



Pontificia Universidad
JAVERIANA
Cali

Facultad de Ingeniería y Ciencias
Secretaría de la Facultad

Acta de Correcciones al Proyecto de Grado
Matemáticas Aplicadas

Fecha: 02/03/2023

Autores: Leidy Yasmin Hoyos Parra

Nombre del Proyecto de Grado: Modelo matemático para la deflexión de una cuerda sujeta en sus extremos

Director: Andrés Mauricio Salazar Rojas

Como indica el artículo 2.27 de las Directrices de Trabajo de Grado, he verificado que los estudiantes indicados arriba han implementado todas las correcciones que los Jurados del Proyecto de Grado definieron que se efectuaran, como consta en el Acta de Calificación correspondiente.

Firma Director del Proyecto de Grado

Firma Codirector del Proyecto de Grado

Nota de Aceptación

Aprobado por el Comité de Trabajo de Grado
en cumplimiento de los requisitos exigidos por la
Pontificia Universidad Javeriana para optar el
título de Profesional en Matemáticas Aplicadas.

Hernán Camilo Rocha Niño

Decano de la Facultad de Ingeniería y Ciencias

Diana Haidive Bueno Carreño

Directora Carrera de Matemáticas Aplicadas

Andrés Mauricio Salazar Rojas

Director(a) Trabajo

Michell Andrés Gómez Leiva

Michell Gómez

Jurado 1

Andrés Rivera

Jurado 2

Santiago de Cali, febrero 13 de 2023

Doctora

DIANA HAIDIVE BUENO

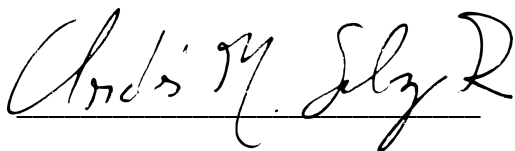
Directora de la carrera de Matemáticas Aplicadas

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA CALI

Cordial saludo,

Por medio de la presente me permito informarle que la estudiante **LEIDY YASMIN HOYOS PARRA** con código **8942311**, trabajó y finalizó bajo mi dirección, el proyecto de grado denominado **“MODELO MATEMÁTICO PARA LA DEFLEXIÓN DE UNA CUERDA SUJETA EN SUS EXTREMOS”**, el cual considero se encuentra en condiciones para ser sometido a evaluación.

Atentamente



ANDRÉS MAURICIO SALAZAR ROJAS

Director del proyecto de grado

Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas

**MODELO MATEMÁTICO PARA LA DEFLEXIÓN DE UNA
CUERDA SUJETA EN SUS EXTREMOS**

LEIDY YASMIN HOYOS PARRA



**PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS
SANTIAGO DE CALI
2023**

**MODELO MATEMÁTICO PARA LA DEFLEXIÓN DE UNA
CUERDA SUJETA EN SUS EXTREMOS**

LEIDY YASMIN HOYOS PARRA

Trabajo de grado para optar por el título de matemático aplicado



**PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS
SANTIAGO DE CALI**

2023

Índice general

1	Introducción	1
2	Preliminares matemáticos	3
2.1	Espacios de funciones	3
2.2	Espacios de Sobolev	5
2.2.1	Desigualdad de Poincaré	7
2.3	Teorema de representación de Riesz	8
2.4	Teorema del punto fijo de Banach	11
2.5	Función de Green	12
2.6	El principio del máximo	14
2.7	Existencia y unicidad de soluciones débiles	15
3	Resultados principales	19
3.1	Caso lineal	19
3.1.1	Existencia y unicidad de soluciones débiles	19
3.1.2	Valores extremos a partir de la función de Green	20
3.1.3	Derivada en la frontera	22
3.1.4	Reflexión sobre el eje x	23
3.2	Caso semilineal	24
3.2.1	Valores y funciones propias	24
3.2.2	Existencia y unicidad	25
4	Conclusiones y perspectivas	29

Resumen

En este documento estudiamos el modelo matemático para la deflexión de una cuerda sujeta en sus extremos. Presentamos algunos resultados clásicos del análisis funcional relacionados con la existencia y unicidad de soluciones, y exploramos la configuración geométrica del conjunto de puntos críticos de la solución del problema lineal de la cuerda en relación con la distribución de carga que se aplica sobre esta.

Abstract

In this document we study the mathematical model for the deflection of a rope held at its ends. We present some classical results of the functional analysis related to the existence and uniqueness of solutions, and we explore the geometric configuration of the set of critical points of the solution of the linear problem of the rope in relation to the load distribution applied on it.

Capítulo 1

Introducción

El problema de la deflexión de una cuerda de longitud 1, sujeta en sus extremos, sometida a una distribución de fuerzas $f \equiv f(x)$, que depende de la posición sobre la cuerda, puede modelarse mediante la ecuación

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

En el caso en que la distribución de fuerzas f dependa del valor de la deflexión u , el problema se puede modelar mediante la ecuación

$$\begin{cases} -u''(x) = f(u), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Si bien el problema de existencia y unicidad de (1.1) y (1.2) está resuelto, véase referencias [2], [3], [6], y son conocidas sus soluciones empleando distintas técnicas de las ecuaciones diferenciales ordinarias, véase referencia [6]. Es siempre un desafío para todo estudiante o profesional de la matemática abordar los conceptos teóricos para el estudio de este tipo de problemas, y las analogías que del mismo se pueden desprender hacia otros campos disciplinares.

De acuerdo con lo anterior, en este documento nos proponemos a presentar algunos resultados clásicos del análisis matemático y funcional, que nos permitan estudiar las técnicas necesarias para garantizar la existencia y unicidad de soluciones a los problemas (1.1) y (1.2), y así como probar algunas propiedades cualitativas del conjunto de puntos críticos de la solución del problema (1.1).

Capítulo 2

Preliminares matemáticos

2.1 Espacios de funciones

A partir de este momento hasta que se indique lo contrario, Ω representa un intervalo abierto y acotado de \mathbb{R} , denotaremos con $\partial\Omega$ a la frontera de Ω . Escribiremos $C(\Omega)$ para referirnos al conjunto de las funciones continuas en Ω , con $C(\overline{\Omega})$ a las funciones continuas en la clausura de Ω , con $C_0(\Omega)$ al conjunto de las funciones continuas en Ω que se anulan en $\partial\Omega$, con $C^n(\Omega)$ al conjunto de las funciones cuyas n -ésimas derivadas son continuas en Ω y con $C^n(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ al conjunto de funciones que se anulan en $\partial\Omega$ y cuyas n -ésimas derivadas son continuas en Ω .

Emplearemos la notación $C_c^\infty(\Omega)$ para representar el conjunto de funciones infinitamente diferenciables que tienen soporte compacto en Ω . El soporte de una función u definida en Ω es el conjunto $\{x \in \Omega | u(x) \neq 0\}$.

Denotaremos con $L^2(\Omega)$ al conjunto de funciones cuadrado integrables, es decir

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \int_{\Omega} f^2 dx < \infty \right\}.$$

Por otro lado, si $f, g \in L^2(\Omega)$ puede probarse que la integral

$$(f, g) = \int_{\Omega} fg dx,$$

define un producto punto, y que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, esto quiere decir que es completo con la norma $(f, f) = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2$, en el sentido de que toda sucesión de Cauchy definida en $L^2(\Omega)$ es convergente en $L^2(\Omega)$.

Existen espacios vectoriales normados, cuya norma no se desprende del producto punto. Si estos espacios son completos bajo su correspondiente norma, se les conoce entonces como espacios de Banach.

