

Santiago de Cali, agosto 14 de 2023

Doctor

**ANDRÉS FELIPE AMADOR**

Director de la carrera de Matemáticas Aplicadas

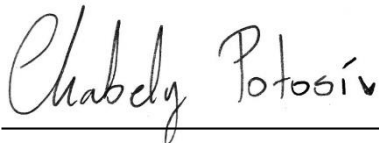
**PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA CALI**

Cordial saludo,

Por medio de la presente me permito presentar a usted las correcciones de mi Proyecto de Grado denominado **“MÉTODOS DE LA VARIABLE COMPLEJA EN EL ESTUDIO DE LA DEFLEXIÓN DE UNA MEMBRANA SUJETA POR SU FRONTERA”**, para ser evaluado por la facultad.

Espero que este proyecto cumpla con los requisitos estipulados para su aprobación.

Atentamente



---

**Chabely Tatiana Potosí Chacón**

**CC. 1002961118**

**Código estudiantil: 8936081**

**Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas**

**Pontificia Universidad Javeriana Cali**

Santiago de Cali, junio 14 de 2023

Doctor

**ANDRÉS FELIPE AMADOR**

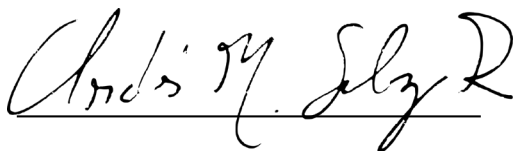
Director de la carrera de Matemáticas Aplicadas

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA CALI**

Cordial saludo,

Por medio de la presente me permito informarle que la estudiante **CHABELY TATIANA POTOSI CHACON** con código **8936081**, trabajó y finalizó bajo mi dirección, el proyecto de grado denominado **“MÉTODOS DE LA VARIABLE COMPLEJA EN EL ESTUDIO DE LA DEFLEXIÓN DE UNA MEMBRANA SUJETA POR SU FRONTERA”**, el cual considero se encuentra en condiciones para ser sometido a evaluación.

Atentamente



**ANDRÉS MAURICIO SALAZAR ROJAS**

Director del proyecto de grado

Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas

**MÉTODOS DE LA VARIABLE COMPLEJA EN EL ESTUDIO DE LA  
DEFLEXIÓN DE UNA MEMBRANA SUJETA POR SU FRONTERA**

**CHABELY TATIANA POTOSÍ CHACÓN**



Pontificia Universidad  
**JAVERIANA**  
Cali

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA  
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS  
SANTIAGO DE CALI  
2023**

**MÉTODOS DE LA VARIABLE COMPLEJA EN EL ESTUDIO DE LA  
DEFLEXIÓN DE UNA MEMBRANA SUJETA POR SU FRONTERA**

**CHABELY TATIANA POTOSÍ CHACÓN**

Trabajo de grado para optar por el título de Profesional en Matemáticas  
Aplicadas



Pontificia Universidad  
**JAVERIANA**  
Cali

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA  
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS  
SANTIAGO DE CALI  
2023**

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares matemáticos</b>	<b>7</b>
2.1	Soluciones clásicas y débiles . . . . .	7
2.2	El principio del máximo . . . . .	12
2.3	La técnica de los planos móviles . . . . .	15
2.4	Elementos de la variable compleja . . . . .	16
2.4.1	Números complejos . . . . .	16
2.4.2	Funciones de una variable compleja . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Resultados principales</b>	<b>23</b>
3.1	Regiones de puntos críticos en dominios simétricos . . . . .	23
3.2	Invarianza del operador de Laplace . . . . .	26
3.3	Aplicación de resultados y conjeturas . . . . .	28
3.4	Construcción de dominios poligonales convexos . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>Apéndice 1</b>	<b>41</b>
5.0.1	Código en FreeFEM problema (3.9) . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Apéndice 2</b>	<b>43</b>
6.0.1	Código en FreeFEM problema (3.11) . . . . .	43

## **Resumen**

En este documento estudiamos el modelo matemático para la deflexión de una membrana sujeta en su frontera utilizando técnicas de variable compleja. Presentamos algunos resultados clásicos del análisis funcional relacionados con la existencia y unicidad de soluciones, y exploramos la configuración geométrica del conjunto de puntos críticos de la solución del problema, en relación con la distribución de carga que se aplica sobre esta.

## **Abstract**

In this paper we study the mathematical model for the deflection of a membrane attached to its boundary. We present some classical results of the functional analysis related to the existence and uniqueness of solutions, and we explore the geometric configuration of the set of critical points of the solution of the problem, in relation to the load distribution applied to it.

# Capítulo 1

## Introducción

La deflexión de estructuras elásticas es un problema de un amplio recorrido histórico, involucrado en distintos campos disciplinares (véase referencia [10]). En la actualidad, muchas preguntas sobre el análisis estructural se plantean día a día y, en este sentido, siempre es interesante estudiar las propiedades físicas de los materiales y los modelos matemáticos que permitan analizar las deflexiones que estos presentan.

La deflexión de una estructura es la deformación que puede presentar el cuerpo a causa de la aplicación de una fuerza. Cuando la estructura tiene la capacidad de regresar a su forma original al momento de quitar la fuerza que se está ejerciendo, esta se considera una *deformación elástica*. Por el contrario, las deformaciones permanentes de una estructura son denominadas *deformaciones plásticas*. Aunque existen otras causas por las que se puede presentar una deformación, como por ejemplo la exposición a cambios de temperatura, lo cierto es que la deflexión en estructuras es causada principalmente por las cargas aplicadas, incluyendo las que corresponden a su propio peso (véase referencia [12]).

Si sobre una membrana planar  $\Omega$  sujeta por su frontera  $\partial\Omega$  se aplica una distribución de fuerzas  $f$ , la membrana experimenta una deflexión  $u(x, y)$ , que se puede modelar mediante el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

aquí  $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ , es el operador de Laplace. Cuando se considera la distribución de fuerzas  $f = 1$ , se entiende que la fuerza que actúa sobre la membrana es su propio peso.

Aunque el problema de existencia y unicidad de (1.1) está resuelto (véase referencia [8], [11]), y se conocen algunos resultados del problema (1.1) cuando  $\Omega$  es convexo y  $f = 1$  (véase referencia [9]), el determinar la naturaleza de los puntos críticos, y la configuración geométrica de las soluciones de este problema, para distintos dominios  $\Omega$  y distribuciones de fuerzas  $f$ , sigue siendo una cuestión abierta en la matemática. De acuerdo con lo anterior, este trabajo se centra en estudiar las configuraciones geométricas que adopta una membrana sujeta por su frontera en un dominio particular no convexo, (véase problema 3.9), cuando sobre esta se aplica una distribución de fuerzas  $f = 1$ , empleando para ello algunas técnicas analíticas como planos móviles (véase referencia [11]) y elementos de una variable compleja (véase referencia [6], [7]).



# Capítulo 2

## Preliminares matemáticos

En este capítulo se presentan algunos resultados clásicos empleados en el estudio de las soluciones para problemas elípticos de segundo orden. Con este propósito, el capítulo se divide en cuatro secciones: en la primera se presentan algunas observaciones sobre las soluciones clásicas y débiles del problema (1.1), en la segunda se hace una breve introducción del Principio del Máximo, en la tercera se describe la técnica de los planos móviles y en la última sección se presentan algunos conceptos fundamentales de las funciones de una variable compleja.

### 2.1 Soluciones clásicas y débiles

A lo largo del documento se entenderá por  $\Omega$  como un dominio acotado en  $\mathbb{R}^2$  y se denotará su frontera con  $\partial\Omega$ . Para referirnos al conjunto de las funciones continuas en  $\Omega$  se utilizará la notación  $C(\Omega)$ . Con  $C_0(\overline{\Omega})$  se entenderá por el conjunto de funciones continuas en  $\Omega$  que se anulan en  $\partial\Omega$ , con  $C^n(\Omega)$  al conjunto de las funciones cuyas  $n$ -ésimas derivadas son continuas en  $\Omega$  y con  $C^n(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$  al conjunto de funciones que se anulan en  $\partial\Omega$  y cuyas  $n$ -ésimas derivadas son continuas en  $\Omega$ . Emplearemos la notación  $C_c^\infty(\Omega)$  para representar el conjunto de funciones infinitamente diferenciables que tienen soporte compacto en  $\Omega$ . El soporte de una función  $u$  definida en  $\Omega$  es el conjunto  $\{x \in \Omega | u(x) \neq 0\}$ .

Denotaremos con  $L^2(\Omega)$  al conjunto de funciones cuadrado integrables en  $\Omega$ , es decir

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \int_{\Omega} f^2 dA < \infty \right\}.$$

Por otro lado, si  $f, g \in L^2(\Omega)$  puede probarse que la integral

$$(f, g) = \int_{\Omega} fg dA,$$

define un producto punto, y que  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert, esto quiere decir que es completo con la norma  $(f, f) = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2$ , en el sentido de que toda sucesión de Cauchy definida en  $L^2(\Omega)$  es convergente en  $L^2(\Omega)$ .

Denotaremos con  $L^1_{loc}(\Omega)$  al conjunto

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_V |f| dx < \infty \text{ para cada } V \subset\subset \Omega \right\}$$

Representaremos con  $\mathcal{B}_r$  al dominio planar correspondiente a una región circular con centro en el origen y radio  $r$ , es decir  $\mathcal{B}_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 < r\}$ .

**Definición 1.** Diremos que una función  $u$  es una solución clásica del problema (1.1), si  $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$  y  $-\Delta u = f$ .

Algunas soluciones clásicas del problema (1.1), véase referencia [5] y las que en el documento se citan, se pueden obtener derivando consecutivamente. Algunos ejemplos de esto son:

**Ejemplo 1.** Si  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h^2x^2 + k^2y^2 < 1\}$  y  $f(x, y) = 1$  en  $\Omega$ . Puede probarse derivando consecutivamente que la solución del problema (1.1) es:

$$u(x, y) = \frac{1}{2h^2 + 2k^2} (1 - h^2x^2 - k^2y^2).$$

En el caso de que  $\Omega = \mathcal{B}_r$  se tiene que  $h = k = 1/r$ , y de acuerdo con esto la solución anterior toma la siguiente forma

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(r^2 - x^2 - y^2).$$

**Ejemplo 2.** Si  $\Omega$  es la región interior del triángulo equilátero de vértices en  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, \sqrt{3})$  y  $f(x, y) = 1$  en  $\Omega$ . Puede probarse derivando consecutivamente que la solución del problema (1.1) es:

$$u(x, y) = \frac{1}{4\sqrt{3}}y \left( y + \sqrt{3}x - \sqrt{3} \right) \left( y - \sqrt{3}x - \sqrt{3} \right).$$

En la figura 2.1 se muestra el gráfico esta función y sus curvas de nivel.

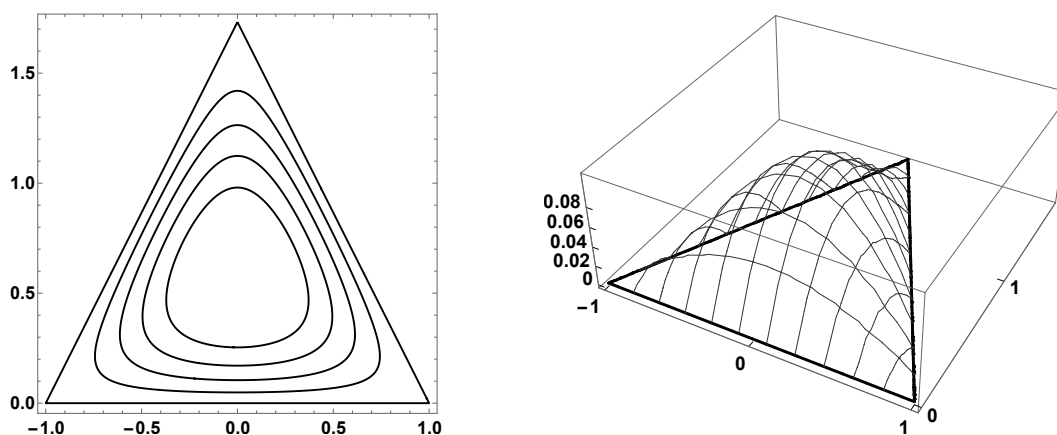


Figura 2.1: Curvas de nivel y gráfico de la solución  $u$  para el ejemplo 2.

