



Acta de Correcciones al Proyecto de Grado Ingeniería en sistemas y computación

Fecha: 12/01/2023

Autores: Bantú Agustín Valencia Sinisterra

Nombre del Proyecto de Grado: Desarrollo de una medida para la polarización en las redes sociales.

Director: Frank Valencia

Como indica el artículo 2.27 de las Directrices de Trabajo de Grado, he verificado que los estudiantes indicados arriba han implementado todas las correcciones que los Jurados del Proyecto de Grado definieron que se efectuaran, como consta en el Acta de Calificación correspondiente.

Firma de Director(a) del Proyecto de Grado



Pontificia Universidad
JAVERIANA
Cali

Facultad de Ingeniería
y Ciencias

Nota de Aceptación

Aprobado por el Comité de Trabajo de Grado
en cumplimiento de los requisitos exigidos por la Pontificia Universidad Javeriana
para optar el título de Ingeniero de Sistemas y Computación.



Dr. Camilo Rocha
Decano de la Facultad de Ingeniería



Dr. GERARDO MAURICIO SARRIA
Director Carrera Ingeniería Sistemas y Computación.



Dr. Frank Valencia
Director(a) Trabajo



Dr. Jesús Aranda
Jurado 1



Dr. Gerardo Sarría
Jurado 2

Santiago de Cali, 24 Julio 2022.

Señores

Pontificia Universidad Javeriana Cali.

Dr. Gerardo Mauricio Sarria

Director Carrera de Ingeniería de Sistemas y Computación.

Cali.

Cordial Saludo.

Por medio de la presente me permito informarle que el estudiante de Ingeniería de Sistemas y Computación Bantú Agustín Valencia (cod:893640) trabaja bajo mi dirección en el proyecto de grado titulado "Aplicativo web para permitir la participación de la ciudadanía en el cuidado y conservación de los humedales del sur de Cali", el cual se encuentra terminado y considero que cumple con los requisitos para ser sustentado.

Atentamente,

 Escriba el texto aquí

Dr. Frank Valencia

Santiago de Cali, 24 Julio 2022.

Señores

Pontificia Universidad Javeriana Cali.

Dr. Gerardo Mauricio Sarria

Director Carrera de Ingeniería de Sistemas y Computación.

Cali.

Cordial Saludo.

Me permito presentar a su consideración el anteproyecto de grado titulado "Desarrollo de una medida para la polarización en las redes sociales" con el fin de cumplir con los requisitos exigidos por la Universidad para llevar a cabo el proyecto de grado y posteriormente optar al título de Ingeniero de Sistemas y Computación.

Al firmar aquí, doy fe que entiendo y conocemos las directrices para la presentación de trabajos de grado de la Facultad de Ingeniería aprobadas el 26 de noviembre de 2009, donde se establecen los plazos y normas para el desarrollo del anteproyecto y del trabajo de grado.

Atentamente,

Agustín Valencia

Bantú Agustín Valencia Sinisterra

Código:8936404

Pontificia Universidad Javeriana Cali Facultad de Ingeniería.
Ingeniería de Sistemas y Computación.
Proyecto de Grado

Desarrollo de una medida para la polarización
en las redes sociales.

Bantú Agustín Valencia Sinisterra
Director: Dr. Frank Valencia 24/07/2022



Agradecimientos

Primero tengo que agradecerle a mi familia, mi padre y mi madre, a mi director de tesis Frank y por último a foros especialmente Reddit, y sobre todo los subreddit de matemáticas ya que sin ellos no hubiera sido posible sacar este proyecto.

Abstract

After the last few years, the massive use of the Internet and social networks have increased polarization, due to the multiple connections and influences that are generated now, a single person can be influenced by hundreds of thousands of people on the Internet. Consequences that polarization increases make it burn especially in sensitive issues leading to social outbursts such as riots. A high polarization can imply the impossibility of reaching a consensus, so it is interesting to have a measure which allows you to have a polarization index. Esteban and Ray developed a measure, this presents problems, the main one is that it is not smooth or continuous, on the contrary, the ideas vary smoothly, therefore, the most natural thing is that the polarization is smooth. For this we are going to use models based on DeGroot which will be differentiable, smooth, and continuous. Additionally, with the continuous models, some cases where the polarization will tend to a minimum will be studied using the notion of consensus.