En $L^2(\Omega)$ se verifica la desigualdad de Cauchy- Schwarz, es decir

$$|(f, g)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Denotaremos con $L_{loc}^1(\Omega)$ al siguiente conjunto

$$L_{loc}^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_v |f| dx < \infty \text{ para cada } V \subset\subset \Omega \right\}.$$

Ejemplo 1. La integral

$$\int_0^1 x^{2p} dx, \quad (2.1)$$

es convergente cuando $p > -1/2$, y de acuerdo con esto $f \in L^2(\Omega)$ con $\Omega = (0, 1)$.

Ejemplo 2. Podemos sacar provecho del ejemplo (1) y de la desigualdad de Cauchy – Schwarz para encontrar una cota, no evidente, de la siguiente integral que no admite una antiderivada

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x^{1/4}} dx. \quad (2.2)$$

En efecto

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x^{1/4}} dx &\leq \left(\int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx \right)^{1/2} \left(\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{x^{1/2}} \right)^{1/2} \\ &= \left(2\sqrt{\pi/4} \right)^{1/2} \left(\int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \sqrt{\pi}} \approx 0.502, \end{aligned}$$

que es una mejor cota que si se hubiese tomado

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x^{1/4}} dx \leq \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{x^{1/4}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi^{3/4} \approx 1.11,$$

asumiendo que $|\sin x| \leq 1$. Es importante mencionar que el valor de la integral en (2.2) es cercano a 0.35.

Definición 1. Diremos que dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes, si existen constantes $a, b > 0$ tales que

$$b\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq a\|\cdot\|_2.$$

Ejemplo 3. Considere las siguientes normas en \mathbb{R}^2

$$\|x\|_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ y } \|x\|_2 = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Es claro que $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Por otro lado

$$\|x\|_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2 \max(|x|, |y|)^2} = \sqrt{2} \max\{|x|, |y|\} = \sqrt{2} \|x\|_2$$

y de acuerdo con lo anterior

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{2} \|x\|_2.$$

2.2 Espacios de Sobolev

En esta sección definiremos un espacio de Hilbert, llamado espacio de Sobolev, que es una herramienta fundamental en el estudio de la existencia y unicidad de soluciones del problema (1.1). Este tipo de soluciones son conocidas como soluciones débiles. El lector interesado en consultar sobre estos aspectos, puede revisar la referencia [3], [5].

Definición 2. Sean $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Diremos que v es la derivada débil de u , lo que escribiremos como $u' = v$. Si se verifica

$$\int_{\Omega} u\varphi' dx = - \int_{\Omega} v\varphi dx,$$

para toda función $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Ejemplo 4. Note que la función $f(x) = |x|$ no es diferenciable en $(-1, 1)$, sin embargo mostraremos que dicha función admite una derivada débil en ese intervalo. En efecto, considere una función $\varphi \in C_c^\infty(-1, 1)$ y note que

$$\int_{-1}^1 |x|\varphi'(x) dx = - \int_{-1}^0 x\varphi'(x) dx + \int_0^1 x\varphi'(x) dx.$$

al integrar por partes obtenemos

$$\int_{-1}^1 |x|\varphi' dx = -x\varphi \Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \varphi dx + x\varphi \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi dx.$$

Como $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ entonces

$$\int_{-1}^1 |x|\varphi'(x) dx = \int_{-1}^0 \varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Consideremos la función

$$v(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Es claro que

$$- \left(\int_{-1}^0 (-1)\varphi(x) dx + \int_0^1 (1)\varphi(x) dx \right) = - \int_{-1}^1 v(x)\varphi(x) dx,$$

y de acuerdo con esto

$$\int_{-1}^1 |x|\varphi'(x) dx = - \int_{-1}^1 v(x)\varphi(x) dx.$$

En el siguiente ejemplo se muestra una función de $L^2(\Omega)$ con $\Omega = (0, 2)$ que no admite derivada débil.

Ejemplo 5. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 3 & \text{si } 1 < x < 2, \end{cases}$$

vamos a probar que no existe ninguna función $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_0^2 f(x)\varphi'(x) dx = \int_0^2 v\varphi(x) dx,$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Argumentaremos por contradicción. Supongamos que existe una función $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} -\int_0^2 v\varphi(x) dx &= \int_0^2 f(x)\varphi'(x) dx = \int_0^1 x\varphi'(x) dx + 3 \int_1^2 \varphi'(x) dx \\ &= x\varphi \Big|_0^1 + \int_0^1 \varphi dx + 3\varphi \Big|_1^2 \\ &= -2\varphi(1) - \int_0^1 \varphi dx. \end{aligned}$$

es decir

$$\int_0^2 v\varphi dx - \int_0^1 \varphi dx = 2\varphi(1) \quad (2.3)$$

Considere una sucesión $\{\varphi_n\} \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\varphi_n(1) = 1/2$ y $\varphi_n(x) \rightarrow 0$ para todo $x \neq 1$. Al cambiar φ por φ_n en la ecuación (2.3) y al hacer $n \rightarrow \infty$ obtenemos

$$1 = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^2 v\varphi_n dx - \int_0^1 \varphi_n dx \right] = 0,$$

lo cual no es posible.

Es importante mencionar que si una función f es diferenciable en Ω entonces su derivada débil coincide con f' en el sentido usual.

Definición 3. Denotaremos con $H^1(\Omega)$ al subconjunto de $L^2(\Omega)$ definido como

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : f' \in L^2(\Omega)\},$$

en donde f' representa la derivada débil de f .

Para $f, g \in H^1(\Omega)$ definiremos el producto escalar sobre $H^1(\Omega)$ como

$$(f, g)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} fg + f'g' dx, \quad (2.4)$$

y puede probarse, véase referencia [5], que equipado con este producto escalar, $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con la siguiente norma

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} f^2 + (f')^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.5)$$

Definición 4. Definimos $H_0^1(\Omega)$ como la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$. Entendiéndose la clausura para la norma en (2.5).

Puede probarse que $H_0^1(\Omega)$ equipado con el producto escalar (2.4) y la norma (2.5) es también un espacio de Hilbert (véase referencia [5]).

2.2.1 Desigualdad de Poincaré

Considere una función v diferenciable en $\Omega = (0, 1)$ tal que $v(0) = 0$. Note que

$$v(x) = \int_0^x v'(s) ds \text{ para } x \in \Omega.$$

Elevando al cuadrado y al aplicar la desigualdad de Cauchy – Schwarz, obtenemos

$$v(x)^2 \leq \left[\left(\int_0^x dx \right)^{1/2} \left(\int_0^x (v'(s))^2 ds \right)^{1/2} \right]^2,$$

con lo que

$$v(x)^2 \leq x \int_0^x (v'(s))^2 ds,$$

y como $x < 1$ entonces

$$v(x)^2 \leq x \int_0^1 (v'(x))^2 dx.$$

Integrando a ambos lados obtenemos

$$\int_0^1 v(x)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (v'(x))^2 dx,$$

y esto es lo mismo que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|v'\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.6)$$

resultado que se conoce como la desigualdad de Poincaré.

De acuerdo con la definición (4) si $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_0^1 v^2 + (v')^2 dx = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v'\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.7)$$

Se sigue de (2.6) que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|v'\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.8)$$

y de acuerdo con (2.7)

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \|v'\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.9)$$

Por otro lado, es claro que

$$\|v'\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (2.10)$$

Se sigue de la ecuación (2.9) y (2.10) que

$$\|v'\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \|v'\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.11)$$

lo que implica que

$$v \rightarrow w \in H_0^1(\Omega) \longleftrightarrow v' \rightarrow w' \in L^2(\Omega)$$

A partir de este momento asumiremos que el producto interno de $H_0^1(\Omega)$ es

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_0^1 u'v' dx, \quad (2.12)$$

2.3 Teorema de representación de Riesz

En la siguiente sección presentaremos un resultado conocido como el teorema de representación de Riesz, que es una herramienta fundamental para garantizar la existencia y unicidad de soluciones débiles del problema (1.1). Es importante mencionar que las demostraciones realizadas en esta sección fueron inspiradas y adaptadas de la referencia [5].