Es importante mencionar que existen otro tipo de soluciones para el problema (1.1), las cuales no cumplen las condiciones para ser consideradas clásicas. El siguiente ejemplo da cuenta de esa afirmación.

**Ejemplo 3.** En el problema (1.1) asuma  $\Omega \equiv \mathcal{B}_1$  y para  $0 < \epsilon < 1$  considere la siguiente distribución de fuerzas

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\epsilon^2} & \text{cuando } x \in \mathcal{B}_\epsilon, \\ 0 & \text{cuando } x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_\epsilon. \end{cases}$$

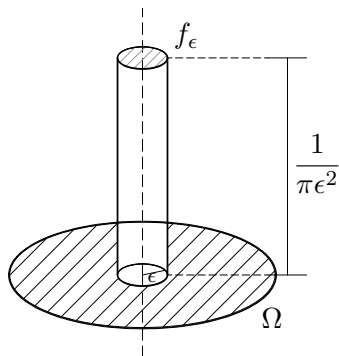


Figura 2.2: Fuerza  $f_\epsilon$  aplicada en  $\mathcal{B}$ .

Para resolver este problema se escribirá el operador de Laplace en coordenadas polares y se integrará de manera consecutiva entre 0 y  $r$ , es decir:

$$\Delta u \equiv u'' + \frac{1}{r}u',$$

de acuerdo con esto

$$\begin{aligned} -\left(u'' + \frac{1}{r}u'\right) &= f_\epsilon(r) \\ (ru')' &= -rf_\epsilon(r) \\ ru' &= -\int_0^r sf_\epsilon(s)ds + A. \end{aligned}$$

Debido a la simetría de  $u$ ,  $u'(0) = 0$  y por lo tanto  $A = 0$ . Entonces

$$ru' = \begin{cases} \frac{-r^2}{2\pi\epsilon^2} & \text{cuando } 0 \leq r < \epsilon, \\ -\frac{1}{2\pi} & \text{cuando } \epsilon \leq r \leq 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Haciendo la identificación  $g(r) = ru'(r)$  y multiplicando esta última expresión por  $1/r$  e integrando nuevamente entre 0 y  $r$ , se obtiene

$$u(r) = \int_0^r \frac{g(s)}{s} ds + B, \quad (2.2)$$

en donde

$$\int_0^r \frac{g(s)}{s} ds = \begin{cases} -\frac{r^2}{4\pi\epsilon^2} & \text{cuando } 0 \leq r < \epsilon, \\ -\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2\pi} \ln(\epsilon/r) & \text{cuando } \epsilon \leq r \leq 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Debido a la condición de frontera  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , se tiene que  $u(1) = 0$ , y de acuerdo con esto

$$B = \frac{1}{4\pi} - \frac{1}{2\pi} \ln(\epsilon).$$

Teniendo en cuenta (2.2) y (2.3) la solución  $u$  se puede escribir como

$$u(r) = \frac{1}{4\pi} - \frac{1}{2\pi} \ln(\epsilon) + \begin{cases} -\frac{r^2}{4\pi\epsilon} & \text{cuando } 0 \leq r < \epsilon, \\ -\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2\pi} \ln(\epsilon/r) & \text{cuando } \epsilon \leq r \leq 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Esta solución no admite una segunda derivada continua y de acuerdo con esto no es clásica. Sin embargo, es importante mencionar que este tipo de soluciones existen y son llamadas soluciones débiles del problema (1.1).

Para entender el concepto de solución débil, es necesario familiarizarnos con la definición de derivada débil de una función, asunto que discutiremos a continuación para el caso de una variable.

**Definición 2.** Sean  $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Diremos que  $v$  es la derivada débil de  $u$ , lo que escribiremos como  $u' = v$ . Si se verifica

$$\int_{\Omega} u\varphi' dx = - \int_{\Omega} v\varphi dx,$$

para toda función  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ .

**Ejemplo 4.** Note que la función  $f(x) = |x|$  no es diferenciable en  $(-1, 1)$ , sin embargo mostraremos que dicha función admite una derivada débil en ese intervalo. En efecto, considere una función  $\varphi \in C_c^\infty(-1, 1)$  y note que

$$\int_{-1}^1 |x|\varphi'(x) dx = - \int_{-1}^0 x\varphi'(x) dx + \int_0^1 x\varphi'(x) dx.$$

al integrar por partes obtenemos

$$\int_{-1}^1 |x|\varphi' dx = -x\varphi \Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \varphi dx + x\varphi \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi dx,$$

y como  $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$  entonces

$$\int_{-1}^1 |x|\varphi'(x) dx = \int_{-1}^0 \varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Considere la función

$$v(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

y de acuerdo con esto

$$\int_{-1}^1 |x|\varphi'(x) dx = - \int_{-1}^1 v(x)\varphi(x) dx.$$

Es importante mencionar que si una función  $f$  es diferenciable en  $\Omega$  entonces su derivada débil coincide con la derivada de  $f$  en el sentido usual.

La derivada débil de una función se puede extender para una función de varias variables, para este caso emplearemos en esta sección la notación  $\partial_{\mathbf{x}}f$  para indicar las primeras derivadas débiles de una función  $f$  de varias variables.

**Definición 3.** Denotaremos con  $H^1(\Omega)$  al subconjunto de  $L^2(\Omega)$  definido como

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \partial_{\mathbf{x}}f \in L^2(\Omega)\},$$

Para  $f, g \in H^1(\Omega)$  definiremos el producto escalar sobre  $H^1(\Omega)$  como

$$(f, g)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} fg + \nabla f \cdot \nabla g \, dA, \quad (2.5)$$

y puede probarse, véase referencia [11], que equipado con este producto escalar,  $H^1(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con la siguiente norma

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} f^2 + \|\nabla f\|^2 \, dA \right)^{1/2}. \quad (2.6)$$

**Definición 4.** Definimos  $H_0^1(\Omega)$  como la clausura de  $C_c^\infty(\Omega)$  en  $H^1(\Omega)$ . Entendiéndose la clausura para la norma en (2.6).

Puede probarse que  $H_0^1(\Omega)$  equipado con el producto escalar (2.5) y la norma (2.6) es también un espacio de Hilbert y a partir de la desigualdad de Poincaré (véase referencia [11]), se puede tomar el producto escalar en  $H_0^1(\Omega)$  como

$$(f, g)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dA.$$

**Definición 5.** Diremos que  $u$  es una solución débil del problema (1.1) si para cualquier función  $v \in H_0^1(\Omega)$  se verifica

$$\int_{\Omega} fv \, dA = (u, v)_{H_0^1(\Omega)}. \quad (2.7)$$

A continuación se presenta el Teorema de Representación de Riesz que es una herramienta fundamental para garantizar la existencia y unicidad de soluciones débiles del problema (1.1). Se remite a las referencias [11], [8] al lector interesado en consultar más sobre estos aspectos.

**Teorema 1** (Representación de Riesz). Sea  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  un operador lineal y continuo en un espacio de Hilbert real  $H$ . Para cada  $F$  existe un único  $u \in H$  tal que

$$F(v) = (u, v) \quad \text{para todo } v \in H, \quad (2.8)$$

en donde  $(u, v)$  representa el producto escalar de  $u$  con  $v$ .

*Demostración.* La demostración de este resultado se puede consultar en [11].  $\square$

Note que para todo  $f \in L^2(\Omega)$  la parte izquierda de la ecuación (2.7) es un operador lineal y continuo de  $H_0^1(\Omega)$  en  $\mathbb{R}$ . En efecto, la linealidad es una consecuencia directa de las propiedades de la integral, note que para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $v, w \in H_0^1(\Omega)$  se cumple lo siguiente

$$F(\alpha v + \beta w) = \alpha \int_{\Omega} f v \, dA + \beta \int_{\Omega} f w \, dA = \alpha F(v) + \beta F(w).$$

Por otro lado, se puede probar que la continuidad es consecuencia directa de la desigualdad de Cauchy – Schwarz, para ello considere a  $\{v_n\}$  una sucesión de funciones en  $H_0^1(\Omega)$  convergentes a una función  $v$ . Note que

$$|F(v_n) - F(v)| = \left| \int_{\Omega} f(v_n - v) \, dA \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_n - v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

y es claro que  $|F(v_n) - F(v)| \rightarrow 0$  cuando  $\|v_n - v\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0$ .

De acuerdo con esto, la parte izquierda de la ecuación (2.7), se puede tomar como el operador  $F$  en (2.8) y por lo tanto la existencia y unicidad de soluciones débiles del problema (1.1) se sigue de forma directa del Teorema de Representación de Riesz.

## 2.2 El principio del máximo

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  y considere una función  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  que verifica  $\Delta u > 0$  en  $\Omega$ . Es conocido que si  $u$  alcanzase un máximo local en algún punto  $\mathbf{p} \in \Omega$ , entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\mathbf{p}) \leq 0 \text{ y } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\mathbf{p}) \leq 0,$$

con lo que  $\Delta u(\mathbf{p}) \leq 0$ , pero como  $\Delta u > 0$  en  $\Omega$ , entonces de existir un máximo de  $u$ , este se debe de presentar en  $\partial\Omega$ .

El análisis anterior se puede extender para el caso en que  $\Delta u \geq 0$ , y esto se conoce como el Principio del Máximo.

**Teorema 2** (Principio del Máximo). Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  y  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . Si  $\Delta u \geq 0$  ( $\Delta u \leq 0$ ) entonces

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u).$$

*Demostración.* La demostración de este resultado se puede consultar en [8]. □

En relación con el problema (1.1) el Principio del Máximo permite establecer el signo de la deflexión, o el sentido de la deflexión, de acuerdo con el dato  $f$ . Por ejemplo, si  $f \geq 0$  ( $f \leq 0$ ) entonces la solución  $u$  es  $u \geq 0$  ( $u \leq 0$ ).

Otra consecuencia del principio del Máximo, que se desarrollará a lo largo del documento es la de determinar la naturaleza de los puntos críticos de la solución  $u$ , del problema (1.1).

La existencia y unicidad de soluciones clásicas del problema (1.1) también son una consecuencia del Principio del Máximo, esto se consigna en el siguiente lema.

**Lema 1.** El problema (1.1) admite una única solución clásica.

*Demostración.* Sean  $u$  y  $v$  dos soluciones clásicas del problema (1.1), y considere la función  $w = u - v$ . Note que  $\Delta w = 0$  en  $\Omega$  y  $w = 0$  en  $\partial\Omega$ . De acuerdo con el Principio del Máximo,  $w$  alcanza su mayor y su menor valor en  $\partial\Omega$ , con lo que  $w = 0$ , es decir  $u = v$ .  $\square$

A continuación se presenta un resultado que permite estudiar el comportamiento de las derivadas direccionales sobre una curva de nivel de una cierta función  $u$ , cuando se tiene certeza sobre el signo de  $\Delta u$  y la regularidad de la curva de nivel, con este propósito se presentan las siguientes definiciones, cuyos detalles se desarrollan en la referencia [5].

**Definición 6** (Propiedad de esfera interior). Sea  $\Omega$  un dominio planar y  $\Gamma \subset \Omega$  una curva de nivel de  $u$ . Se dice que  $u$  cumple la propiedad de esfera interior en un punto  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$  si existe una  $B_r(\mathbf{y}) \subset \Omega$  tangente a  $\Gamma$  en  $\mathbf{x}_0$ .

**Observación 1.** La propiedad de esfera interior puede presentarse para  $\Gamma$  no suaves, como se puede observar en la figura 2,4.

