_2 = -0,0265, & d = 0,952, \end{array}$$

Con esta configuración de parámetros, los parámetros de la forma canónica normalizada se muestran a continuación, excepto los parámetros a_L y a_R , ya que se utilizará la técnica presentada en Capítulo 2 para mostrar la presencia de la bifurcación big bang en el mapa P definido en (3.23) en el plano de parámetros (a_L, a_R) .

$$\begin{array}{llll} \gamma_L = -1,19, & \gamma_R = -2,21, & m_L = i, & m_R = 1, \\ b = -1, & t_L = 0,11, & t_R = 0,21, & r = 1. \end{array}$$

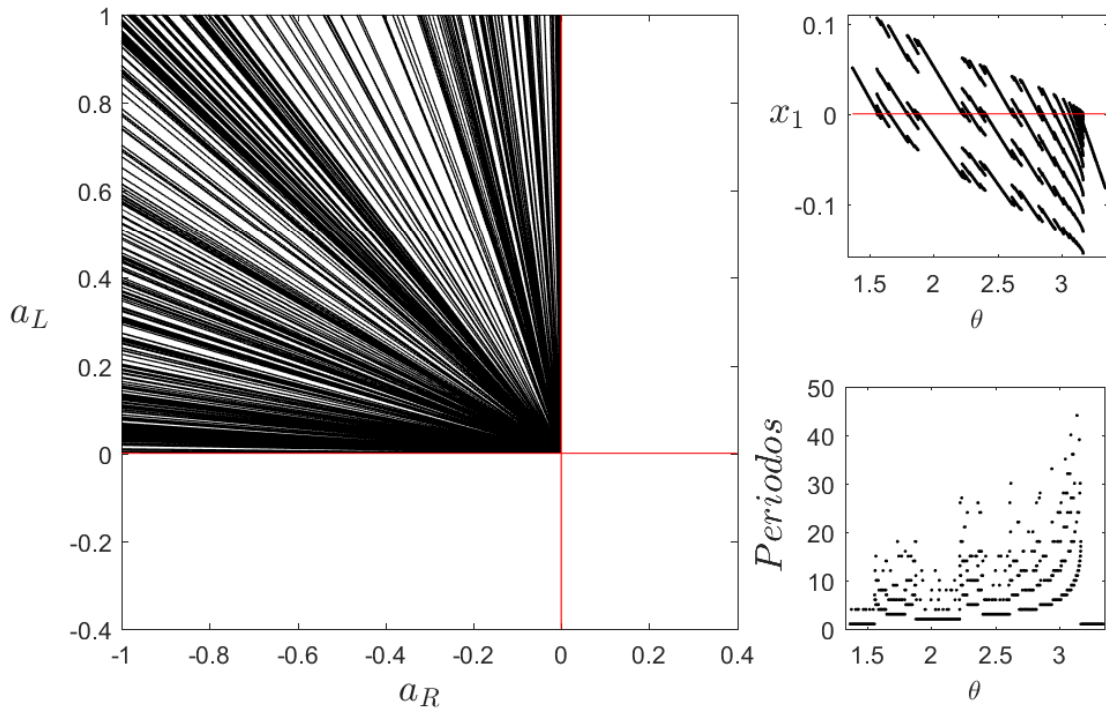


Figura 3.11: (a) Plano (a_R, a_L) , las líneas separan las regiones en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ cuyas órbitas periódicas tienen el mismo periodo. (b) Diagrama de bifurcación del mapa P definido en (3.23) con los parámetros $\gamma_L = -1,19$, $\gamma_R = -2,21$, $t_L = 0,11$, $t_R = 0,21$, $m_L = i$, $m_R = 1$ y $b = -1$ variando el parámetro θ . (c) Periodos de las órbitas de (b) calculados numéricamente.