Keywords: Continuity, softness, polarization, influence, consensus.

Resumen

Tras los últimos años el uso masivo de internet y las redes sociales han hecho que la polarización aumente, esto debido a las múltiples conexiones e influencias que se generan ahora, una sola persona puede ser influenciada por cientos de miles de personas en internet. Consecuencias de que la polarización aumente hace que arda sobretodo en temas, delicados conllevando a estallidos sociales como por ejemplo las protestas. Una alta polarización puede implicar la imposibilidad de que se llegue a un consenso, por eso es interesante tener una medida la cual te permita tener un índice de la polarización. Esteban y Ray desarrollaron una medida, esta presenta problemas, el principal es que no es suave ni continua, por el contrario, las ideas varían de forma suave, por lo tanto, lo más natural es que la polarización sea suave. Para ello vamos a utilizar unos modelos basados en DeGroot los cuales serán diferenciables, suaves y continuos. Adicionalmente con los modelos continuos se va a estudiar algunos casos donde la polarización va a tender a un mínimo usando la noción de consenso.

Palabras Clave: Continuidad, suavidad, polarización, influencia, consenso.

Índice general

Contenido

Abstract	2
Resumen.....	4
1.Planteamiento del Problema.....	6
Introducción	6
Justificación.....	6
Objetivos	8
Objetivo General	8
Objetivos Específicos	8
Importancia de la polarización.	9
Áreas temáticas	10
Marco Teórico.....	10
Modelo Basado en DeGroot.....	34
Polarización de esteban y Ray.....	38
Problema de discontinuidad.	41
2.Solución.....	43
Función de Polarización Continua	45
Modelo de creencias para tiempo continuo	48
Creencias en tiempo continuo para el sesgo de autoridad.....	49
Comparación evolución discreta y evolución continua.....	50
Creencias en tiempo continuo para el sesgo de confirmación.....	51
Diferenciabilidad de las creencias en tiempo continuo	51
Validez de la medida de polarización.....	52
3.Simulaciones	53
4.Conclusiones y resultados	59
6.Referencias	61

1.Planteamiento del Problema

Introducción

Cómo se mencionó en el anteproyecto, la polarización es un fenómeno político y social el cual las personas se posicionan de forma opuesta a las demás respecto a un tema o varios temas en particular, formando entre dos o más zonas conglomeradas, este fenómeno está relacionado con los problemas sociales por ejemplo que cualquier idea moderada o intermedia a estas zonas pierda influencia o que es muy difícil encontrar un consenso entre dichas zonas. Además que en los últimos años la polarización ha aumentado, esto es debido al crecimiento de las redes sociales porque la comunicación entre los distintos individuos o agentes logran que las ideas que antes eran aisladas o que no tenían mucha repercusión lleguen a mucha más gente, esto sumado a la masificación de las noticias falsas, hacen que las redes sociales tiendan a ser extremadamente polarizadas, se puede ver claramente en las opiniones, de los republicanos y los demócratas o en Europa con temas como la inmigración, la independencia de Cataluña; en el caso de Colombia el proceso de paz, el paro nacional y las vacunas.

Justificación

La polarización genera mucho interés en múltiples campos, por ejemplo, en los negocios, porque es un concepto ligeramente diferente a la desigualdad y está directamente relacionado al campo económico, político y social, según Esteban y Ray la polarización está estrechamente relacionada con la alienación de los individuos. Cuantificar la polarización puede ser muy útil para conocer qué tan fácil va a ser tomar una decisión, conocer si la polarización se reducirá en el tiempo. Por otra parte, este es un reto computacional y matemático ya que requiere el uso de estructuras de datos como los grafos para modelar las relaciones entre los diferentes individuos del sistema además de herramientas matemáticas para poder cuantificar estos datos y dar un valor concreto que refleje la polarización dependiendo de las posiciones que tienen los individuos referentes a un tema específico.

Una población polarizada tiene más posibilidades de sufrir problemas de inestabilidad social al existir alguna mínima convulsión. Un caso donde la población es máxima es donde el 50% de los usuarios de la red social este a un extremo de las ideas y el otro 50% al otro extremo, si un gobierno o alguna entidad toma una decisión que favorezca lo más mínimo a uno de los dos grupos, puede desatar un gran problema social o político, un ejemplo serían las elecciones en los estados unidos, dónde la elección de Joe Biden desencadenó muchos eventos sociales y políticos como lo de la toma del capitolio.