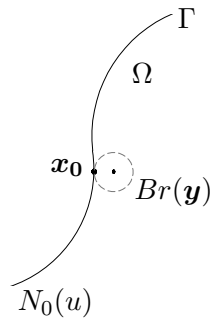


Figura 2.3: Propiedad de bola interior en una curva suave

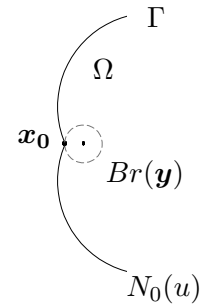


Figura 2.4: Propiedad de bola interior en una curva no suave

**Lema 2** (Lema de Hopf). Sea  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\Omega$  un dominio plano acotado. Sea  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$  que satisface la condición de esfera interior. Sí:

- $\Delta u \leq 0$  en  $\Omega$ .
- $u(\mathbf{x}_0) < u(\mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

entonces  $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}_0) > 0$  para toda dirección entrante desde  $\mathbf{x}_0$  en  $\Omega$ .

*Demostración.* La demostración de este resultado se puede consultar en [11].  $\square$

La importancia de la condición de esfera interior en el Lema de Hopf se hace evidente en el ejemplo 2, en efecto, se puede probar que  $\nabla u = \mathcal{O}$  en todas las esquinas del dominio triangular  $\Omega$ .

Aunque el Principio del Máximo permite asegurar la unicidad de las soluciones del problema (1.1), se conoce un resultado geométrico sobre la convexidad de las curvas de nivel de la solución  $u$  en un caso particular.

**Teorema 3** (Teorema de Makar-Limanov). Sea  $\Omega$  un dominio planar convexo. Si  $u$  es la solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.9)$$

entonces  $u$  admite un único punto crítico y las curvas de nivel de  $u$  son convexas.

*Demostración.* La demostración de este resultado se puede consultar en [9].  $\square$

Note que las curvas de nivel de la solución  $u$  del ejemplo (2) dan cuenta del Teorema de Makar - Limanov. Es posible encontrar dominios no convexos en donde la solución del problema (1.1) tenga un único punto crítico, o incluso infinitos. El siguiente ejemplo da cuenta de esta situación.

**Ejemplo 5.** Integrando de manera sucesiva como en el ejemplo 3, se puede encontrar la solución radial del problema (1.1) para  $f = 1$  y  $\Omega$  un anillo concéntrico de radio mayor 1 y radio menor  $R$ , ( $R < 1$ ). Dicha solución esta dada por la expresión.

$$u(r) = \frac{1}{4} \left[ R^2 - r^2 + \frac{R^2 - 1}{\ln R} \ln(r/R) \right]. \quad (2.10)$$

Se puede probar que  $u$  admite un máximo local para

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R^2 - 1}{\ln R}},$$

lo que indica que  $u$  admite un curva de puntos críticos, en este caso, una curva de máximos localizados en la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y de radio  $r_0$ . La siguiente figura muestra el gráfico de la superficie asociada a  $u \equiv u(x, y)$  en (2.10) tomando  $R = 1/3$ , se ha señalado sobre la superficie la curva de puntos críticos.

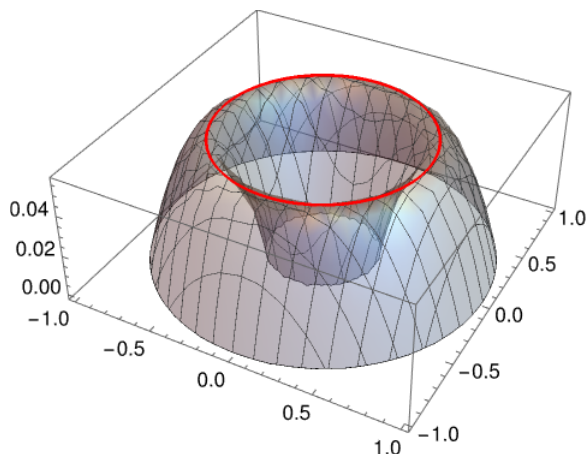


Figura 2.5: Gráfico de  $u \equiv u(r)$  con  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  tomando  $R = 1/3$ .

En relación con los puntos críticos de las soluciones clásicas del problema (1.1) se conocen el siguiente resultado

**Definición 7.** Un punto crítico  $\mathbf{p}_0$  de una función  $u \in C^2(\Omega)$  semi-Morse si la matriz Hessiana de  $u$  evaluada en  $\mathbf{p}_0$  es no nula. Diremos que  $u$  es semi-Morse si la matriz Hessiana de  $u$  es no nula en sus puntos críticos.

La importancia de que una función sea semi-Morse se consigna en el siguiente Teorema.

**Teorema 4.** Si  $u \in C^2(\Omega)$  es una función semi-Morse entonces conjunto de puntos críticos de  $u$  es la unión finita de puntos críticos aislados y curvas de Jordan de puntos críticos.

*Demostración.* La demostración de este Teorema se puede consultar en [2]. □

### 2.3 La técnica de los planos móviles

La técnica de los planos móviles es una herramienta geométrica comúnmente empleada para delimitar la región donde es posible encontrar puntos críticos de la solución de problemas del tipo (1.1). Se invita al lector interesado en consultar más detalles sobre estos aspectos, a revisar la referencia [11].

Sea  $\Omega$  un dominio planar y  $l$  una recta en el plano tal que  $l \cap \Omega = \emptyset$ . Considere una dirección  $\boldsymbol{\tau}$  perpendicular a  $l$  que apunte en dirección a  $\Omega$ . La idea es desplazar la recta  $l$  a lo largo de  $\boldsymbol{\tau}$ , en notación  $l_\tau$ , de manera que  $l_\tau \cap \Omega \neq \emptyset$ .

Tomando un punto arbitrario  $\mathbf{q}$  sobre  $l_\tau$ , considere el conjunto:

$$\Omega_\tau^- = \{\mathbf{x} \in \Omega : (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\tau} < 0\},$$

y sea  $g(\mathbf{x})$  la reflexión de  $\mathbf{x}$  a través de  $l_\tau$  es decir

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 2d(\mathbf{x}, l_\tau) \text{ para todo } \mathbf{x} \in \Omega_\tau^-. \tag{2.11}$$

Sean  $\mathbf{x}' = g^{-1}(\mathbf{x})$  y  $\Omega(l_\tau)$  la imagen de  $\Omega_\tau^-$  a través de  $g$ , es decir  $\Omega(l_\tau) = g(\Omega_\tau^-)$ .

Se dice que  $\Omega$  admite una reflexión bajo  $l_\tau$  si  $\Omega(l_\tau) \subset \Omega$ .

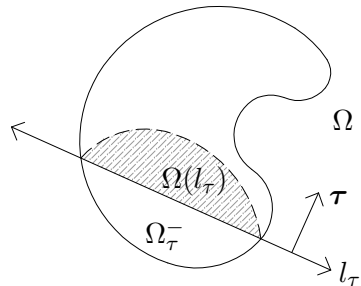


Figura 2.6: Reflexión admisible sobre el dominio  $\Omega$ .

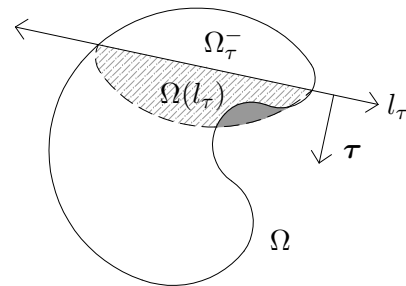


Figura 2.7: Reflexión no admisible sobre el dominio  $\Omega$ .

La técnica de los planos móviles consiste en definir sobre  $\Omega(l)$  la función

$$w(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}').$$

Si se llegase a comprobar que  $\Delta w \leq 0$ , ( $\Delta w \geq 0$ ) en  $\Omega(l_\tau)$  y como  $l_\tau \cap \Omega$  es un segmento, y por lo tanto satisface la condición de esfera interior, y si en adición  $w(\mathbf{x}_0) < w(\mathbf{x})$ , ( $w(\mathbf{x}_0) > w(\mathbf{x})$ ) para todo  $\mathbf{x} \in \Omega(l_\tau)$  se podría aplicar el Lema de Hopf a  $w$  y concluir que  $w_\eta(\mathbf{x}_0) > 0$  ( $w_\eta(\mathbf{x}_0) < 0$ ), con  $\mathbf{x}_0 \in \Omega \cap l_\tau$ , para cualquier dirección  $\boldsymbol{\eta}$  entrante desde  $\mathbf{x}_0$  en  $\Omega$ , y esto implicaría que  $\nabla u \neq 0$  para todo punto sobre el segmento  $\Omega \cap l_\tau$ .

## 2.4 Elementos de la variable compleja

Esta sección tiene como propósito introducir algunas técnicas de las funciones de una variable compleja empleadas en el estudio del comportamiento geométrico de la solución del problema (1.1). Se le recomienda al lector interesado consultar más sobre estas temáticas revisando la referencias [4], [7].

### 2.4.1 Números complejos

Un número complejo  $z$  se define como un par  $z = (x, y)$  de números reales: la componente  $x$  es conocida como la parte real,  $R(z)$ , mientras que la componente  $y$  se denomina parte imaginaria,  $Im(z)$ . El conjunto de los números complejos se representa con la letra  $\mathbb{C}$ .

Dotado con las operaciones

$$i. \quad z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$ii. \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

los números complejos conforman un campo algebraico.

Para  $z = (x, y)$ , se representa con  $\bar{z}$  al número complejo  $\bar{z} = (x, -y)$ , llamado el conjugado de  $z$ , y se puede probar que

$$z\bar{z} = |z|^2 = \sqrt{x^2 + y^2},$$

cantidad que se conoce como el tamaño o módulo del número complejo  $z$ .

Al número complejo  $(0, 1)$  se le representa comúnmente con  $i$  y se puede probar que todo número complejo  $z = (x, y)$  admite la identificación  $z = x + iy$ .

Teniendo en cuenta que uno de los objetivos es utilizar técnicas de la variable compleja para el estudio en cuestión, resulta necesario desarrollar un ejemplo donde se evidencie que se obtiene la solución del problema (1.1) mediante un problema equivalente en el sistema de coordenadas complejo.

Sea  $z = x + iy$  es un número complejo. Puede probarse que

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

y si se define

$$g(z, \bar{z}) = \left( \frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2} \right),$$

entonces  $g$  es una transformación de  $\mathbb{C}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ . Ahora bien, si  $u \in C^2(\Omega)$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , entonces la composición  $h = u(g)$  está bien definida, y de acuerdo con la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2i & -1/2i \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2i} \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

De acuerdo con esto, las derivadas parciales de la función  $h(z, \bar{z})$  se definen como:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2i} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad (2.12)$$

empleando estas identidades, podemos calcular las derivas de  $h$  con respecto de  $z$  y  $\bar{z}$  de todos los ordenes. En particular note que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{\partial h}{\partial z} \left( \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \right) \\ &= \frac{\partial h}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

y por (2.12) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2i} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) - \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2i} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= \frac{1}{4} \Delta u. \end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior, si se toma el  $\Omega$  en (1.1) como un dominio de  $\mathbb{C}$ , este problema se puede escribir en la siguiente forma

$$\begin{cases} -4 \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}} = f & \text{en } \Omega, \\ h = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.13)$$

**Ejemplo 6.** Sea  $\mathcal{B}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . Si en el problema (2.13),  $\Omega = \mathcal{B}_1$  y  $f(x, y) = 1$  en  $\Omega$ , se obtiene

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}} = -1/4 & \text{en } \mathcal{B}, \\ h = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{B}. \end{cases}$$

Al integrar con respecto a  $z$ , se tiene que  $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{4}z + A$ , y al integrar esta última expresión con respecto a  $\bar{z}$ , se obtiene

$$h(z, \bar{z}) = -\frac{1}{4}|z|^2 + A\bar{z} + B \quad \text{con } A, B \in \mathbb{C}.$$

Empleando la condición de frontera  $h|_{\partial\Omega} = 0$ , se obtiene  $-1/4 + A\bar{z} + B = 0$ , con lo que  $A = 0$  y  $B = 1/4$ . De esta manera,  $h(z, \bar{z}) = -\frac{1}{4}|z|^2 + \frac{1}{4}$ , o de manera equivalente

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2),$$

solución que coincide con la solución del problema (1.1) del ejemplo 1, con  $\Omega = \mathcal{B}_1$ .