Capítulo 4

Conclusiones y trabajos futuros

Motivados por los resultados reportados en [12] sobre la presencia de la bifurcación big bang en un mapa lineal a trozos de dimensión dos y [2] sobre la presencia de órbitas periódicas y la bifurcación big bang en mapas estroboscópicos de dimensión dos asociados a sistemas PWL con matrices iguales, en este trabajo se inicia un estudio numérico de la presencia de fenómenos como bifurcaciones por colisión de borde, bifurcación big bang con incremento de periodo en mapas estroboscópicos asociados a sistemas PWL con matrices distintas. Durante el estudio se dió evidencia numérica de la presencia de la bifurcación big bang con adición de periodo en estos mapas cuando se cumplen los supuestos planteados en [12] para conjeturar la presencia de la bifurcación big bang en el mapa que allí se estudia.

En [2] se caracterizan componentes de las órbitas periódicas del mapa que allí se estudia, empleando funciones como las que se muestran en el capítulo dos para caracterizar a la matriz exponencial junto con otras funciones allí definidas y se plantea un teorema que garantiza la presencia de una órbita estable y de periodo dos en el mapa, también conjeturan la presencia de la bifurcación big bang en ese mapa. Como trabajo futuro se desea caracterizar también estas órbitas periódicas pero esta vez para el mapa estudiado en este trabajo y así estudiar de forma analítica la admisibilidad de estas órbitas periódicas.

Las simulaciones sugieren que la conjetura presentada en [12] es cierta para mapas con ambas matrices iguales, pero también para mapas con matrices que tienen determinantes distintos, aún así su validación es un trabajo futuro.

En cuanto a la aplicación al convertidor DC-DC Buck-Boost, se presentó evidencia de que el mapa estroboscópico asociado a su forma canónica normalizada puede presentar un punto de bifurcación big bang de codimensión dos y de que este mapa puede presentar bifurcaciones dependiendo de la relación

entre los tiempos de muestreo que se generan gracias a la aplicación de la forma canónica normalizada al mapa, por lo que para un futuro se trabajará con el mapa estroboscópico asociado a la forma canónica del sistema PWL del convertidor. Por otra parte también es necesario estudiar técnicas numéricas que permitan caracterizar las cuencas de atracción de las órbitas periódicas, ya que en este tipo de mapas a veces se presenta la co-existencia de órbitas periódicas, lo que dificulta encontrar parámetros y condiciones iniciales en el modelo original que lo conduzcan a una órbita periódica específica.

Bibliografía

- [1] Charles K. Alexandr and Matthew N. O. Sadiku. *Fundamentos de circuitos eléctricos*. Mc Graw-Hill Interamericana, 2006.
- [2] A. Amador. *Some contributions to the analysis of piecewise linear systems*. PhD thesis, Universidad de Sevilla. Departamento de Matemática Aplicada II (ETSI), 2018.
- [3] A. Amador, S. Casanova, H. A. Granada, G. Olivar, and J. Hurtado. Codimension-two big-bang bifurcation in a ZAD-controlled boost DC-DC converter. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(12):1450150, December 2014.
- [4] A. Amador, E. Ponce, and F. Torres. On the BB bifurcation in stroboscopic maps of planar DPWL systems. An application in discretized sliding-mode control systems. *Manuscript in preparation.*, 2020.
- [5] V Avrutin, A Granados, and M Schanz. Sufficient conditions for a period incrementing big bang bifurcation in one-dimensional maps. *Nonlinearity*, 24(9):2575–2598, August 2011.
- [6] Viktor Avrutin and Michael Schanz. On multi-parametric bifurcations in a scalar piecewise-linear map. *Nonlinearity*, 19(3):531–552, January 2006.
- [7] Viktor Avrutin, Michael Schanz, and Soumitro Banerjee. Multi-parametric bifurcations in a piecewise-linear discontinuous map. *Nonlinearity*, 19(8):1875–1906, July 2006.
- [8] Viktor Avrutin, Michael Schanz, and Soumitro Banerjee. Codimension-three bifurcations: Explanation of the complex one-, two-, and three-dimensional bifurcation structures in nonsmooth maps. *Physical Review E*, 75(6), June 2007.