Una de las principales consecuencias de una sociedad altamente polarizada son los estereotipos y los prejuicios que generan entre los agentes de los grupos con ideas altamente separadas.

Las relaciones podrían ser de poder, de cercanía de ideas o disparidad de ideas, es decir que un individuo podría cambiar su creencia si está relacionado a otro individuo muy influyente, también la polarización se puede acentuar si está relacionado con individuos con ideas similares o volverse más extrema si está relacionado con individuos con ideas muy diferentes.

Lograr cuantificar la polarización es de gran utilidad ya que tener un índice de esta respecto a un tema en específico puede permitir ver la tendencia futura de este tema y también comparar la polarización en dos momentos diferentes. La medida de los grupos se ve bastante influenciada por la configuración de los grupos es decir si se dan unos grupos distintos la medición de la polarización será distinta.

Al haber una red polarizada genera problemas grandes ya que al haber dos o más ideas muy opuestas y grandes enfrentadas implican que las ideas menos extremas y grupos de menos cantidad pierden influencia o terminan volviéndose más extremas hasta el punto de que sean asimiladas por las ideas extremas.

En este proyecto se va a desarrollar una función de medida que no dependa de la división por grupos, esto ayudará a poder cuantificar en cada instante de tiempo.

¿Por qué una polarización continua?

La naturaleza del fenómeno de la polarización depende directamente de la naturaleza de las creencias de las personas, ambas son funciones respecto al tiempo. Como vimos la creencia de las personas se da gracias a la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo y de primer orden, además se tiene que es una función total, es decir para cualquier instante de tiempo la función de creencias existe con su respectiva derivada, se puede concluir que las creencias son continuas y diferenciables para cualquier instante de tiempo.

Esto puede resultar más certero en la relación de polarización y las creencias. Esto porque un ligero cambio de las creencias debería implicar un ligero cambio en la polarización, no debería existir una discontinuidad o un pico debido a la inexistencia de la derivada. Estas discontinuidades y picos en la unidad de medida de Esteban y Ray en la derivada se deben al concepto de grupos, esto es debido a que los grupos buscan dividir un espacio continuo para aproximarse a una función de densidad que pareciese representar mejor la distribución de las creencias.

Este concepto de grupos en principio podría ser arbitrario, indicando más claramente que la polarización posee una naturaleza continua, aunque existen casos donde el concepto de grupos sea mejor que la versión continua, un ejemplo es una coalición de partidos políticos, donde se puede ver que, aunque dos personas que estén en la misma coalición posean ideas diferentes se toman como un mismo grupo y un único representante. Por lo que si un individuo cambia de coalición cambia de representante directamente por lo que la discontinuidad está totalmente justificada.

Por otra parte, al conocer que la función es diferenciable y continua nos permite utilizar matemáticas conocidas para la resolución de esta como las aproximaciones lineales puesto que el caso propuesto es una función no elemental no conocemos su función cerrada; pero si tenemos la forma de su derivada, podemos aproximarla función con aproximaciones lineales conociendo un punto de la función.

Objetivos

Objetivo General

Analizar, diseñar e implementar una función que mida y cuantifique la polarización teniendo en cuenta los estados de creencias de un conjunto de agentes que además se pueda comparar con otras configuraciones del sistema (es decir distintos estados de creencias) de los agentes que esta reduzca los inconvenientes que genera la función de medida con los grupos.

Objetivos Específicos

- Desarrollar una fórmula que cumpla las restricciones dadas por los axiomas mencionados en la fundamentación teórica para medir la polarización.
- Hacer que esta medida no tenga los problemas especificados en la definición de la medición por grupos definidas por Esteban y Ray, como la continuidad.
- Lograr que la función que mide la polarización se ejecute en un tiempo computacional tratable.
- Hacer análisis para comprobar las mejoras de esta medida con la medición propuesta por Esteban y Ray, en específico eliminar el concepto de los grupos

Importancia de la polarización.