### 2.4.2 Funciones de una variable compleja

Para un número complejo  $z = x + iy$ , se define  $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ , y gracias a esto todo número complejo admite una representación polar en la forma

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta}, \quad (2.14)$$

para  $-\pi < \theta \leq \pi$ . El ángulo  $\theta$  es llamado argumento del número complejo y se denota por  $\operatorname{arg}(z)$ .

De la ecuación (2.14) se desprende que existen  $n$  números complejos que verifican la relación  $z_k^n = z$  con  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , dados por la expresión

$$z_k = |z|^{(1/n)} e^{i(\theta_k/n)}, \quad (2.15)$$

aquí  $\theta_k = \frac{\operatorname{arg}(z)}{n} + \frac{2\pi}{n}k$  con  $k = \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Los números complejos  $z_k$  se conocen como las raíces  $n$ -ésimas de  $z$ .

En general, el número complejo  $w$  que verifica la relación  $e^w = z$ , para  $z \neq 0$ , es llamado un logaritmo de  $z$ , y en particular el número

$$w = \ln |z| + i \operatorname{arg}(z),$$

es llamado logaritmo principal de  $z$ , y comúnmente se representa en la forma  $w = \operatorname{Log}(z)$ .

Por otro lado, es bien conocido que una función  $f(z)$  de una variable compleja se puede descomponer como la suma de dos funciones de dos variables en la forma

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (2.16)$$

y se puede probar, véase referencia [7], que si  $f$  es diferenciable en un punto  $z_0$  entonces las funciones  $u$  y  $v$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy - Riemann, es decir

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(z_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0), \end{aligned} \quad (2.17)$$

o de manera equivalente  $\nabla u + J\nabla v = \mathcal{O}$ , siendo  $J$  una rotación de  $\pi/2$  radianes a favor del reloj.

Más aún como una consecuencia de las ecuaciones de Cauchy - Riemann, se tiene que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)$$

y se puede comprobar que las funciones  $u$  y  $v$  son armónicas, es decir  $\Delta u = \Delta v = 0$ .

**Ejemplo 7.** Puede probarse que la función

$$f(z) = \text{Log}(z) \equiv \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i\text{arg}(z),$$

es diferenciable con respecto a la variable  $z$  en todo conjunto  $V$  de  $\mathbb{C}$  que no contenga el cero.

De acuerdo con lo anterior, la función  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  es armónica en todo subconjunto  $\Omega$  del plano que no contenga al origen de coordenadas. Este ejemplo nos permitirá construir un dominio no convexo sobre el cual se estudiará el problema (1.1).

Ahora bien, así como es posible utilizar transformaciones para cambiar la configuración geométrica de un dominio, también es posible determinar una expresión que permita regresar el dominio original.

**Ejemplo 8.** Considere la función

$$g(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy). \quad (2.18)$$

Note que  $g$  se podrían interpretar como una transformación de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  en el sentido de que a cada punto  $(x, y)$  del plano le hace corresponder el punto  $(x^2 - y^2, 2xy)$ .

Con la intención de encontrar una inversa de  $g$ , se propone la función  $h(z) = z^{1/2}$ . Es claro que

$$h(z) = |z|^{1/2} \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

en donde  $\theta$  es el argumento de  $z$ . De acuerdo con la forma polar y la definición del módulo de un número complejo, la ecuación anterior se puede escribir como

$$h(z) = (x^2 + y^2)^{1/4} \left[ \cos\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) + i \text{sen}\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \right],$$

y de acuerdo con las identidades

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}, \quad \text{sen } \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$$

para  $0 < \theta < \pi/2$ , se tiene que

$$h(z) = (x^2 + y^2)^{1/4} \left[ \left( \frac{1 + \cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{2} \right)^{1/2} + i \left( \frac{1 - \cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{2} \right)^{1/2} \right]$$

y como  $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , entonces

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x} + i\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \right] \quad (2.19)$$

**Ejemplo 9.** Sea  $\mathcal{T}$  el triángulo de vértices  $\mathcal{O}(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$  y  $P(1, 1)$  mostrado en la figura (2.8). Al evaluar  $\partial\mathcal{T}$  en la función  $g(z)$  del ejemplo anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} g(L_1) &= g(x, 0) = (x^2, 0) \quad \text{para } x \in [0, 1], \\ g(L_2) &= g(1, y) = (1 - y^2, 2y) \quad \text{para } y \in [0, 1], \\ g(L_3) &= g(y, y) = (0, 2y^2) \quad \text{para } y \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Empleando un cambio de variable para eliminar el parámetro, es posible determinar que  $g(L_2)$  equivale a la ecuación  $x = 1 - y^2/4$ .

De esta manera, aplicando la transformación  $g(z)$  en  $\mathcal{T}$  se obtiene el dominio planar  $g(\mathcal{T}) \equiv \Omega$ , como se representa en la figura (2.8). Por otro lado, al tener la función inversa de  $g(z)$ , se espera que al aplicar  $h(z)$  a  $\Omega$  se obtenga nuevamente el dominio  $\mathcal{T}$ .

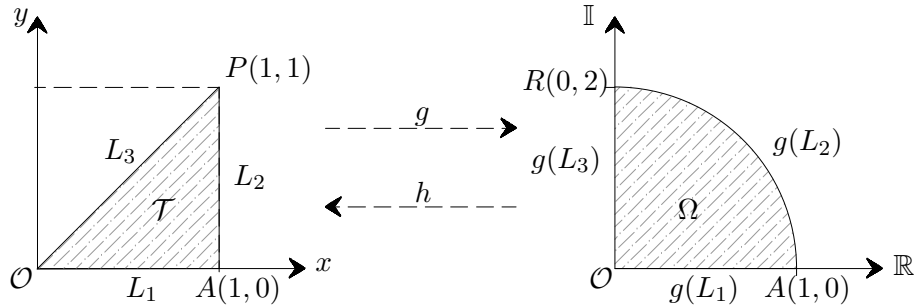


Figura 2.8: Transformación  $g(z) = z^2$  aplicada en el dominio  $\mathcal{T}$  del ejemplo (9).

**Ejemplo 10.** Considere el dominio planar  $\mathcal{T}$  como el cuadrado de vértices  $\mathcal{O}(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $B(1, 1)$  y  $C(0, 1)$  mostrado en la figura (2.9). Al transformar  $\partial\mathcal{T}$  empleando la función  $g(z)$  definida en la ecuación (2.18), se obtiene

$$\begin{aligned} g(L_1) &= g(x, 0) = (x^2, 0) \quad \text{para } x \in [0, 1] \\ g(L_2) &= g(1, y) = (1 - y^2, 2y) \quad \text{para } y \in [0, 1] \\ g(L_3) &= g(x, 1) = (x^2 - 1, 2x) \quad \text{para } x \in [0, 1] \\ g(L_4) &= g(0, y) = (-y^2, 0) \quad \text{para } y \in [0, 1] \end{aligned}$$

Utilizando un cambio de variable para eliminar el parámetro, es posible determinar que  $g(L_2)$  y  $g(L_3)$  equivalen a las ecuaciones  $x = 1 - y^2/4$  y  $x = y^2/4 - 1$ , respectivamente.

De esta manera, aplicando la transformación  $g(z)$  en  $\mathcal{T}$  se obtiene el dominio planar  $g(\mathcal{T}) \equiv \Omega$ , como se representa en la figura (2.9). Por otro lado, al tener la función inversa de  $g(z)$ , se espera que al aplicar  $h(z)$ , definida en la ecuación (2.19), en  $\Omega$  se obtenga nuevamente el dominio  $\mathcal{T}$ .

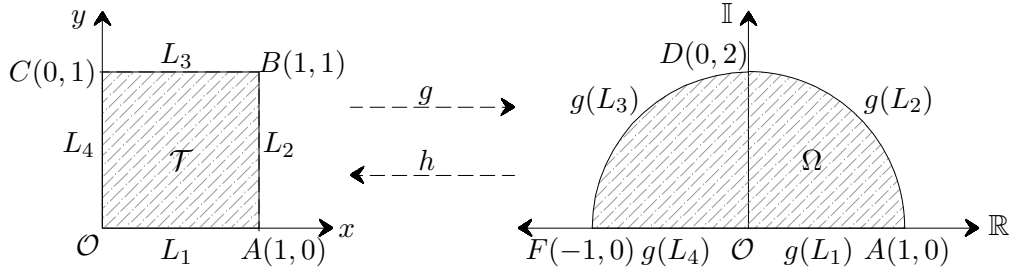


Figura 2.9: Transformación  $g(z) = z^2$  aplicada en el dominio  $\mathcal{T}$  del ejemplo (10).

Hasta el momento, se ha presentado una transformación en el plano usando una función en variable compleja. A continuación, se presenta un tipo de transformación, conocida como transformación de Möbius, que tiene la ventaja geométrica de preservar los ángulos entre las curvas del dominio original.

**Ejemplo 11.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación definida por  $f = \frac{1}{z}$  con  $z \neq 0$ . Note que  $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ . Si  $z = x + iy$ , entonces

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad (2.20)$$

Considere los puntos  $A(1, 1), B(2, 2)$  y  $C(1, 2)$  y sea  $\Gamma$  la curva formado por los segmentos  $L_1 \equiv \overline{AB}$  y  $L_2 \equiv \overline{AC}$  (figura (2.10)). Al transformar  $\Gamma$  empleando la función  $f(z)$  definida en la ecuación (2.20), se obtiene

$$f(L_1) = f(x, x) = \left( \frac{1}{2x}, \frac{-1}{2x} \right) \quad \text{con } x \in [1, 2]$$

$$f(L_2) = f(1, y) = \left( \frac{1}{1 + y^2}, \frac{-y}{1 + y^2} \right) \quad \text{con } y \in [1, 2]$$

Luego, se puede probar que si  $l_1(x) = f(L_1)$  y  $l_2(y) = f(L_2)$  entonces

$$l'_1(x) = \left( -\frac{1}{2x^2}, \frac{1}{2x^2} \right) \quad l'_2(y) = \left( -\frac{2y}{(1 + y^2)^2}, \frac{y^2 - 1}{(1 + y^2)^2} \right)$$

Note que los vectores directores de  $L_1$  y  $L_2$  son  $D_1 = (1, 1)$  y  $D_2 = (0, 1)$ , respectivamente. Además,  $\hat{D}_1 \cdot \hat{D}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y por otro lado,

$$\hat{l}'_1(1) \cdot \hat{l}'_2(1) = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot (1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

y de acuerdo con esto, dicha transformación preserva ángulos. A las transformaciones que cumplen esta propiedad se les conoce como *transformaciones conformes*. El lector interesado en profundizar sobre estos temas, puede consultar la referencia [7].

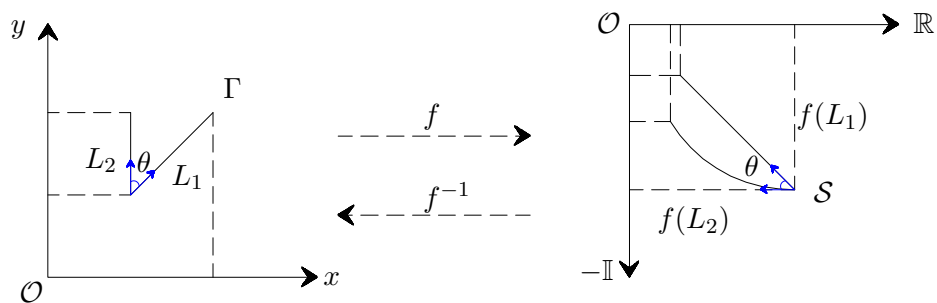


Figura 2.10: Preservación de ángulos. Transformación  $f(z) = 1/z$  con  $z \neq 0$  aplicada en la curva  $\Gamma$  del ejemplo (11).