En lo que sigue H representa un espacio de Hilbert real, y denotaremos con (\cdot, \cdot) a su producto interno. Para dos elementos $u, v \in H$ la notación $d(u, v)$ corresponde a la distancia entre u y v .

El siguiente lema es un resultado geométrico en espacios de Hilbert que permite garantizar, en un conjunto cerrado y convexo K , la existencia de un único elemento u que minimiza la distancia entre K a un cierto elemento h del espacio.

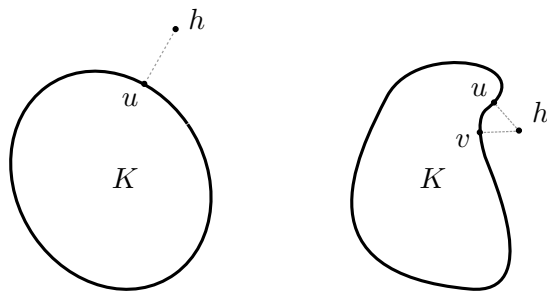


Figura 2.1: Representación de conjuntos K uno convexo, izquierda, y otro no convexo, derecha, en el plano. Nótese la importancia de la convexidad para garantizar la existencia de un único punto u que minimiza la distancia entre K y un punto h .

Lema 1. Sea H un espacio de Hilbert real, y K un subconjunto cerrado y convexo no vacío de H . Para todo $h \in H$ existe un único $u \in K$ tal que $d(u, h) \leq d(v, h)$ para todo $v \in K$.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en K tal que

$$\|h - x_n\| \rightarrow \inf_{v \in K} \|h - v\| = d. \quad (2.13)$$

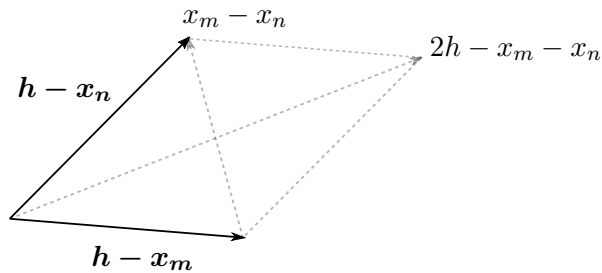


Figura 2.2: Representación de la identidad del paralelogramo para los vectores $h - x_n$ y $h - x_m$.

Probaremos que esta sucesión es de Cauchy. Sean x_m y x_n , elementos de $\{x_n\}$ y considere los vectores $h - x_m$ y $h - x_n$.

De acuerdo con la identidad del paralelogramo tenemos que

$$\|2h - x_m - x_n\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2\|h - x_m\|^2 + 2\|h - x_n\|^2,$$

note que

$$\|2h - x_m - x_n\|^2 = 4\left\|h - \frac{x_m + x_n}{2}\right\|^2 \geq 4d^2$$

en donde $\frac{x_m + x_n}{2}$ es un elemento de K debido a la convexidad de este conjunto. De acuerdo con esto

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|h - x_m\|^2 + 2\|h - x_n\|^2 - 4\left\|h - \frac{x_m + x_n}{2}\right\|^2$$

y se sigue de (2.13) que

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\|h - x_m\|^2 + 2\|h - x_n\|^2 - 4d^2.$$

Haciendo $n, m \rightarrow \infty$ tenemos que $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$, con lo que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy. Como K es un subconjunto cerrado en el espacio de Hilbert, existe un único $u \in K$ tal que $x_n \rightarrow u$.

□

El elemento u de la prueba de (1) se representa comúnmente con $Proj_K h$, y esto se lee como la proyección de h sobre K .

A partir de este momento, para un operador $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ de valor real, lineal y continuo denotaremos con K_F al núcleo de F , esto es

$$K_F = \{w \in H : F(w) = 0\}.$$

Puede probarse que K_F es un conjunto cerrado y convexo.

Teorema 1 (Representación de Riesz). Sea $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ un operador lineal y continuo en un espacio de Hilbert real H . Para cada F existe un único $u \in H$ tal que

$$F(v) = (u, v) \quad \text{para todo } v \in H. \quad (2.14)$$

Demostración. Para un $h \in H \setminus K_F$ considere el elemento $v_0 = h - \text{Proy}_{K_F}h$. Note que $(v_0, w) = 0$ para todo $w \in K_F$. Puede probarse, véase referencia [5], que todo elemento $v \in H$ puede escribirse en la forma

$$v = \lambda v_0 + w, \quad (2.15)$$

con $w \in K_F$ y un cierto escalar λ .

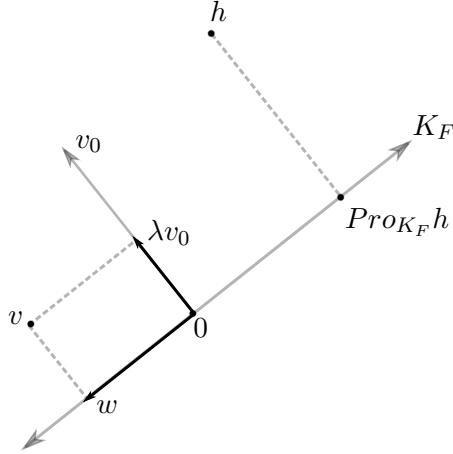


Figura 2.3: Representación en el plano del conjunto K_F y de los los vectores v_0 y w .

Al aplicar F a ambos lados en (2.15), obtenemos

$$F(v) = \lambda F(v_0) + F(w),$$

con lo que

$$\lambda = \frac{F(v)}{F(v_0)},$$

y al reemplazar λ en (2.15)

$$v = \frac{F(v)}{F(v_0)}v_0 + w,$$

haciendo el producto punto de esta última expresión con $u = \beta v_0$, $\beta \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$(u, v) = \beta \frac{F(v)}{F(v_0)} \|v_0\|^2.$$

Note que si hacemos $\beta = \frac{F(v_0)}{\|v_0\|^2}$, entonces

$$(u, v) = F(v),$$

para todo $v \in H$. Lo que indica que el elemento u , independiente de la elección de v , que satisface (2.15) es

$$u = \frac{F(v_0)}{\|v_0\|^2}v_0.$$

La unicidad se sigue de manera inmediata al notar que si existiese otro u^* que verifique (2.14), entonces

$$0 = F(u) - F(u^*) = (u - u^*, u) \text{ para todo } u \in H,$$

con lo que $u = u^*$. □

A continuación ilustraremos una propiedad de la solución u del operador F del teorema anterior. Con este propósito considere el siguiente funcional

$$P_u(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - (u, v),$$

con $v \in H$ y u fijo de H .

Note que $P_u(v)$ puede escribirse como:

$$P_u(v) = \frac{1}{2}\|v - u\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2.$$

En donde $-\frac{1}{2}\|u\|^2$ es el menor valor posible de P_u cuando $v = u$. Por este motivo diremos que la solución u del teorema anterior minimiza el funcional

$$J(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - F(v). \tag{2.16}$$

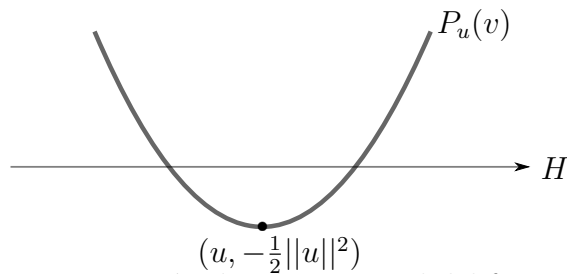


Figura 2.4: Representación dos dimensional del funcional $P_u(v)$.