- [9] Viktor Avrutin, Fabio Tramontana, and Iryna Sushko. Period adding structure in a 2D discontinuous model of economic growth. *Applied Mathematics and Computation*, 253:262–273, February 2015.
- [10] Robert L. Devaney. *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Westview Press, 2003.
- [11] H.F. Ameen D.R. Sulaiman and I.K. Said. Design of high efficiency dc-dc converter for photovoltaic solar home applications. *Journal of Energy and Power Engineering, ISSN 1934-8975*, 4(11):43–51, November 2010.
- [12] Enric Fossas and Albert Granados. Occurrence of big bang bifurcations in discretized sliding-mode control systems. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 21(1-2):35–43, May 2012.
- [13] Emilio Freire, Enrique Ponce, and Francisco Torres. Canonical discontinuous planar piecewise linear systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 11(1):181–211, January 2012.
- [14] Emilio Freire, Enrique Ponce, and Francisco Torres. A general mechanism to generate three limit cycles in planar filippov systems with two zones. *Nonlinear Dynamics*, 78(1):251–263, May 2014.
- [15] Zbigniew Galias and Xinghuo Yu. Study of periodic solutions in discretized two-dimensional sliding-mode control systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 58(6):381–385, June 2011.
- [16] Laura Gardini, Fabio Tramontana, Viktor Avrutin, and Michael Schanz. Border-Collision Bifurcations in 1D piecewise-linear maps and Leonov. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(10):3085–3104, October 2010.
- [17] A. Granados. *Local and global phenomena in piecewise-defined systems: from big bang bifurcations to splitting of heteroclinic manifolds*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya. Departament de Matemàtica Aplicada I, Juny 2012.
- [18] Hanifi Guldemir. Modeling and sliding mode control of DC-DC Buck-Boost converter. pages 475–480, May 2011.
- [19] Richard A. Holmgren. *A First Course in Discrete Dynamical System*. Springer-Verlag, 1994.
- [20] William H. Hayt Jr and John A. Buck. *Teoría electromagnética*. Mc Graw-Hill Interamericana.

- [21] William H. Hayt Jr, Jack E. Kemmerly, and Steven M. Durbin. *Análisis de circuitos en ingeniería*. Mc Graw-Hill Interamericana.
- [22] Lawrence Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer Science, 2001.
- [23] Carlos Alberto Lozano, Alejandro Paz, and Manuel Vicente Valencia. . a state variable model for considering the power inductor dc resistance on the open loop performance of a buck- boost dc to dc converter. *JMEST*, pages 121–123, October 2014.
- [24] A.R. Champneys P. Kowalczyk M. di Bernardo, C.J.Budd. *Piecewise-smooth Dynamical Systems Theory and Applications*. Springer Science, 2008.
- [25] Aishwarya V. Magar, Sanjay G. Kanade, and Ashish P. Kinge. Transformerless Buck-Boost DC-DC converter. In *2018 IEEE Global Conference on Wireless Computing and Networking (GCWCN)*. IEEE, November 2018.
- [26] Mohan Ned. *First Course on Power Electronics*. John Wiley and Sons, Inc, 2012.
- [27] Alejandro Paz Parra. *Electromagnetismo para Ingeniería Electrónica Campos y Ondas*. Sello Editorial Javeriano, 2013.
- [28] D J W Simpson and J D Meiss. Shrinking point bifurcations of resonance tongues for piecewise-smooth, continuous maps. *Nonlinearity*, 22(5):1123–1144, April 2009.
- [29] D J W Simpson and J D Meiss. Resonance near border-collision bifurcations in piecewise-smooth, continuous maps. *Nonlinearity*, 23(12):3091–3118, November 2014.
- [30] David J. W. Simpson. Sequences of periodic solutions and infinitely many coexisting attractors in the border-collision normal form. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(06):1430018, June 2014.
- [31] Bin Wang, Xinghuo Yu, and Xiangjun Li. ZOH discretization effect on higher-order sliding-mode control systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 55(11):4055–4064, November 2008.
- [32] Hugh D. Young y Roger A. Freedman y A. Lewis Ford. *Física universitaria con física moderna*. Pearson, 2013.

- [33] Yuri.A.Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer Science, 2004.