# Capítulo 3

## Resultados principales

En este capítulo se presentan los resultados principales del trabajo de investigación. Con este propósito el capítulo se ha dividido en tres partes: en la primera se emplea la técnica de planos móviles para determinar regiones ausentes de puntos críticos, en un dominio simétrico, de las soluciones del problema (1.1), en la segunda se determinan condiciones sobre transformaciones de variable compleja que garanticen la invarianza del operador de laplace, para que, al aplicarlas sobre los dominios de un problema de deflexión, permitan la construcción de problemas equivalentes más sencillos de resolver facilitando el estudio de las propiedades geométricas de sus soluciones. Por último, se implementa un algoritmo para la construcción de dominios convexos empleando raíces complejas de la unidad.

### 3.1 Regiones de puntos críticos en dominios simétricos

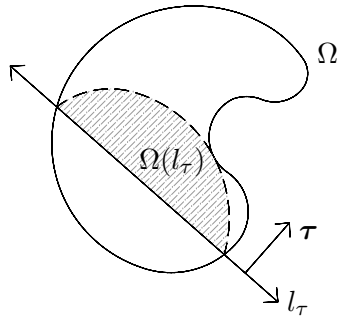


Figura 3.1: Regiones  $\Omega_l^+$  y  $\Omega_l^-$  para una recta  $l$

Sean  $\Omega$  un dominio planar y una recta  $l_\tau$  en donde  $\tau$  un vector unitario perpendicular a  $l_\tau$  como se muestra en la figura.

Como una consecuencia de la ecuación (2.11) se tiene que

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - 2d(\mathbf{x}, l_\tau)\tau \text{ para todo } \mathbf{x} \in \Omega(l_\tau).$$

**Lema 3.** Sea  $\Omega$  un dominio planar y  $u \in C^2(\Omega)$ . Si  $\Omega$  admite una reflexión bajo una recta  $l_\tau$ , entonces la función  $u^*(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}')$  definida en  $\Omega(l_\tau)$  verifica

$$\Delta u^*(\mathbf{x}) = \Delta u(\mathbf{x}').$$

*Demostración.* Si se toma  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$  y

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \tau_2^2 - \tau_1^2 & -2\tau_1\tau_2 \\ -2\tau_1\tau_2 & -(\tau_2^2 - \tau_1^2) \end{pmatrix},$$

entonces  $\mathbf{x}'$  puede escribirse como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{M} + 2(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau},$$

en donde  $\mathbf{q}$  es un punto arbitrario sobre  $l_\tau$ . Se sigue de la regla de la cadena que

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial x} = (\tau_2^2 - \tau_1^2) \frac{\partial u}{\partial x} - 2\tau_1\tau_2 \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u^*}{\partial y} = -2\tau_1\tau_2 \frac{\partial u}{\partial x} - (\tau_2^2 - \tau_1^2) \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad (3.1)$$

Un cálculo directo muestra que

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = (\tau_2^2 - \tau_1^2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4(\tau_2^2 - \tau_1^2)\tau_1\tau_2 \frac{\partial^2 u}{\partial xy} + 4\tau_1^2\tau_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = 4\tau_1^2\tau_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4(\tau_2^2 - \tau_1^2)\tau_1\tau_2 \frac{\partial^2 u}{\partial xy} + (\tau_2^2 - \tau_1^2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

y al sumar ambas ecuaciones se obtiene

$$\Delta u^*(\mathbf{x}) = ((\tau_2^2 - \tau_1^2)^2 + 4\tau_1^2\tau_2^2) \Delta u(\mathbf{x}').$$

La prueba finaliza al comprobar que

$$(\tau_2^2 - \tau_1^2)^2 + 4\tau_1^2\tau_2^2 = (\tau_2^2 + \tau_1^2)^2 = 1$$

□

**Corolario 1.** Si sobre  $\Omega(l)$  se define la función  $w(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - u^*(\mathbf{x})$ , entonces

$$\Delta w(\mathbf{x}) = \Delta u(\mathbf{x}) - \Delta u(\mathbf{x}'). \quad (3.2)$$

**Lema 4.** Sea  $u$  una solución no nula problema (1.1). Suponga que  $\Omega$  admite una reflexión bajo una recta  $l_\tau$ . Si  $u \geq 0$  en  $\Omega$  y la función  $w(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - u^*(\mathbf{x})$ , verifica que

$$\Delta w(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ para todo } \mathbf{x} \in \Omega(l),$$

entonces  $\nabla u(\mathbf{x}) \neq \mathcal{O}$  para todo  $\mathbf{x} \in \Omega \cap l_\tau$ .

*Demostración.* Note que la región  $\Omega(l)$  tiene como frontera el segmento  $l_\tau \cap \Omega$  y la curva  $\partial\Omega(l) \cap \Omega$ . Es claro que  $u|_{l_\tau \cap \Omega} = 0$  ya que  $u$  y  $u^*$  coinciden sobre  $l_\tau \cap \Omega$ . Por otro lado, como  $u|_{\partial\Omega} = 0$  entonces  $w \geq 0$  en  $\partial\Omega(l) \cap \Omega$ , y ya que  $\Delta w \geq 0$  entonces se sigue del Principio del Máximo que  $0 = w(\mathbf{x}_0) < w(\mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{x}_0$  sobre  $l_\tau \cap \Omega$  y  $\mathbf{x}$  en  $\Omega(l)$ .

Ahora bien, como  $l_\tau \cap \Omega$  es un segmento, entonces sobre cada uno de sus puntos se verifica la condición de esfera interior, y por lo tanto, para  $\mathbf{x}_0 \in l_\tau \cap \Omega$  se satisfacen las hipótesis del Lema de Hopf, y esto quiere decir que

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}_0) = (\nabla u(\mathbf{x}_0) - \nabla u^*(\mathbf{x}_0)) \cdot \boldsymbol{\eta} > 0, \quad (3.3)$$

para toda dirección entrante  $\boldsymbol{\eta}$  desde  $\mathbf{x}_0$  a  $\Omega(l)$ .

Se sigue de (3.1) que  $\nabla u^*(\mathbf{x}_0) = \nabla u(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{M}$  y de acuerdo con esto la expresión (3.3) se puede escribir como

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}_0) = \nabla u(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{I}_2 - \mathbf{M}) \cdot \boldsymbol{\eta}^T > 0,$$

en donde  $\mathbf{I}_2$  es la matriz identidad  $2 \times 2$ . Se sigue de esta última expresión que  $\nabla u(\mathbf{x}_0) \neq \mathcal{O}$ .  $\square$

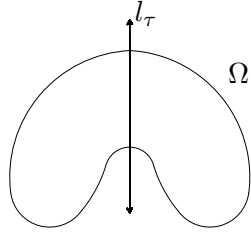


Figura 3.2: Dominio  $\Omega$  simétrico con respecto a la recta  $l_\tau$ .

**Definición 8** (Región simétrica.). Sea  $\Omega$  un dominio planar. Diremos que  $\Omega$  es simétrico con respecto a una recta  $l_\tau$ , si

$$\Omega(l_\tau) = \text{int}(\Omega \setminus \Omega_\tau^-).$$

**Lema 5.** Sea  $u$  la solución del problema (1.1) con  $f = 1$ . Si  $\Omega$  es simétrico con respecto de la recta  $l_\tau$ , entonces  $u$  es simétrica con respecto de la recta  $l_\tau$ .

*Demostración.* Sea  $w = u - u^*$  en  $\Omega(l)$  con  $u^* = u(\mathbf{x}')$ . Note que  $w|_{\partial\Omega(l)} = 0$ . Por otro lado, como  $-\Delta u = 1$  en  $\Omega$  se desprende del lema 3 que  $\Delta w = 0$  en  $\Omega(l)$  y de acuerdo con el Principio del Máximo  $w = 0$  en  $\Omega(l)$ , esto quiere decir que  $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}')$  para todo  $\mathbf{x} \in \Omega(l)$ .  $\square$

**Definición 9** (Subsimetría.). Un dominio simétrico con respecto de una recta  $l_\tau$  admite una subsimetría con respecto a una recta  $l_\alpha$  si para la región  $\Omega(l_\tau)$  se verifica

$$\Omega(l_\tau) \subset\subset \Omega(l_\tau)(l_\alpha) \cup \Omega(l_\tau)_\alpha^- \cup (\Omega(l_\tau) \cap l_\alpha) \subset\subset \Omega.$$

Entienda la doble contención como la contención completa en un solo sentido, es decir, para dos conjuntos  $A$  y  $B$  que verifiquen  $A \subset\subset B$  entonces todo elemento de  $A$  es un elemento de  $B$  pero existen elementos de  $B$  que no son elementos de  $A$ .

En la figura 3.3 se muestra un dominio  $\Omega$  que admite subsimetrías.

**Teorema 5.** Si  $u$  es la solución del problema (1.1) con  $f = 1$  y  $\Omega$  un dominio simétrico con respecto a una recta  $l_\tau$  y subsimétrico con respecto a una recta  $l_\alpha$ . Entonces  $u$  es simétrica con respecto a  $l_\tau$ , y no admite punto críticos en  $l_\alpha \cap \Omega$ .

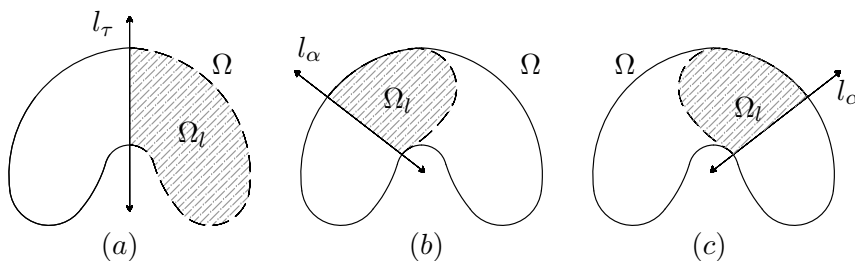


Figura 3.3: Simetría con respecto a la recta  $l_\tau$  (a), subsimetrías con respecto de la recta  $l_\alpha$  (b), (c).

*Demostración.* La demostración de este resultado es consecuencia de aplicar el Lema 5 a los dominios  $\Omega$  y  $\Omega(l_\tau)$ .  $\square$

Es importante mencionar que empleando de forma recursiva la técnica de planos móviles se pueden determinar regiones en donde sea posible encontrar puntos críticos de la solución del problema (1.1) tomando  $f = 1$ . Esta situación se muestra en la siguiente figura.

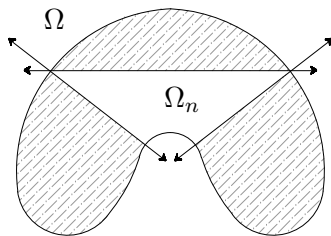


Figura 3.4: Región en donde  $u$  no admite puntos críticos en el dominio  $\Omega$ .

## 3.2 Invarianza del operador de Laplace

En esta sección se presentan algunos resultados concernientes a la invarianza del operador de Laplace bajo ciertas transformaciones en el plano. Esto permitirá llevar el problema (1.1) a nuevas regiones en donde se pueda obtener una mayor información sobre su solución. El lector interesado en consultar más sobre estos aspectos, puede revisar las referencias [7]

**Definición 10.** Sean  $\Omega$  y  $T$  dos dominios en el plano y  $u \in C^2(\Omega)$ . Considere una transformación  $g : T \rightarrow \Omega$  tal que  $g \in C^2(T)$  y  $|Dg| \neq 0$  en  $T$ . Se dirá que el operador de Laplace es invariante bajo  $g$  si la función composición  $s = u(g)$  verifica

$$\Delta s = G\Delta u(g)$$

para una cierta función  $G$  continua y no nula en  $T$ .