Es importante mencionar que en los contextos de la deflexión de estructuras elásticas, el funcional en (2.16) está asociado al funcional de la energía potencial elástica [4].

2.4 Teorema del punto fijo de Banach

En esta sección se presentará un resultado clásico del análisis matemático elemental relacionado con los operadores contractivos definidos de un espacio de Banach en si mismo.

Definición 5. Sea T un operador de un espacio de Banach B es si mismo. Diremos que T es contractivo si existe una constante α con $0 < \alpha < 1$, tal que

$$\|T(x) - T(y)\| < \alpha\|x - y\|,$$

para todo $x, y \in B$

Teorema 2 (Punto fijo de Banach). Sea B un espacio de Banach y T un operador contractivo $T : B \rightarrow B$. Entonces T admite único punto fijo en B , es decir, existe un $p \in B$ tal que $T(p) = p$.

Demostración. Para un $x \in B$, considere la sucesión $\{x_n\}$, definida como $x_n = T^n(x)$ en donde T^n es la n -ésima composición de T consigo mismo.

Puede probarse que

$$\|T^{n+1}(x) - T^n(x)\| < \alpha^n \|T(x) - x\|. \quad (2.17)$$

De acuerdo con esto para $m > n$, se sigue de la desigualdad triangular que

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_{n+2} - x_{n+1}\| + \dots + \|x_m - x_{m-1}\|,$$

y se sigue de (2.17) que la expresión anterior se puede escribir como

$$\|x_m - x_n\| \leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{m-1}) \|T(x) - x\|,$$

es decir

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1 - \alpha} \|T(x) - x\|.$$

Si hacemos $n, m \rightarrow \infty$, debido a que $0 < \alpha < 1$, entonces $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$, y esto implica que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y como B es un espacio de Banach entonces $x_n \rightarrow p \in B$.

A continuación probaremos que p es un punto fijo de T . En efecto, de acuerdo con la desigualdad triangular note que

$$\|T(p) - p\| \leq \|T^n(p) - T(p)\| + \|T^n(p) - p\| \leq \alpha \|T^{n-1}(p) - p\| + \|T^n(p) - p\|$$

y si hacemos $n \rightarrow \infty$ entonces $\|T(p) - p\| \rightarrow 0$ con lo que $T(p) = p$. Siendo p un punto fijo, supongamos que existen dos elementos p, p^* de B tales que $T(p) = p$ y $T(p^*) = p^*$ entonces

$$\|p - p^*\| = \|T(p) - T(p^*)\| \leq \alpha \|p - p^*\|,$$

y lo anterior es una contradicción ya que $0 < \alpha < 1$, de acuerdo con esto $p = p^*$ y por lo tanto p es único. \square

2.5 Función de Green

En esta sección se encontrará una función llamada función de Green asociada al problema (1.1), esa función es de especial importancia para garantizar la existencia y unicidad de soluciones de (1.2) en el espacio de funciones $L^2(\Omega)$ con $\Omega = (0, 1)$.

Si en el problema (1.1) integramos entre 0 y x obtenemos

$$u'(x) = - \int_0^x f(s) ds + A.$$

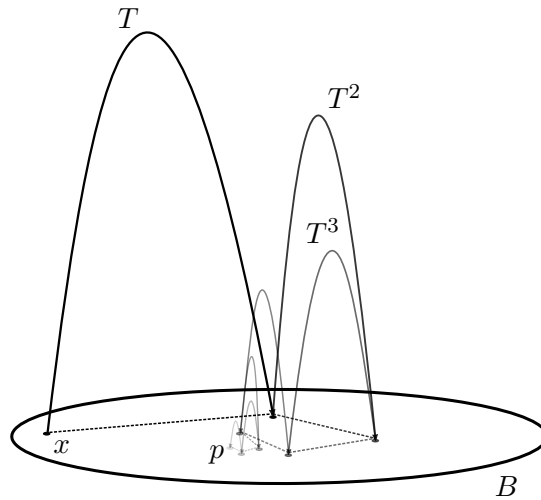


Figura 2.5: Representación de un operador T contractivo de un espacio de Banach B en si mismo.

Si hacemos $g(x) = \int_0^x f(s) ds$, la expresión anterior se puede escribir como

$$u'(x) = -g(x) + A,$$

y al integrar de nuevo, obtenemos

$$u(x) = - \int_0^x g(s) ds + Ax + B.$$

Integrando por partes esta última expresión, se obtiene

$$u(x) = \int_0^x s f(s) ds - xg(x) + Ax + B.$$

Para determinar el valor de B empleamos la condición de frontera $u(0) = 0$, y de acuerdo con esto $B = 0$, por lo tanto

$$u(x) = \int_0^x (s - x) f(s) ds + Ax. \quad (2.18)$$

Por otro lado, como $u(1) = 0$, entonces

$$A = \int_0^1 (1 - s) f(s) ds.$$

De acuerdo con esto, la ecuación (2.18) se puede escribir como

$$u(x) = \int_0^x (s - x) f(s) ds + \int_0^1 x(1 - s) f(s) ds,$$

o de manera equivalente

$$u(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds, \quad (2.19)$$

haciendo

$$G(x, s) = \begin{cases} s(1-x) & \text{si } 0 \leq s \leq x, \\ x(1-s) & \text{si } x \leq s \leq 1, \end{cases} \quad (2.20)$$

La función $G(x, s)$ se conoce como la función del Green del problema (1.1), y nos permite encontrar la solución de este problema para un determinado f .

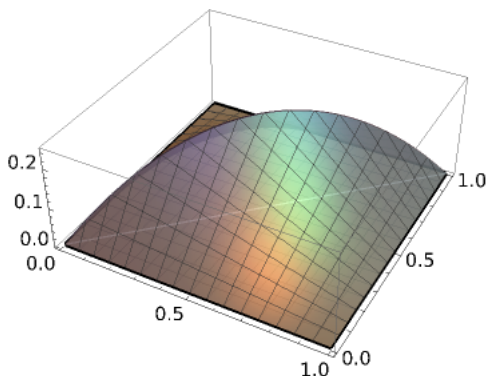


Figura 2.6: Gráfico de la función de Green del problema (1.1).

2.6 El principio del máximo

El principio del máximo es un resultado del análisis clásico que nos permite determinar ciertas propiedades geométricas de ciertas soluciones, de problemas en el contexto de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, asociadas a operadores elípticos. La versión uno dimensional de este resultado es una consecuencia inmediata del criterio de la segunda derivada, visto en los cursos elementales de cálculo.

Teorema 3. Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, si $u'' < 0$ en Ω , entonces podemos afirmar que el menor valor de u se alcanza en $\partial\Omega$.

Demostración. Supongamos que u admite un mínimo local en un punto $p \in \Omega$, empleando el desarrollo de Taylor de u cerca de p obtenemos

$$u(x) = u(p) + u'(p)(x-p) + \frac{1}{2}u''(z)(x-p)^2,$$

en donde z se encuentra entre p y x . Teniendo en cuenta que $u(p) \leq u(x)$ para todo x cerca de p se tiene que

$$u(x) - u(p) = u'(p)(x-p) + \frac{1}{2}u''(z)(x-p)^2 \geq 0,$$

y ya que $u'(p) = 0$ entonces $u''(z) \geq 0$ lo que es una contradicción con el supuesto de que $u'' < 0$. \square

2.7 Existencia y unicidad de soluciones débiles

En esta sección se identifican dos tipos de soluciones asociadas al problema (1.1) conocidas como soluciones clásicas y soluciones débiles. El lector interesado en consultar más sobre estos aspectos puede revisar la referencia [5].