Es importante tener una medida de la polarización en un sistema y poder cuantificar su magnitud para conocer qué tan distantes están las opiniones para conocer qué tan difícil sería hacer un consenso entre los grupos y crear reformas que permitan a la sociedad avanzar ya que es muy complicado llegar a un consenso entre los individuos. Sociedades altamente polarizadas implica

que no se puede hacer reconciliaciones entre los grupos sensibles. La polarización está estrechamente relacionada con los grupos sociales que dividen la sociedad porque las zonas antes mencionadas suelen estar relacionados con los subgrupos sociales reales como por ejemplo los partidos políticos, además de que sesga y deteriora la percepción de la realidad y la toma acertada de decisiones porque sea cual sea la decisión o el camino que se tome siempre va a haber al menos un grupo que va a estar en desacuerdo. A grandes rasgos la polarización social se manifiesta cuando hay diferentes grupos con ideas desiguales en un entorno y a su vez las ideas de los individuos

que conforman estos grupos son bastante homogéneas.

En este proyecto se va a considerar la polarización del sistema alrededor de un tema dado en particular, este tema puede ser. Cada agente del sistema que en este caso son los usuarios de las redes sociales tendría un estado, se denomina estado de creencia que indica su posición frente a un tema en este caso es un valor continuo entre 0 y 1 dónde 0 sería total desacuerdo y 1 sería total de

acuerdo, luego cada agente se relaciona con los otros con una influencia, formando un grafo con los valores. Cada agente varía su estado de creencia respecto a la influencia que tenga la relación con los demás agentes [9].

Dado un instante en el tiempo y los estados de creencia de cada uno de los agentes, tener un valor de medida del sistema el cual pueda ser comparado con otros estados y determinar qué estado tiene mayor polarización que otro.

Para eso la medida de polarización del sistema tiene que capturar la heterogeneidad entre las diferentes creencias de los distintos agentes y la homogeneidad entre ellos, es decir que entre más cercanos sean las creencias entre ellos la polarización es mayor, además entre más homogéneas sean la diferencias entre los agentes es mayor la polarización. Es decir que la polarización máxima se encuentra cuando hay dos grupos con ideas extremas y totalmente opuestas y que cada uno de estos grupos posean al 50% de los agentes, una menor polarización se presenta cuando las creencias se distribuyen de forma uniforme en el rango de los estados de creencia y por último la

mínima polarización cercana a 0 se da cuando todos los agentes tienen exactamente el mismo estado de creencia.

2. Marco de Referencia

Áreas temáticas

A continuación, se van a enumerar los temas y áreas que se van a tocar en este proyecto.

1. **Cálculo diferencial.** El estudio de la variación de las funciones de una variable
2. **Cálculo integral.** El estudio de las áreas, antiderivadas, volúmenes y series en funciones de una variable
3. **Análisis matemático.** El estudio de la variación, volúmenes, campos y funciones de múltiples variables.
4. **Ecuaciones diferenciales.** El estudio de las ecuaciones que relacionan la variable con su razón de cambio
5. **Álgebra lineal.** Área que estudia concepto como vectores, matrices, rectas y planos
6. **Estadística.** Área que estudia la variabilidad, interpretación y representación de un conjunto de datos.
7. **Métodos numéricos.** Rama que busca por medio de algoritmos encontrar soluciones que aproximen problemas de análisis matemático.
8. **Computación paralela.** Área que busca la creación de algoritmos que solucionan simultáneamente al dividirlo en subproblemas.
9. **Sistemas dinámicos.** Sistemas los cuales sus propiedades evolucionan en el tiempo.

Marco Teórico

A continuación, se van a enumerar algunos conceptos que se utilizarán en el Artículo.

Recta Secante

Una línea secante, también llamada simplemente secante, es una línea que pasa por dos puntos de una curva. Cuando los dos puntos están a una distancia muy cercana a 0, la línea secante tiende a ser una línea tangente.