**Lema 6.** Sea  $g(\tau, \eta) = (g_1(\tau, \eta), g_2(\tau, \eta))$  con  $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$  una transformación de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ . Si  $u \in C^2$ , entonces la composición  $s = u(g)$  verifica

$$\Delta_{(\tau, \eta)} s = \mathcal{V}_g \cdot \nabla u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \|\nabla_{(\tau, \eta)} g_1\|^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \|\nabla_{(\tau, \eta)} g_2\|^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \nabla_{(\tau, \eta)} g_1 \cdot \nabla_{(\tau, \eta)} g_2 \quad (3.4)$$

en donde  $\mathcal{V}_g = (\Delta_{(\tau, \eta)} g_1, \Delta_{(\tau, \eta)} g_2)$ .

*Demostración.* Se sigue de la regla de la cadena que

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial g_1}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial \tau} \\ \frac{\partial s}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial g_1}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial \eta} \end{cases} \quad (3.5)$$

Por otro lado, un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 g_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 g_2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{\partial g_1}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left( \frac{\partial g_2}{\partial \tau} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial g_1}{\partial \tau} \frac{\partial g_2}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 g_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 g_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{\partial g_1}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left( \frac{\partial g_2}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial g_1}{\partial \eta} \frac{\partial g_2}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

La ecuación (3.4) se obtiene al sumar las dos ecuaciones anteriores.  $\square$

De acuerdo con la ecuación (3.4), si

$$\begin{aligned} i) \quad & \nabla g_1 \cdot \nabla g_2 = 0 \\ ii) \quad & \Delta g_1 = 0 \\ iii) \quad & \Delta g_2 = 0 \\ iv) \quad & \|\nabla g_1\|^2 = \|\nabla g_2\|^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

entonces  $\Delta_{(\tau, \eta)} s = \|\nabla g_1\|^2 \Delta_{(x, y)} u$ , lo que motiva el siguiente resultado.

**Teorema 6.** Sea  $g(\tau, \eta) = (g_1(\tau, \eta), g_2(\tau, \eta))$  una transformación de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  con  $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Si  $u \in C^2$  y

$$\nabla g_1 + J \nabla g_2 = \mathcal{O}, \quad (3.7)$$

donde con  $J$  la matriz de rotación  $\pi/2$  radianes en sentido contrario a las manecillas del reloj, entonces la composición  $s = u(g)$  verifica que

$$\Delta_{(\tau, \eta)} s = \|\nabla g_1\|^2 \Delta_{(x, y)} u.$$

*Demostración.* Al multiplicar (3.7) por  $\nabla g_2$  se obtiene que  $\nabla g_1 \cdot \nabla g_2 = 0$ .

Por otro lado, al aplicar el operador divergencia a (3.7) se obtiene  $\Delta g_1 = 0$ . Note que (3.7) se puede escribir como  $J \nabla g_1 - \nabla g_2 = \mathcal{O}$ . Al aplicar el operador divergencia a esta expresión, se obtiene  $\Delta g_2 = 0$ .

Al multiplicar (3.7) por  $\nabla g_1$  se obtiene  $\|\nabla g_1\|^2 = \frac{\partial g_2}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_2}{\partial x} \frac{\partial g_1}{\partial y}$ . De igual manera,

se puede probar que  $\|\nabla g_2\|^2 = \frac{\partial g_2}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_2}{\partial x} \frac{\partial g_1}{\partial y}$ , y con esto,  $\|\nabla g_1\|^2 = \|\nabla g_2\|^2$ .  $\square$

Note que la condición impuesta sobre  $g$  en este teorema, corresponde con las ecuaciones de Cauchy - Riemann (3.7) en la sección de números complejos del capítulo anterior.

**Ejemplo 12.** Considere la transformación  $g(z) = \frac{1}{z}$ , (véase el ejemplo 11). Note que si se escribe  $g$  como una función en variables de  $x, y$  se obtiene

$$g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y)) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

y de acuerdo con esto

$$\nabla g_{1(x,y)} = \left( \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right), \quad \nabla g_{2(x,y)} = \left( \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

Es fácil comprobar que  $\nabla g_1 + J\nabla g_2 = \mathcal{O}$ , y se sigue del Teorema (6) que si  $s = u(g)$  con  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  entonces  $\Delta s = \|\nabla g_1\|^2 \Delta u$ .

Hasta el momento, la discusión se ha enfocado en determinar condiciones que garanticen la invarianza del operador de Laplace. Ahora, con el propósito de emplear este resultado para facilitar el estudio de las características geométricas del problema de la deflexión de una membrana sujeta por su frontera, se tiene el siguiente razonamiento: considere el problema tipo (1.1) definido sobre un dominio planar  $\Omega$ . Ahora, para  $\mathcal{T}$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$ , considere  $g : \mathcal{T} \rightarrow \Omega$ , una transformación que que verifica la hipótesis del Teorema (6). Al aplicar  $g$  sobre el dominio  $\mathcal{T}$  se presenta la situación que se ilustra en la siguiente figura.

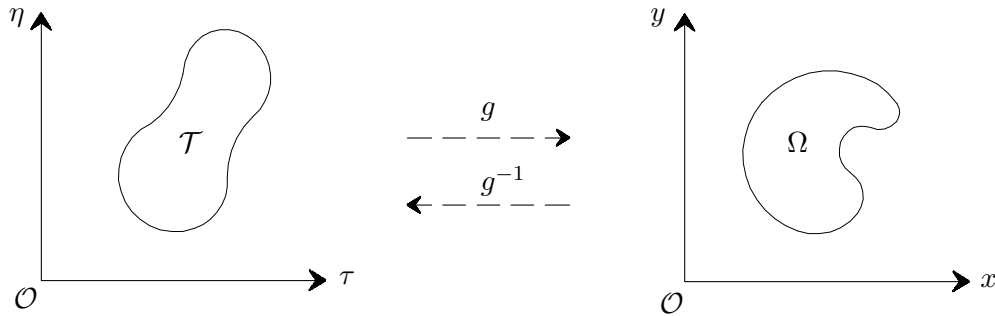


Figura 3.5: Transformación  $g(z)$  aplicada en el dominio  $\mathcal{T}$ .

Sea  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  la solución clásica problema tipo (1.1). Entonces para la composición  $s = u(g)$  se verifica

$$\begin{cases} -\Delta s = \|\nabla g_1\|^2 f(g) & \text{en } \mathcal{T}, \\ s = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{T}, \end{cases} \quad (3.8)$$

### 3.3 Aplicación de resultados y conjeturas

En esta sección se van a emplear las técnicas y los resultados antes expuestos para identificar algunas propiedades geométricas de la solución de (1.1) en un caso parti-

cular. Con este propósito considere el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.9)$$

siendo  $\Omega$  la región que se muestra en la figura 3.6, cuyas fronteras se han parametrizado a partir de la función

$$\gamma(x, y) = \left( \frac{x^2 + x + y^2}{(x + 1)^2 + y^2}, \frac{y}{(x + 1)^2 + y^2} \right),$$

en el siguiente orden  $\gamma_1 \equiv \gamma(t, 0)$ ,  $\gamma_2 \equiv \gamma(1, t)$ , y  $\gamma_3 \equiv \gamma(t, t)$  con  $0 \leq t \leq 1$ .

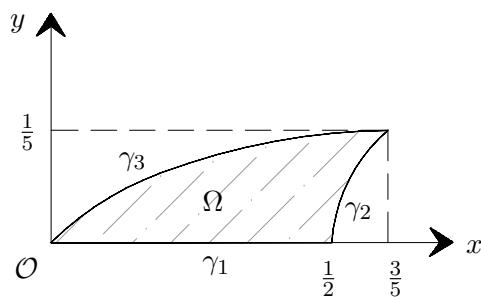


Figura 3.6: Dominio  $\Omega$ .

Note que aunque  $f = 1$ ,  $\Omega$  no es convexo y por este motivo no se puede emplear el Teorema de Makar-Limanov para garantizar la existencia de un único punto crítico. Empleando la técnica de planos móviles se puede determinar la región en  $\Omega$  donde es posible encontrar puntos críticos de la solución de este problema.

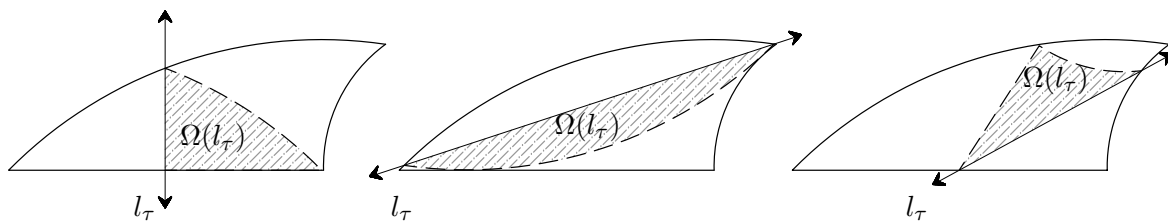


Figura 3.7: Reflexiones admisibles para distintas rectas  $l$ .

En figura 3.8 se ha superpuesto las regiones en ausencia de puntos críticos que se han determinado con la técnica de planos móviles, sobre la solución numérica empleando la técnica de los elementos finitos programa en el software libre FreeFem. Note que numéricamente se puede apreciar que el punto crítico se encuentra en la región admisible.

Ahora se empleará el resultado Teorema 6 para ver si es posible determinar algunas propiedades geométricas de la solución del problema (3.9), empleando para ello una transformación de Möbius.

Considere la transformación  $g(z) = \frac{z}{z + 1}$ .

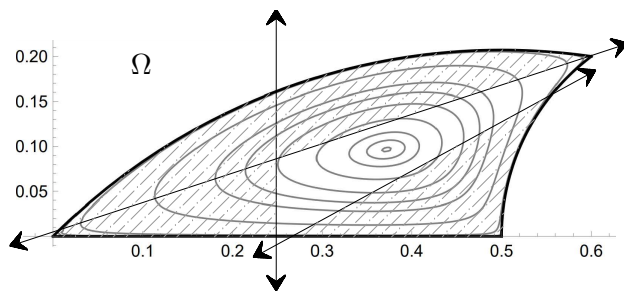


Figura 3.8: Región en donde  $u$  no admite puntos críticos en el dominio  $\Omega$ .

Haciendo la identificación  $z = x + iy$  se puede probar que

$$g(z) = g_1(x, y) + ig_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2} + i \frac{y}{(x+1)^2 + y^2}. \quad (3.10)$$

Por otro lado, si identificamos con  $\mathcal{T}$  a una región triangular de vértices en  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(1, 1)$ , se puede probar que  $g(\mathcal{T}) = \Omega$ , como se muestra en la figura (3.9). Note que  $g$  posee la ventaja geométrica de preservar ángulos.

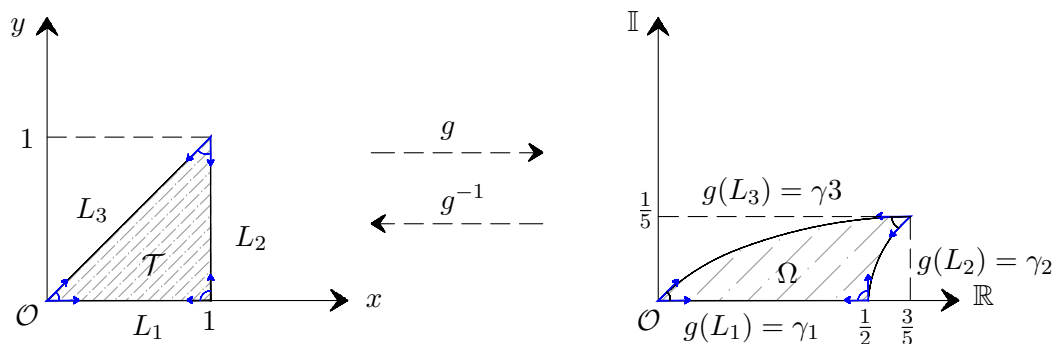


Figura 3.9: Preservación de ángulos. Transformación  $g(z) = z/(z+1)$  aplicada en el dominio  $\mathcal{T}$ .