Note en particular que si $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ entonces $-u''$ puede tomarse como f en (1.1) siendo u , la solución de dicho problema.

Ejemplo 6. Considere la función $u_n(x) = \frac{1}{2}n^2x(1-x)^n$. Un cálculo directo muestra que

$$u_n''(x) = \frac{1}{2}n^3(1-x)^{-2+n}(-2+x+nx). \quad (2.21)$$

Aquí u_n es entonces la solución del problema (1.1) en donde $f_n = -u_n''$ en (2.21)

Definición 6 (Solución clásica). Una función $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ se llama solución clásica del problema (1.1) si $-u'' = f$ para todo $x \in \Omega$.

Note que la función u_n en el ejemplo (6) es una solución clásica de (1.1) tomando f_n como $-u''$.

La siguiente figura se muestra el gráfico de u_n , para distintos valores de n .

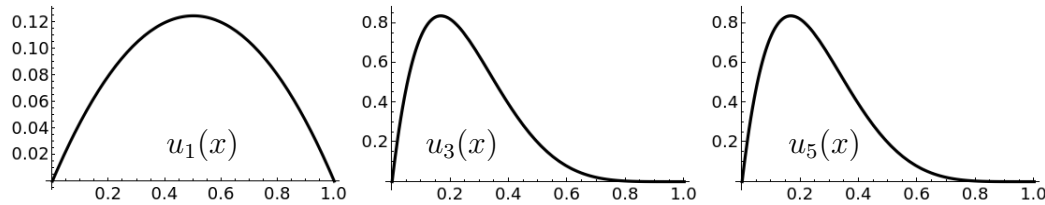


Figura 2.7: Gráfico de la solución u_n del problema (1.1) para $n = 1, 3, 5$.

En la siguiente figura se muestra los gráficos de $-u_n'' = f_n$ para distintos valores de n .

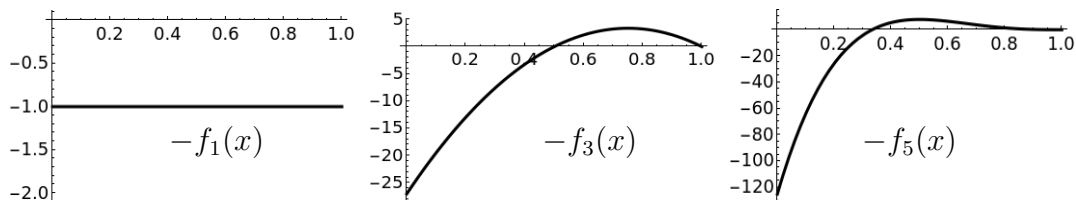


Figura 2.8: Gráfico de la función $f_n = -u_n''$ del problema (1.1) tomando $n = 1, 3, 5$.

Comúnmente en la deflexión de estructuras elásticas los cuerpos son sometidos a fuerzas que se aplican de forma local o en sectores específicos. Podemos modelar esta situación considerando la siguiente distribución de fuerzas f_ϵ para el problema (1.1).

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 1/\epsilon & \text{si } 1/2 - \epsilon/2 \leq x \leq 1/2 + \epsilon/2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

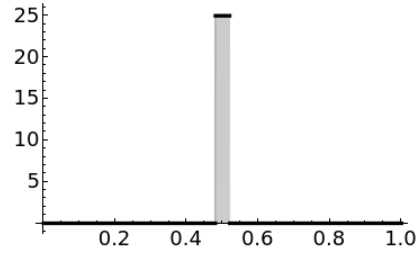


Figura 2.9: Gráfico de la distribución de fuerzas f_ϵ para $\epsilon = 1/25$.

Al integrar $-u''_\epsilon = f_\epsilon$ entre 0 y x obtenemos

$$u'_\epsilon(x) = - \int_0^x f_\epsilon ds + A \equiv -g_\epsilon(x) + A,$$

en donde

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1/2 - \epsilon/2, \\ \frac{x}{\epsilon} - \frac{1/2 - \epsilon/2}{\epsilon} & \text{si } 1/2 - \epsilon/2 \leq x \leq 1/2 + \epsilon/2, \\ 1 & \text{si } 1/2 + \epsilon/2 \leq x. \end{cases}$$

Integrando de nuevo, obtenemos

$$u_\epsilon(x) = -h_\epsilon(x) + Ax + B,$$

con

$$h_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1/2 - \epsilon/2, \\ \left(\frac{x}{\sqrt{2\epsilon}} - \frac{1/2 - \epsilon/2}{\sqrt{2\epsilon}} \right)^2 & \text{si } 1/2 - \epsilon/2 \leq x \leq 1/2 + \epsilon/2, \\ x - 1/2 & \text{si } 1/2 + \epsilon/2 \leq x. \end{cases}$$

De acuerdo con lo anterior, y teniendo en cuenta las condiciones de frontera, es claro que $B = 0$ y $A = h_\epsilon(1)$. Es decir

$$u_\epsilon(x) = -h_\epsilon(x) + \frac{x}{2}.$$

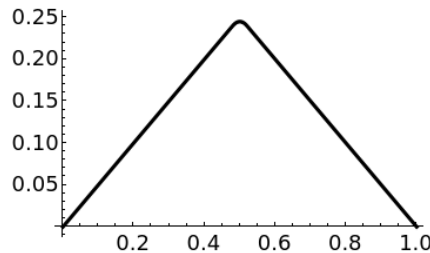


Figura 2.10: Gráfico de $u_\epsilon(x)$, para $\epsilon = 1/25$.

Es necesario mencionar que la solución anterior, se hubiese podido encontrar al reemplazar f por f_ϵ en la ecuación (2.19).

En la figura 2.10 se presenta el gráfico de la función $u_\epsilon(x)$. Puede probarse que en el caso límite $\epsilon \rightarrow 0$ dicha función no es diferenciable. En este sentido, la solución no es clásica como se ha mencionado al principio de esta sección. Esto motiva un nuevo tipo de definición que será abordada en el transcurso del trabajo de investigación, conocida como solución débil.

Definición 7. (Solución débil) Una función $u \in H_0^1(\Omega)$ con $\Omega = (0, 1)$ es llamada solución débil del problema (1.1), si verifica

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 fv dx, \quad (2.22)$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

Capítulo 3

Resultados principales

En este capítulo se presentan los resultados principales del trabajo de investigación. El capítulo se ha dividido en dos partes. En la primera se resuelve el problema de existencia y unicidad de soluciones débiles del problema (1.1) y se presentan algunas propiedades cualitativas de la distribución- de puntos críticos de este problema en relación con el dato f . En la segunda parte del capítulo se resuelve el problema de existencia y unicidad de soluciones en el espacio $L^2(\Omega)$ con $\Omega = (0, 1)$ del problema (1.2), y también se presentan algunos resultados sobre la distribución de puntos críticos de la solución de este problema.

3.1 Caso lineal

Esta sección se muestra la existencia de soluciones débiles del problema (1.1) junto con algunas propiedades cualitativas del conjunto de puntos críticos de la solución de este problema.

3.1.1 Existencia y unicidad de soluciones débiles

De acuerdo con (2.12), la ecuación (2.22) puede escribirse como

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = F(v),$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ y en donde $F(v)$ esta dada por la expresión

$$F(v) = \int_0^1 f v \, dx,$$

para $f \in L^2(\Omega)$.