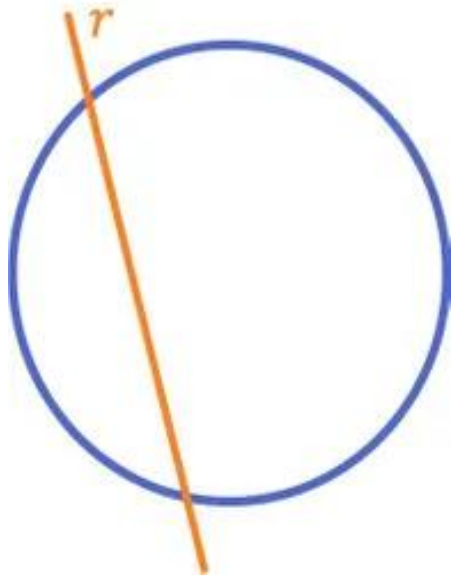


Figura 1. Recta secante de dos puntos de una circunferencia

La línea secante conecta dos puntos $(x, f(x))$ y $(a, f(a))$ en el plano cartesiano en una curva descrita por una función $y=f(x)$. Da la tasa de cambio promedio de f de x hacia a .

$$A(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Recta tangente

La tangente hacia a una curva en un punto P es una recta que toca a la curva solo en dicho punto, llamado punto de tangencia. Se puede decir que la tangente forma un ángulo nulo con la curva en la vecindad de dicho punto.

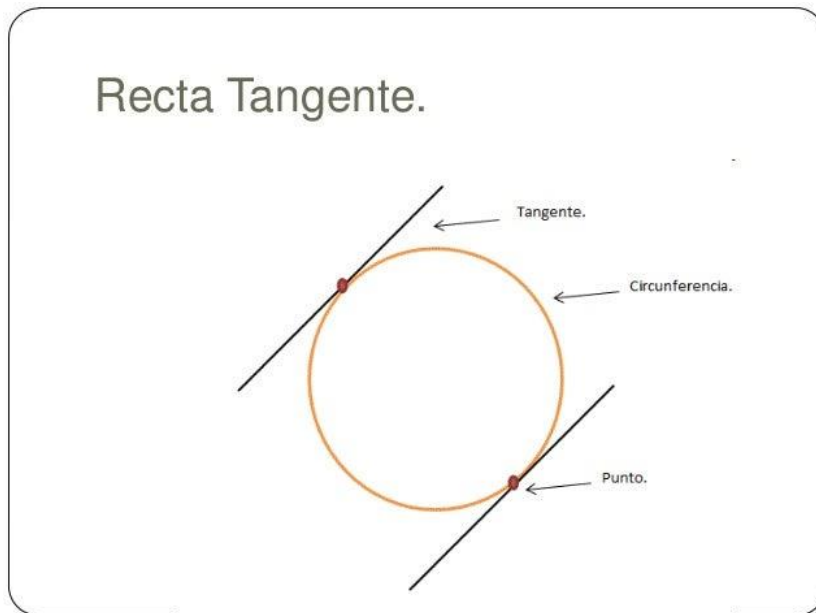


Figura 2. dos rectas tangentes de dos puntos en una circunferencia.

Limite

En matemáticas, un límite es el valor al que se acerca una función o secuencia cuando la variable dependiente o el índice se acerca a algún valor.

Definición 1. (limite, [1]) Sea $b \in \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon. \varepsilon > 0 \exists \delta. \delta > 0 \wedge |x - b| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Es decir, se puede encontrar para todo $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ en el cual, si la variable x se acerca a b , $f(x)$ se acerca a L .

Continuidad

Una función continua es la que en los valores cercanos del dominio producen pequeñas variaciones en la función. Es decir, pequeñas variaciones en las variables independientes implican pequeñas variaciones en las variables dependientes, cuando la función no es continua se les conoce como función discontinua.

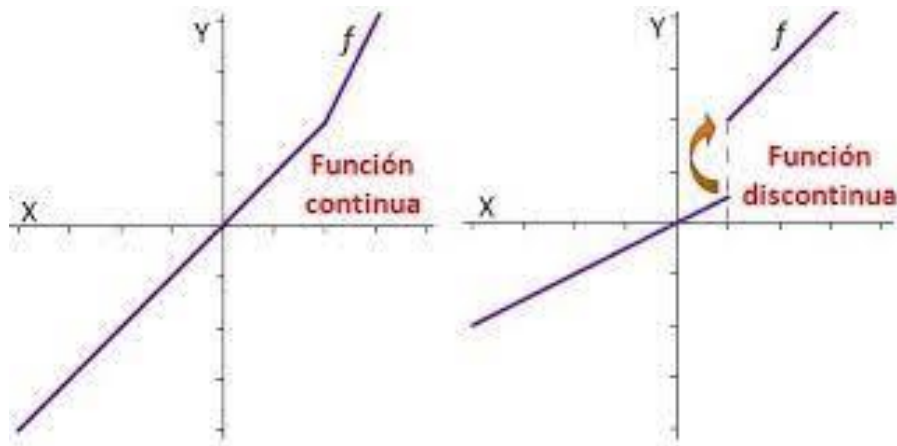


Figura 3. Una función continua y una función discontinua.