Además como  $g$  es diferenciable en todo dominio que no contenga a  $z = -1$ , entonces  $g$  satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y de acuerdo con esto, para la expresión en (3.10) se verifica que  $\nabla g_1 + J\nabla g_2 = \mathcal{O}$ . Por otro lado la composición  $s = u(g)$  está bien definida y como

$$\|\nabla g_1\|^2 = \frac{1}{(1+x)^2 + y^2},$$

entonces de acuerdo con el Teorema (6) se tiene que

$$\begin{cases} -\Delta s = \frac{1}{(1+x)^2 + y^2} & \text{en } \mathcal{T}, \\ s = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{T}, \end{cases} \quad (3.11)$$

Note que a diferencia del problema (3.9) el dominio  $\mathcal{T}$  es convexo y  $-\Delta s < 0$  en  $\mathcal{T}$ , entonces de acuerdo con el Principio del Máximo, la solución  $s$  no admite mínimos

locales en  $\mathcal{T}$ , y se sigue del Teorema 4 que el conjunto de puntos críticos de  $u$  es la unión finita de puntos críticos aislados y curvas de Jordan de puntos críticos. Con el ánimo de estudiar algunas propiedades geométricas de la solución del problema (3.11) se estudiará la función

$$f(x, y) = \frac{1}{(1+x)^2 + y^2}.$$

En la siguiente figura se muestra el gráfico de  $f$  y algunas curvas de nivel a alturas de 0,3, 0,5, 0,7 y 0,9

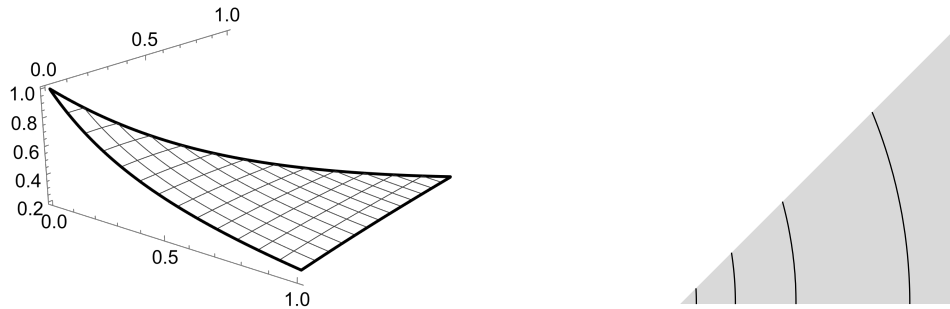


Figura 3.10: Gráfico de  $f$  y curvas de nivel a alturas 0,3, 0,5, 0,7 y 0,9.

Note en particular que  $f$  es estrictamente positiva en  $\mathcal{T}$  y creciente en dirección al punto  $(-1, 0)$ , por otro lado,  $f$  no admite cambios de curvatura en  $\mathcal{T}$  y además debido a que  $x, y \in (0, 1)$ , se podría pensar que  $f$  en  $\mathcal{T}$  toma valores cercanos de 1. De acuerdo con esto se podría conjeturar que la solución del problema (3.11) es cercana a la solución sobre este mismo dominio si se tomase  $f = 1$ , que como es bien sabido, de acuerdo con el Teorema de Makar - Limanov, admite un único punto crítico y sus curvas de nivel son convexas.

Por último, considerando que la transformación empleada para construir el problema (3.9) garantiza la invarianza del laplace, y preserva ángulos, podríamos afirmar que la solución del problema original conserva la estructura y la naturaleza de los puntos críticos. Entonces la solución  $u$  del problema (3.9) admite un único punto crítico. De nuevo la experimentación numérica da cuenta de esta afirmación, para ello se elaboraron dos programas en FreeFEM, que se pueden consultar en los Apéndices del documento. El primero (Apéndice 1) permite encontrar numéricamente la solución del problema (3.9) y el segundo (Apéndice 2) permite encontrar numéricamente la solución del problema (3.11).

En la figura (3.11) se muestran los gráficos de la solución  $u$  del problema (3.9) y sus curvas de nivel, y en la figura (3.12) se muestran los gráficos de la solución  $u$  del problema (3.11) y sus curvas de nivel.

Note que en la figura (3.12) se observa que el punto crítico del problema (3.11) es aproximadamente  $(0,61, 0,22)$ . De acuerdo con el análisis realizado, al evaluar este punto en la transformación  $g$  de la expresión (3.10), se obtiene el punto crítico del problema (3.9). De aquí,  $g(0,61, 0,22) = (0,39, 0,08)$ , el cual es aproximadamente el punto crítico evidenciado en la figura (3.11).

La exploración realizada en esta sección se puede resumir en la siguiente conjetura.

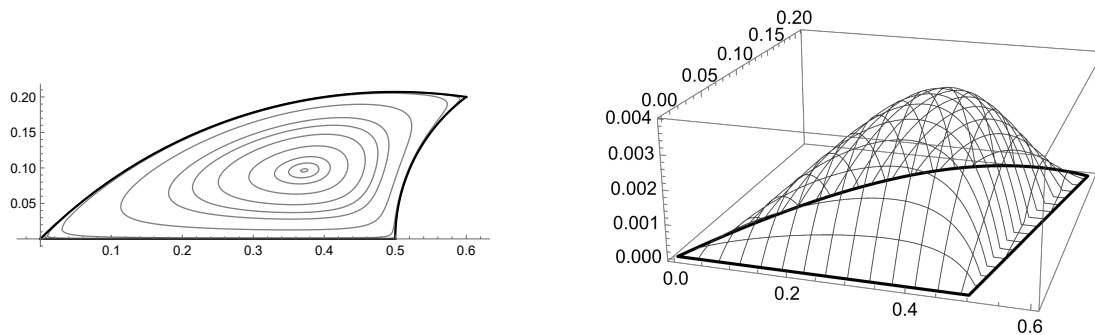


Figura 3.11: Curvas de nivel y gráfico de la solución  $u$  del problema (3.9) en el dominio  $\Omega$  con  $f = 1$ .

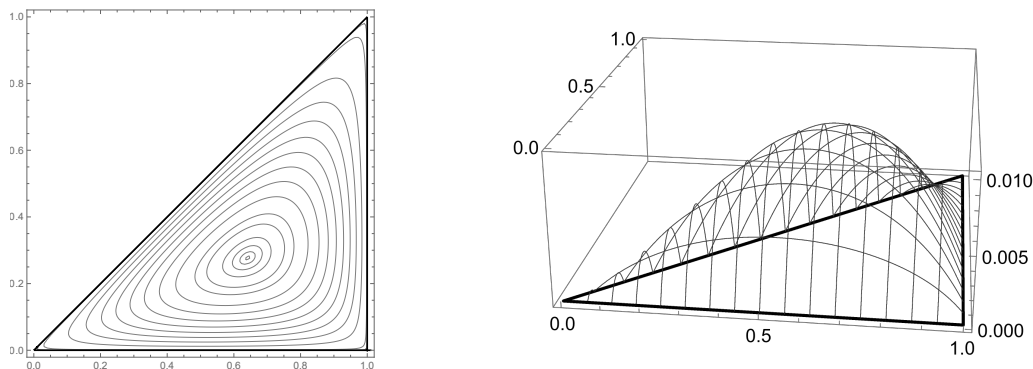


Figura 3.12: Curvas de nivel y gráfico de la solución  $s$  del problema (3.11) en el dominio triangular  $\mathcal{T}$  con  $f = 1/(1+x)^2 + y^2$ .

**Conjetura 1.** Sea  $u$  una solución clásica del problema (1.1) con  $\Omega$  un dominio convexo. Si  $f > 0$  en  $\Omega$ , creciente a lo largo de una misma dirección, y si no admite cambios de curvatura, entonces  $u$  admite un único punto crítico y sus curvas de nivel son convexas en  $\Omega$ .

### 3.4 Construcción de dominios poligonales convexos

Se desea construir un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia  $\partial\mathcal{B}_1$ . Entonces de acuerdo con (2.15) existen 3 números complejos  $z_k$  con  $k = \{0, 1, 2\}$ , que verifican la relación  $z_k^3 = 1$ , y estos son

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i0} = 1 = (1, 0), \\ z_1 &= e^{2\pi i/3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ z_2 &= e^{4\pi i/3} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = \left( -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \end{aligned}$$

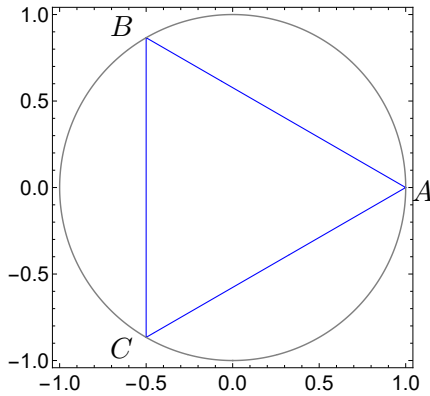


Figura 3.13: Triángulo equilátero inscrito en la circunferencia de radio 1.

y de acuerdo con esto, es posible construir un triángulo equilátero de vértices  $A(1,0)$ ,  $B(-1/2, \sqrt{3}/2)$  y  $C(-1/2, -\sqrt{3}/2)$ . Se puede verificar que las ecuaciones de los lados del triángulo son

$$\overline{AB} : y + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\overline{AC} : y - \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\overline{BC} : 2x + 1 = 0$$

Ahora considere la función

$$u(x, y) = \frac{2}{9\sqrt{3}}(2x + 1) \left( y + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left( y - \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

que al simplificarla, se puede escribir en la forma

$$u(x, y) = \frac{1}{12}(1 + 2x)((x - 1)^2 - 3y^2). \quad (3.12)$$

Es posible probar que  $\Delta u = -1$ . De esta manera, si se tuviera el problema tipo (1.1) con  $f(x, y) = 1$  y el dominio planar  $\Omega$  es la región interior del triángulo equilátero de vértices  $A(1, 0)$ ,  $B(-1/2, \sqrt{3}/2)$  y  $C(-1/2, -\sqrt{3}/2)$ , la solución  $u$  de este problema, sería la ecuación (3.12).

La construcción de dominios convexos empleando las raíces complejas de la unidad se convierte en un proceso largo a medida que se incrementa el número de raíces involucradas. En este punto, resulta más eficiente implementar un algoritmo que permita la construcción de estos dominios. De acuerdo con esto, considere el vector

$$A_k = \left( \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \text{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right),$$

que representa la sucesión  $z_k$  de la definición de raíces complejas de la unidad. Ahora consideremos la función

$$u(\mathbf{x}) = \prod_{k=0}^{n-1} (\mathbf{x} - A_k) \cdot J(A_{k+1} - A_k),$$

definida como el producto de las ecuaciones de cada recta asociada a los lados del polígono inscrito en  $\partial\mathcal{B}_1$ . Empleando el software *Wolfram Mathematica*, es posible determinar el Laplaciano de  $u$  para valores grandes de  $n$ . A continuación se presentan algunos resultados.

En el caso de  $n = 4$  se encontraron las siguientes expresiones:

$$u(x, y) = \frac{2}{9\sqrt{3}} \left( (x^2 - 1)^2 - 2(x^2 + 1)y^2 + y^4 \right),$$

$$\Delta u(x, y) = \frac{16}{9\sqrt{3}} (x^2 + y^2 - 1).$$

Se ejecutó el algoritmo para 5, 6, 7 y 8 raíces complejas de la unidad. A continuación, se presenta el dominio construido y el gráfico de  $\Delta u$  para cada caso.