Lema 2. El operador F es lineal y continuo en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración. La linealidad de F es una consecuencia inmediata de las propiedades de la integral. Para probar su continuidad considere una sucesión arbitraria $\{v_n\}$ de $H_0^1(\Omega)$ tal que $v_n \rightarrow v$ en H_0^1 , esto quiere decir que para cada $\epsilon > 0$ existe un N tal que

$$\|v - v_n\|_{H_0^1(\Omega)} < \epsilon,$$

siempre que $n \geq N$.

Se sigue de la desigualdad de Cauchy - Schwarz que

$$|F(v) - F(v_n)| \leq \int_0^1 |f| |v - v_n| dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v - v_n\|_{L^2(\Omega)},$$

y de acuerdo con la desigualdad de Poincaré

$$|F(v) - F(v_n)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v' - v_n'\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v - v_n\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Lo que prueba la continuidad de F en v . \square

Lema 3. El conjunto K_F es cerrado y convexo en $H_0^1(\Omega)$

Demostración. Sean $v, w \in K_F$ y considere escalares α y β tales que $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ y $\alpha + \beta = 1$. Note que $F(\alpha v + \beta w) = \alpha F(v) + \beta F(w) = 0$, y de acuerdo con esto K_F es convexo.

K_F es cerrado como una consecuencia inmediata de la continuidad de F . \square

Teorema 4. El problema (1.1) admite una única solución débil en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración. De acuerdo con los lemas (2) y (3), el operador F verifica las hipótesis del Teorema de representación de Riesz, con lo que existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$F(v) = (u, v)_{H_0^1(\Omega)},$$

expresión que coincide con (2.22). \square

3.1.2 Valores extremos a partir de la función de Green

Note que si la solución u del problema (1.1) es al menos C^1 , y como $u(0) = u(1)$, entonces se sigue del Teorema de Rolle, que existe al menos un punto $p \in \Omega$ tal que $u'(p) = 0$. En esta sección exploraremos este resultado empleando para ello la función de Green asociada a (1.1).

De acuerdo con (2.19) la solución del problema (1.1) es

$$u(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds.$$

Empleando la regla de Leibniz, de derivación bajo el signo de la integral, véase [1], obtenemos

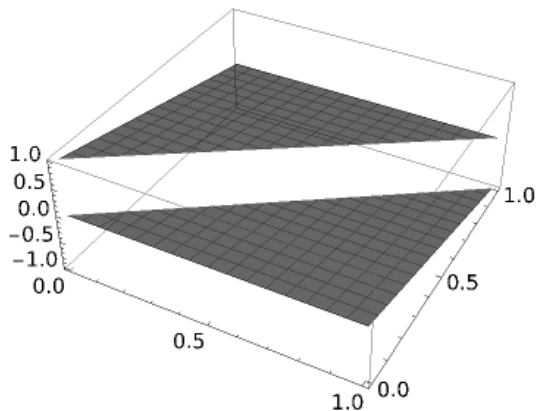
$$u'(x) = \int_0^1 \frac{\partial G(x, s)}{\partial x} f(s) ds,$$

en donde

$$\frac{\partial G(x, s)}{\partial x} = \begin{cases} -s & \text{si } 0 \leq s \leq x, \\ 1 - s & \text{si } x \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Para simplificar la escritura hagamos la identificación $g(x, s) \equiv \partial G(x, s) / \partial x$, con lo que

$$u'(x) = \int_0^1 g(x, s) f(s) ds. \quad (3.1)$$

Figura 3.1: Gráfico de $g(x, s)x$

Lema 4. La función u' definida en (3.1), es continua en $\Omega = (0, 1)$ para todo $f \in L^2(\Omega)$.

Demostración. Sea $x_0 \in \Omega$ y α un número arbitrario tal que $x_0 + \alpha \in \Omega$. Considere la diferencia

$$u'(x_0) - u'(x_0 + \alpha) = \int_0^1 (g(x_0, s) - g(x_0 + \alpha, s))f(s) ds.$$

Como una consecuencia de la desigualdad de Cauchy – Schwarz obtenemos

$$|u'(x_0) - u'(x_0 + \alpha)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_0^1 (g(x_0, s) - g(x_0 + \alpha, s))^2 ds \right)^{1/2},$$

y como

$$g(x_0, s) - g(x_0 + \alpha, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq s \leq x_0, \\ 1 & \text{si } x_0 \leq s \leq x_0 + \alpha, \\ 0 & \text{si } x_0 + \alpha \leq s \leq 1, \end{cases}$$

entonces

$$|u'(x_0) - u'(x_0 + \alpha)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{|\alpha|},$$

lo que demuestra la continuidad de u' . \square

Corolario 1. Si en el problema (1.1) tomamos $f \geq 0$ con $f \in L^2(\Omega)$ entonces existe al menos un punto $p \in (0, 1)$ en donde $u'(p) = 0$.

Demostración. De acuerdo con (3.1), y como $f \geq 0$ se tiene que

$$u'(0) = \int_0^1 (1 - s)f(s) ds > 0,$$

y

$$u'(1) = - \int_0^1 sf(s) ds < 0,$$

se desprende entonces de la continuidad de u' en Ω que existe al menos un punto $p \in (0, 1)$ en donde $u'(p) = 0$. \square

Lema 5. Para cualquier $f \in L^2(\Omega)$ existe al menos un punto $p \in \Omega$ tal que la función u' definida en (3.1) es nula.

Demostración. Como $u(0) = u(1)$, se sigue del Teorema de Rolle, que existe al menos un punto $p \in \Omega$ tal que $u'(p) = 0$. \square

3.1.3 Derivada en la frontera

En esta sección estudiaremos el comportamiento de la derivada de la solución u del problema (1.1) en 0 y 1.

Lema 6. Sean $\Omega = (0, 1)$ y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(0) = 0$ y $-u'' > 0$ en Ω , entonces $u'(0) > 0$.

Demostración. Debido a que $-u'' > 0$ se sigue del principio del máximo que u no admite mínimos locales en Ω .

Tomando $p \in \Omega$, $x \in (0, r)$ con $r < p$ y $\beta > 0$, considere la siguiente función

$$v(x) = e^{-\beta(x-p)^2} - e^{-\beta p^2}.$$

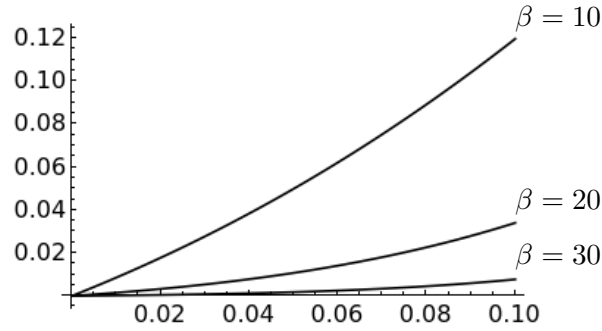


Figura 3.2: Gráficos de la función v con $p = 0.5$ y $\beta = 10, 20, 30$.

Se puede probar que

$$v'(x) = -2\beta(x-p)e^{-\beta(x-p)^2},$$

y que

$$v''(x) = -2\beta e^{-\beta(x-p)^2} + 4\beta^2(x-p)^2 e^{-\beta(x-p)^2}.$$

Note que $u > 0$ en Ω y de acuerdo con esto $u(0) < u(x)$ para todo $x \in (0, 1)$, como se sabe por la solución de nuestro problema que $u(0) = 0$ entonces es claro que

$$0 < u(x) \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Para $x \in (0, r)$ y un número $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño tendríamos que

$$0 \leq u(x) - \epsilon v(x),$$

y para un $0 < h < r$ tenemos que

$$0 \leq \frac{u(h)}{h} - \frac{\epsilon v(h)}{h}.$$

Ahora, al hacer $h \rightarrow 0$ obtenemos

$$0 \leq u'(0) - 2\epsilon\beta p e^{-\beta p^2},$$

como la cantidad $2\epsilon\beta p e^{-\beta p^2}$ es estrictamente positiva entonces $u'(0) > 0$. \square

Un proceso similar muestra que $u'(1) \neq 0$. Es importante mencionar que este resultado es una consecuencia de la geometría lineal del dominio. En espacios más generales esto no siempre es cierto.