Calculo diferencial

Newton y Leibniz, independientemente uno del otro, fueron en gran parte los responsables del desarrollo de las ideas básicas del Cálculo integral hasta llegar a conseguir que problemas, en su tiempo irresolubles, pudieran serlo por los nuevos métodos y de forma casi rutinaria. La idea central del Cálculo diferencial es la noción de derivada.

Este concepto no se formuló hasta el siglo XVII, cuando el matemático francés

Pierre de Fermat, trató de determinar los máximos y mínimos de ciertas funciones. La idea de Fermat, básicamente muy simple. Fermat observó que en aquellos puntos en que la curva tiene un máximo o un mínimo como los de la figura, de abscisas x_0 y x_1 la tangente ha de ser horizontal. El intento de resolver este problema fue lo que condujo a Fermat a descubrir algunas de las ideas rudimentarias referentes a la noción de derivada.

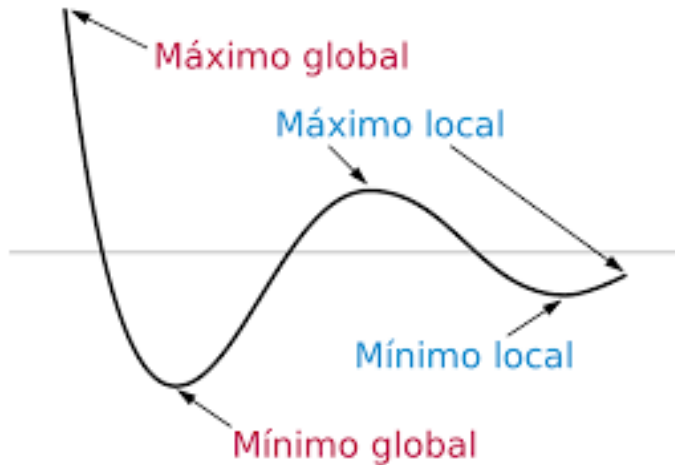


Figura 4. Máximos y mínimos.

Durante ese contexto para encontrar la recta tangente se reducía a encontrar la secante de la función x y $x+h$ usando el siguiente cociente:

Dada una función $f(x) \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se le conoce como coeficiente de variación y está dado por:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El numerador de este cociente mide la variación de la función cuando x varía de x a $x+h$. El cociente representa la variación media de f en el intervalo que une x a $x+h$.

Podemos ver que si h se hace muy cercano a 0 (No exactamente igual ya que implica una división entre 0) la recta secante se parece cada vez más a la tangente en x .

Seguidamente se hace tender h a cero y se estudia lo que le ocurre a ese cociente.

Definición de derivada, usando la noción de límites, podemos hacer que h se acerque lo necesario a 0 sin que sea 0, por lo que podemos decir que la pendiente de la recta tangente está dada por:

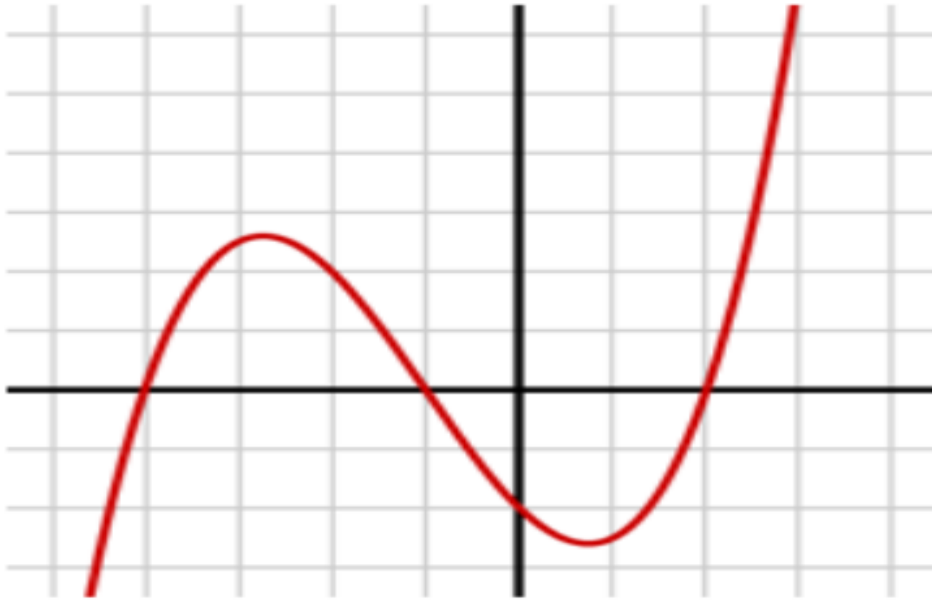
Definición 2.(Derivada de una función,[1]). Dada una función $f(x) \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