El dominio construido empleando tres raíces de la unidad es el único que presenta  $\Delta u = -1$ . Esto podría indicar que el dominio tipo triángulo equilátero es el único dominio que posee un Laplaciano constante. Sin embargo, esta conclusión proviene de una experimentación numérica limitada por la capacidad computacional. Se requiere de una prueba analítica para asegurar esta afirmación.

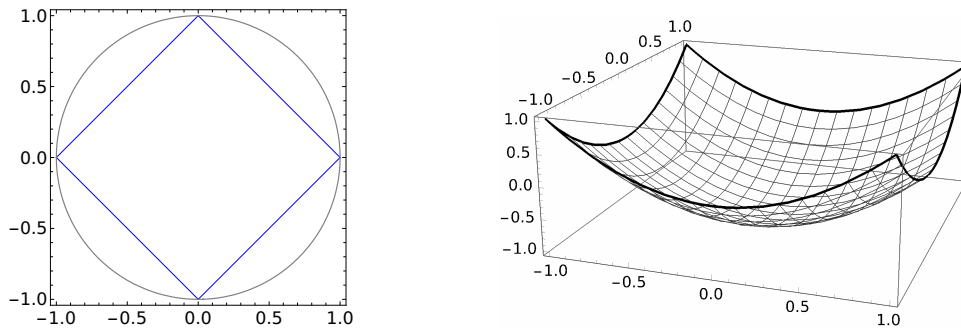


Figura 3.14: Dominio construido empleando 4 raíces complejas de la unidad y gráfico de  $\Delta u$ .

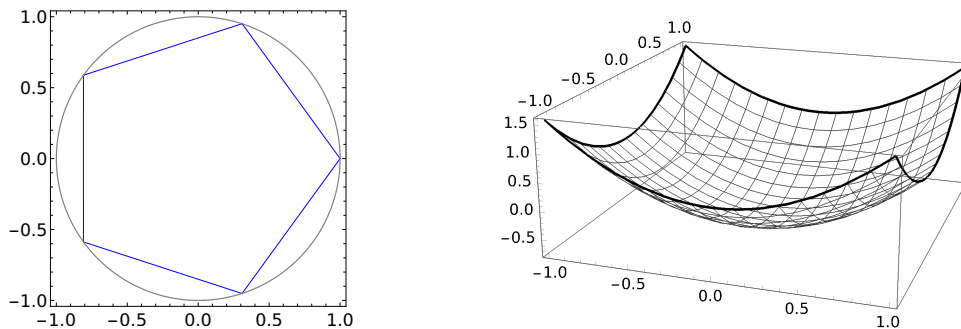


Figura 3.15: Dominio construido empleando 5 raíces complejas de la unidad y gráfico de  $\Delta u$ .

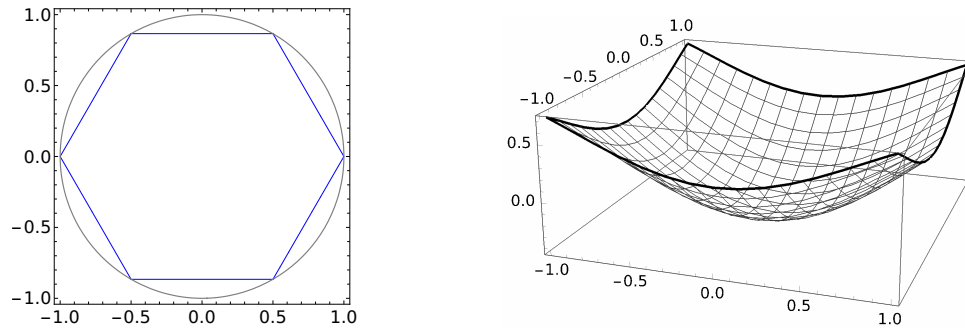


Figura 3.16: Dominio construido empleando 6 raíces complejas de la unidad y gráfico de  $\Delta u$ .

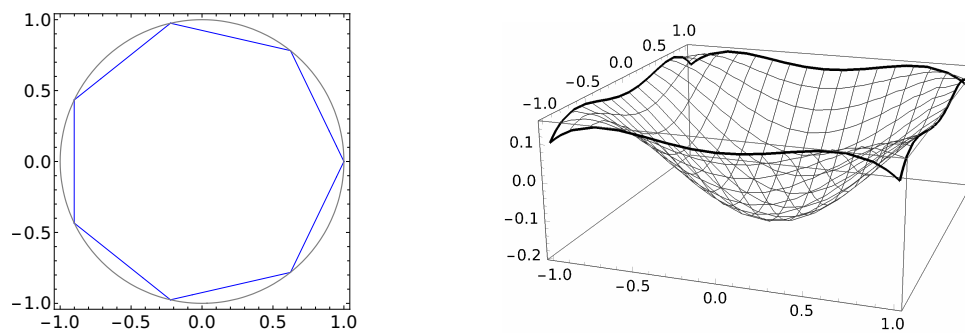


Figura 3.17: Dominio construido empleando 7 raíces complejas de la unidad y gráfico de  $\Delta u$ .

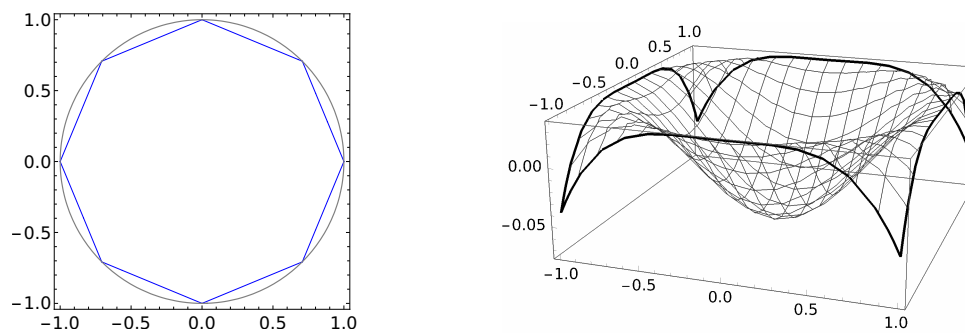


Figura 3.18: Dominio construido empleando 8 raíces complejas de la unidad y gráfico de  $\Delta u$ .



# Capítulo 4

## Conclusiones

En este trabajo se presentaron algunos resultados sobre las soluciones clásicas y débiles del problema de la deflexión de una membrana sujeta por su frontera. También se realizó una breve introducción al principio débil y fuerte del máximo para problemas elípticos de orden dos, junto con la descripción de la técnica de planos móviles que permite delimitar la región en donde es posible localizar los puntos críticos de la solución del problema de la membrana. Como parte central del documento se discutieron algunos aspectos de las funciones de una variable compleja, como las ecuaciones de Cauchy - Riemann y transformaciones de Möbius, herramientas que fueron esenciales para conseguir los resultados del documento.

En el problema (3.9) se pudo apreciar la importancia de la invarianza del operador de Laplace para emplear la técnica de los planos móviles y la de transformaciones en el plano a través de funciones de una variable compleja que satisfacen las ecuaciones de Cauchy - Riemann. Esto sugiere que este tipo de técnicas son particularmente útiles para estudiar las propiedades cualitativas de las soluciones de ciertos problemas que son planteados en dominios que permiten ser transformados en otros por medio de ciertas aplicaciones de funciones de una variable compleja [7]. En particular, es conocido que estas técnicas se han escalado a problemas elípticos de cuarto orden [14] Como futuros trabajos de investigación se espera abordar la conjetura planteada en la sección de *Aplicación de resultados y conjeturas* en el capítulo de *Resultados Principales*.



# Bibliografía

- [1] Arango, J., Jiménez, J., & Salazar, A. (2017). Puntos críticos y simetrías en problemas elípticos. *Revista Integración, temas de matemáticas*, 35(1), 1-9.
- [2] Arango, J., & Gómez, A. (2010). Critical points of solutions to elliptic problems in planar domains. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 10(1), 327-338.
- [3] Arango, J., & Gómez, A. (2012). Critical points of solutions to quasilinear elliptic problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75(11), 4375-4381.
- [4] Apostol, T. M. (2020). *Análisis matemático*. Reverté.
- [5] Jiménez, J. (2015) Puntos críticos del problema de Dirichlet para la ecuación  $-\Delta u = 1$  en la bola y una deformación de la misma. [Tesis de pregrado para optar por el título de profesional en Matemáticas Aplicadas, Pontificia Universidad Javeriana Cali. ]Vitela.
- [6] England, A. H. (2003). *Complex variable methods in elasticity*. Courier Corporation.
- [7] Weinberger, H. F. (1970). *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales Con Metodos de Variable Compleja y de Transformaciones* In. Reverté.
- [8] L. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [9] Makar-Limanov, L. G. E. (1971). Solution of Dirichlet's problem for the equation  $\Delta u = -1$  in a convex region. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 9(1), 52-53.
- [10] Timoshenko, S. (1983). *History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures*. Courier Corporation.
- [11] Chipot, M. (2009). *Elliptic equations: an introductory course*. Springer Science & Business Media.
- [12] Kassimali, A. (2009). *Structural analysis*. Cengage Learning
- [13] McCormac, J., & Brown, R. (2018). *Diseño de concreto reforzado (10.a ed.)*. ALFAOMEGA.

- [14] Grunau, H. C., & Sweers, G. (2001). Nonexistence of local minima of supersolutions for the circular clamped plate. *Pacific Journal of Mathematics*, 198(2), 437-442.

# Capítulo 5

## Apéndice 1

### 5.0.1 Código en FreeFEM problema (3.9)

```
//FRONTERA
border Gamma1(t=0,1) { x = t/(1 + t); y = 0;}
border Gamma2(t=0,1) { x = (2 + t^2)/(4 + t^2); y = t/(4 + t^2);}
border Gamma3(t=0,1) { x = (t*(1 + 2*t))/(t^2 + (1 + t)^2);
                      y = t/(t^2 + (1 + t)^2);}
mesh Th=buildmesh(Gamma1(200)+Gamma2(200)+Gamma3(-200));
plot(Th, wait=true);

//ESPACIO DE FUNCIONES
fespace Vh(Th,P2);
Vh s,w, f=1;

//SOLUCION DEBIL DEL PROBLEMA
solve Laplace(s,w)=int2d(Th)(dx(s)*dx(w) + dy(s)*dy(w))
- int2d(Th)(f*w) + on(Gamma1,s=0) + on(Gamma2,s=0)
+ on(Gamma3,s=0) ;
plot(s, wait=true);

// DATOS DE LA SOLUCION
{ ofstream ff("datos.txt");
  for (int i=0;i<Th.nt;i++)
  { for (int j=0; j <3; j++)
    ff<<Th[i][j].x << " " << Th[i][j].y<< " " << s [[Vh(i,j)]<<endl;
  }
}
```



# Capítulo 6

## Apéndice 2

### 6.0.1 Código en FreeFEM problema (3.11)

```
//FRONTERA
border Gamma1(t=0,1) { x = t; y = 0;}
border Gamma2(t=0,1) { x = 1; y = t;}
border Gamma3(t=0,1) { x = 1 - t; y = 1-t;}
mesh Th=buildmesh(Gamma1(200)+Gamma2(200)+Gamma3(200));
plot(Th, wait=true);

//ESPACIO DE FUNCIONES
fespace Vh(Th,P2);
Vh s,w,f=1/(( 1 + x)^2 + y^2);

//SOLUCION DEBIL DEL PROBLEMA
solve Laplace(s,w)=int2d(Th)(dx(s)*dx(w) + dy(s)*dy(w))
- int2d(Th)(f*w) + on(Gamma1,s=0)
+ on(Gamma2,s=0) + on(Gamma3,s=0);
plot(s, wait=true);

//DATOS DE LA SOLUCION
{ ofstream ff("datos.txt");
  for (int i=0;i<Th.nt;i++)
  { for (int j=0; j <3; j++)
    ff<<Th[i][j].x << " " << Th[i][j].y<< " " << s [[Vh(i,j)]<<endl;
  }
}
```