3.1.4 Reflexión sobre el eje x

Se ha demostrado que $u'(0) > 0$, y como una consecuencia de esto, debido a la continuidad de u' existe un $\delta > 0$ tal que $u'(x) > 0$ para todo $x \in (0, \delta)$.

En esta sección identificaremos con precisión dicho δ en relación con el comportamiento de la función f en el problema (1.1).

Considere un número $x_0 \in (0, 1)$ tal que $2x_0 \leq 1$, y denotemos con I al intervalo $I = (x_0, 2x_0)$. Para todo $x \in I$ sea $x^* = 2x_0 - x$, y consideremos la función

$$u^*(x) = u(x^*),$$

cuyo comportamiento se muestra en la siguiente figura.

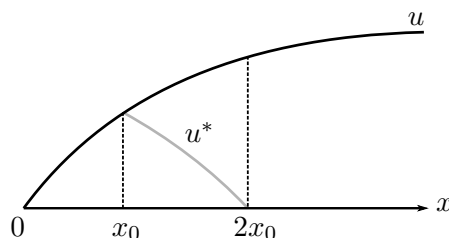


Figura 3.3: Gráficos de la función u y de u^* .

Sea $w(x) = u(x) - u^*(x)$ con $x \in I$, observe que $w(x_0) = 0$ y que $w(2x_0) > 0$. Un cálculo directo muestra que

$$w'(x) = u'(x) + u'(2x_0 - x), \quad (3.2)$$

y que

$$w''(x) = u''(x) - u''(2x_0 - x) = -f(x) + f(2x_0 - x). \quad (3.3)$$

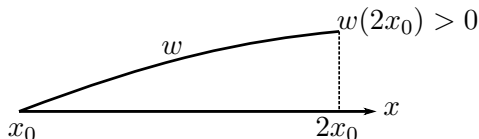


Figura 3.4: Gráfico de la función w .

Teorema 5. Sea u la solución del problema (1.1) con f creciente y $f > 0$ en Ω . Entonces u no admite ningún punto crítico en $[0, 1/2]$.

Demostración. Si $f > 0$ y creciente en $(0, 1)$ entonces de acuerdo con (3.3) se sigue que $-f(x) + f(2x_0 - x) < 0$ en I . Note que se verifican las hipótesis del Lema (6) para la función w , y por lo tanto $w'(x_0) > 0$.

De acuerdo con (3.2)

$$w'(x_0) = 2u'(x_0),$$

y por lo tanto $u'(x_0) > 0$.

La prueba finaliza al realizar este procedimiento de manera continua para todo x_0 tal que $2x_0 \leq 1$. \square

3.2 Caso semilineal

En esta sección estudiaremos el problema (1.2) en donde f es una función de valor real que depende de la deflexión u de la cuerda.

3.2.1 Valores y funciones propias

Definición 8. Una constante λ es llamada valor propio del problema de Dirichlet si existe una función $u \neq 0$ tal que

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u \text{ en } \Omega, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Lema 7. Si λ es un valor propio de (3.4) entonces $\lambda > 0$.

Demostración. Sea $v \in H_0^1(\Omega)$ una función arbitraria, al multiplicar v por la primera ecuación de (3.4) e integrar ambos lados, obtenemos

$$-\int_0^1 u'' v \, dx = \lambda \int_0^1 uv \, dx.$$

Integrando por partes

$$-u'v \Big|_0^1 + \int_0^1 u'v' \, dx = \lambda \int_0^1 uv \, dx.$$

si hacemos $v = u$ obtendríamos

$$\int_0^1 (u')^2 \, dx = \lambda \int_0^1 u^2 \, dx.$$

Note que como ambas integrales son no negativas, entonces $\lambda > 0$. \square

Observe que $u(x) = A \sin(\sqrt{\lambda}x) + B \cos(\sqrt{\lambda}x)$ satisface la primera ecuación de (3.4). Como $u(0) = 0$ entonces $B = 0$ y como $u(1) = 0$ entonces $\sqrt{\lambda} = k\pi$ ($\lambda = k^2\pi^2$) por lo tanto.

$$u_k(x) = A_k \sin(k\pi x),$$

en donde A_k es una constante que puede tomarse con el propósito de normalizar la función propia en $L^2(\Omega)$, es decir

$$A_k \left(\int_0^1 \sin^2(k\pi x) dx \right)^{1/2} = 1,$$

y de acuerdo con esto $A_k = \sqrt{2}$.

Lo anterior permite escribir las funciones propias de (3.4) como

$$u_k(x) = \sqrt{2} \sin(\pi k x).$$

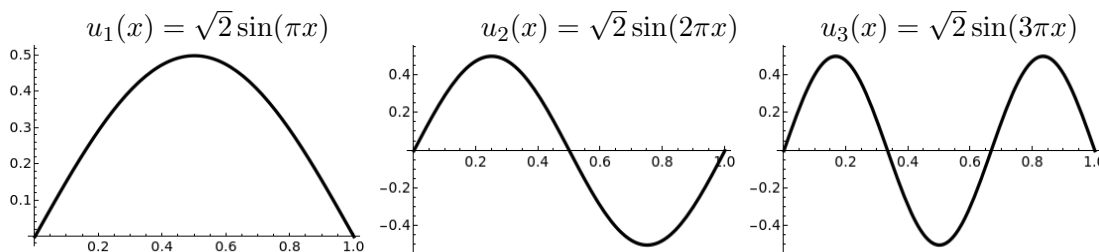


Figura 3.5: Gráficos de las funciones propias u_1 , u_2 y u_3 .

3.2.2 Existencia y unicidad

En la siguiente sección se demostrará que el problema (1.2) admite un única solución en el espacio de funciones $L^2(\Omega)$. El lector interesado puede revisar versiones más generales de este tipo de problema en las referencias [3] y [6].

Para la función de Green en (2.20) y $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ se puede comprobar que

$$\left(\int_Q G(x, s)^2 dx ds \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{10}}{30}.$$

Sea ahora T un operador definido como

$$T[v](x) = \int_0^1 G(x, s) f(v(s)) ds. \quad (3.5)$$

Lema 8. Si f es una función de valor real acotada, es decir, existe una constante M positiva, tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces el operador T es un operador de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$.

Demostración. Como una consecuencia de la desigualdad de Cauchy – Schwarz obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 T[v]^2(x) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^1 G(x, s) f(v(s)) ds \right)^2 dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 G(x, s)^2 ds \int_0^1 f(v(s))^2 ds \right) dx \\ &= \frac{1}{90} \int_0^1 f(v(s))^2 ds \leq \frac{M^2}{90} \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\|T[v](x)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{10}}{30} M < \infty,$$

y de acuerdo con esto T es un operador de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$. \square

El resultado anterior se puede extender para garantizar que el problema (1.2) admita una única solución $u \in L^2(\Omega)$, para ello se empleará el Teorema de punto fijo de Banach, y el hecho de que la función f en (1.2) sea contractiva, esto se consigna en la siguiente definición.

Definición 9 (Condición de Lipschitz). Sean (M, d_M) y (N, d_N) dos espacios métricos, diremos que una función $f : M \rightarrow N$ satisface la condición de Lipschitz si existe una constante α tal que

$$d_N(f(x) - f(y)) \leq \alpha d_M(y, x) \text{ para todo } x, y \in M$$

La constante α es conocida como la constante de Lipschitz de f .