la función $f'(x) \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se le conoce como derivada de f y está dada por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si el límite existe $f'(x)$ indica la razón de cambio en el punto $(x, f(x))$ si el límite no existe diremos que $f(x)$ no es diferenciable.

Una característica de las funciones diferenciables es que su grafica es suave y no poseen picos ni saltos.



$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\underline{a} \neq 0$$

Figura 5. de función diferenciable

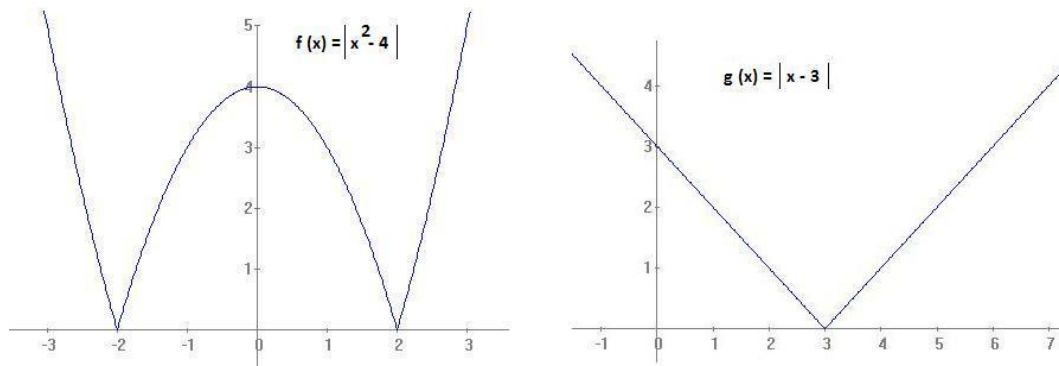


Figura 6. Funciones no diferenciables

Sucesión o Secuencia

Una sucesión o secuencia es una lista de números u otros objetos matemáticos relacionados entre sí, cada uno tiene una posición relativa respecto a los demás.

Ejemplos de las sucesiones son los números pares desde 2: 2,4,6,8,10,12... la sucesión de potencias de dos 1,2,4,8,16,32... La sucesión se cómo una función que va desde \mathbb{N} hacia un conjunto cualquiera, las sucesiones suelen ser designadas como a_n donde n es la variable del dominio.

Definición 3(sucesión o secuencia, [18]) Una secuencia es una función de un subconjunto de enteros a un conjunto cualquiera S usamos la notación a_n para denotar la imagen de la secuencia.

Convergencia

En matemáticas, el límite de una secuencia o sucesión es el valor al que "tienden" los términos de una secuencia. Si existe tal límite, la sucesión se denomina *convergente*.

Se dice que una sucesión que no converge es *divergente*.

Se dice que el límite de una sucesión es la noción fundamental sobre la que descansa en última instancia todo el análisis matemático. [1]

Los límites se pueden definir en cualquier espacio métrico o topológico, pero generalmente se encuentran primero en los números reales.