Lema 9. Sea f en (3.5) una función que satisface la condición de Lipschitz, con constante de Lipschitz α . Si $\frac{\sqrt{10}}{30}\alpha < 1$, entonces T es un operador contractivo de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$.

Demostración. Sea w y v funciones de $L^2(\Omega)$, entonces

$$|T[w](x) - T[v](x)| \leq \int_0^1 |G(x, s)(f(w(s)) - f(v(s)))| ds,$$

al elevar al cuadrado y como una consecuencia de la desigualdad de Cauchy – Schwarz, obtenemos

$$|T[w](x) - T[v](x)|^2 \leq \int_0^1 G(x, s)^2 ds \int_0^1 (f(w(s)) - f(v(s)))^2 ds,$$

integrando entre 0 y 1 con respecto de x

$$\int_0^1 |T[w](x) - T[v](x)|^2 dx \leq \frac{1}{90} \int_0^1 (f(w(s)) - f(v(s)))^2 ds. \quad (3.6)$$

Como f es una función contractiva de constante de contractividad α , entonces (3.6) se puede escribir como

$$\int_0^1 |T[w](x) - T[v](x)|^2 dx \leq \frac{1}{90} \alpha^2 \int_0^1 |w(s) - v(s)|^2 ds.$$

y al sacar raíz obtenemos

$$\|T[w](x) - T[v](x)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{10}}{30} \alpha \|w - v\|_{L^2(\Omega)},$$

\square

Teorema 6. Si f en (1.2) es una función que satisface la condición de Lipschitz, con constante de Lipschitz α , tal que $\frac{\sqrt{10}}{30}\alpha < 1$, entonces el problema (1.2) admite una única solución $u \in L^2(\Omega)$.

Demostración. De acuerdo con el lema (9) el operador T es contractivo de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$, y se sigue del Teorema de punto fijo de Banach que T admite un punto fijo, de esta manera existe un único $u \in L^2(\Omega)$ tal que

$$u(x) = T[u](x) = \int_0^1 G(x, s)f(u(s)) ds,$$

ecuación que coincide con la expresión (2.19) al cambiar $f(s)$ por $f(u(s))$. \square

En el siguiente ejemplo se emplea un algoritmo recursivo, elaborado en Mathematica y Python, para aproximar la solución de un problema semilineal.

Ejemplo 7. Si en el problema (1.2) se toma $f(x) = \cos(x)$; evaluado en u tendríamos $f(u) = \cos(u)$ y este problema tomaría la siguiente forma

$$\begin{cases} -u'' = \cos(u) \text{ en } \Omega = (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Encontraremos la solución de este problema empleando la técnica que se desarrolló para la demostración del Teorema de punto fijo de Banach, para esto considere la sucesión definida de forma recurrente, como

$$T^n(x) = \int_0^1 G(x, s)f(T^{n-1}(s)) ds, \quad T^0(x) = x.$$

La siguiente figura muestra las funciones T^1 , T^2 y T^3 .

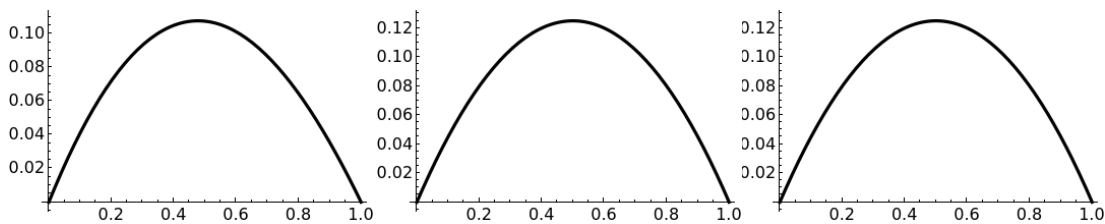


Figura 3.6: Gráficos de la funciones T^1 , T^2 y T^3 .

Capítulo 4

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo se presentaron algunas técnicas del análisis funcional empleadas para demostrar la existencia y unicidad de soluciones débiles y en el espacio de funciones $L^2(\Omega)$ de los problemas (1.1) y (1.2) respectivamente. Aunque sobre estos temas se puede encontrar abundante literatura, su construcción teórica, interpretación y comprensión siempre se plantea como un desafío para cualquier profesional de la matemática.

De manera adicional, también se presentaron algunos resultados, como consecuencia del principio del máximo en una variable, de las propiedades cualitativas del conjunto de puntos críticos de la solución del problema (1.1). Estos resultados permiten dilucidar el comportamiento geométrico de la solución de este problema en relación con el dato f del mismo.

Es importante mencionar que gracias a la técnica que se empleó para garantizar la existencia y unicidad de soluciones en $L^2(\Omega)$ para el problema (1.2), se pudo realizar un pequeño programa en Mathematica para calcular y visualizar una aproximación de las soluciones de este problema.

Se espera en un futuro, extender los resultados de este trabajo a problemas más generales como el de la deflexión de una membrana sujeta por su frontera, que corresponde con la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

Aquí Δ es el operador de Laplace, Ω es un dominio planar y f es la distribución de fuerzas que se aplica sobre la membrana.

Es importante mencionar que aunque el problema de existencia y unicidad de soluciones del problema (4.1) está resuelto, véase referencia [5], existen preguntas abiertas sobre las propiedades cualitativas del conjunto de puntos críticos de la solución u de este problema en dominios Ω incluso convexos.

A continuación se presentan las soluciones del problema (4.1) para $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $f_1(x, y) = 1$, y para $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$, $f_2(x, y) = 2y$. Identificaremos con u_1 a la solución del primer problema y con u_2 a la solución del segundo.

Puede probarse que $-\Delta u_{1,2} > 0$ en $\Omega_{1,2}$ y que ambos dominios son convexos. Sin embargo, para el caso de u_1 el gradiente de la solución nunca se anula en la $\partial\Omega_1$,

mientras que el gradiente de u_2 se anula en los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ de $\partial\Omega_2$, note que este hecho no corresponde con el lema (6) de este trabajo de investigación.

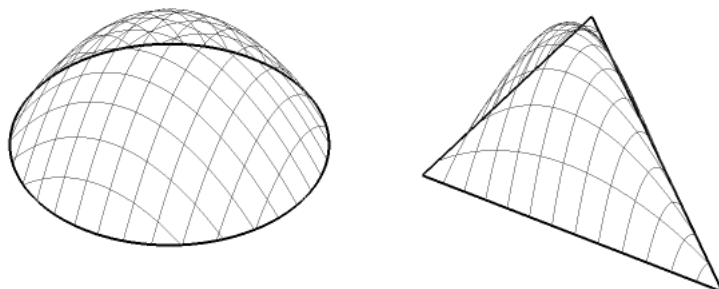


Figura 4.1: Representación de la u_1 y u_2 del problema (4.1)

Bibliografía

- [1] Apostol, T. M. (2020). Análisis matemático. Reverté.
- [2] Aubin, J. P. (2011). Applied functional analysis. John Wiley & Sons.
- [3] Brézis, H., & Funcional, A. (1984). Teoría y aplicaciones. Alianza Editorial.
- [4] Cannon, J. T., & Dostrovsky, S. (2012). The Evolution of Dynamics: Vibration Theory from 1687 to 1742: Vibration Theory from 1687 to 1742 (Vol. 6). Springer Science & Business Media.
- [5] Chipot, M. (2009). Elliptic equations: an introductory course. Springer Science & Business Media.
- [6] Griffel, D. H. (2002). Applied functional analysis. Courier Corporation.