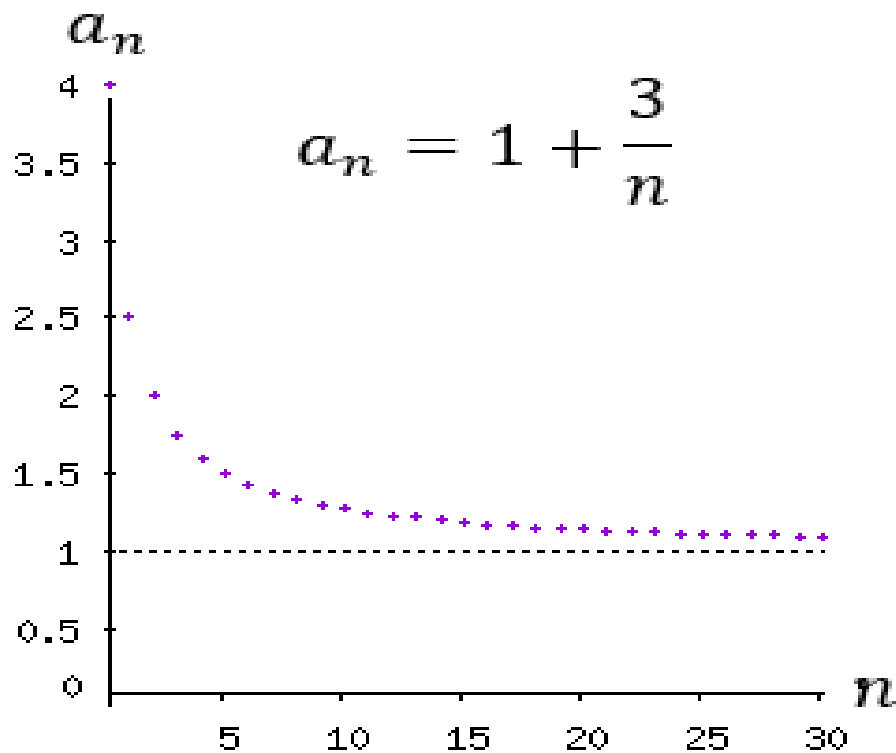


Figura 7. Sucesión $a_n = 1 + \frac{3}{n}$ convergente en los naturales. Podemos ver que entre más grande es n la sucesión se acerca más y más a 1

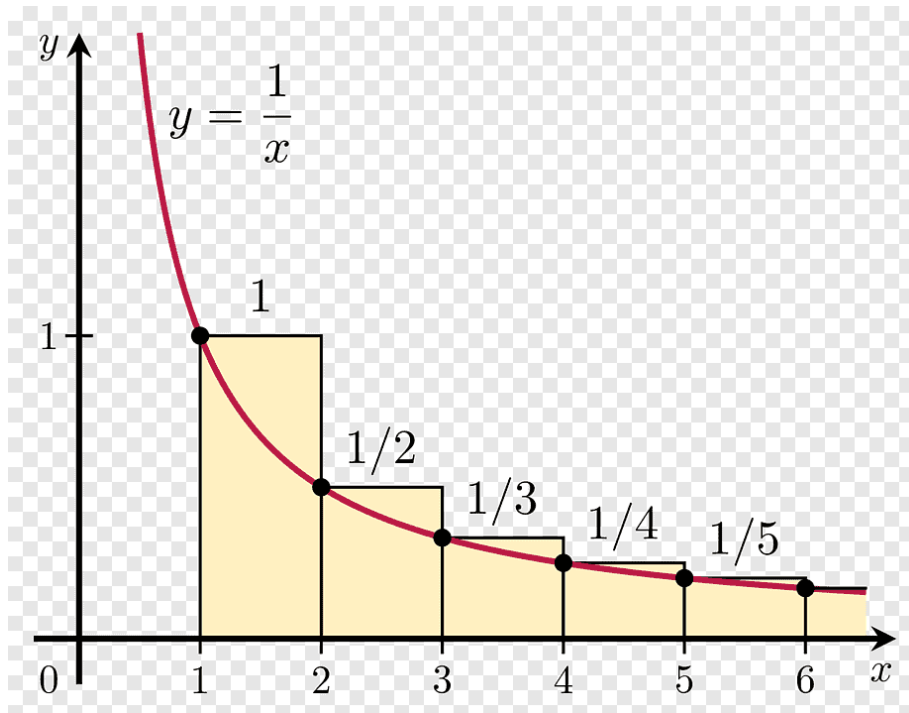


Figura 8. función $f(x) = \frac{1}{x}$ convergente en los números reales.

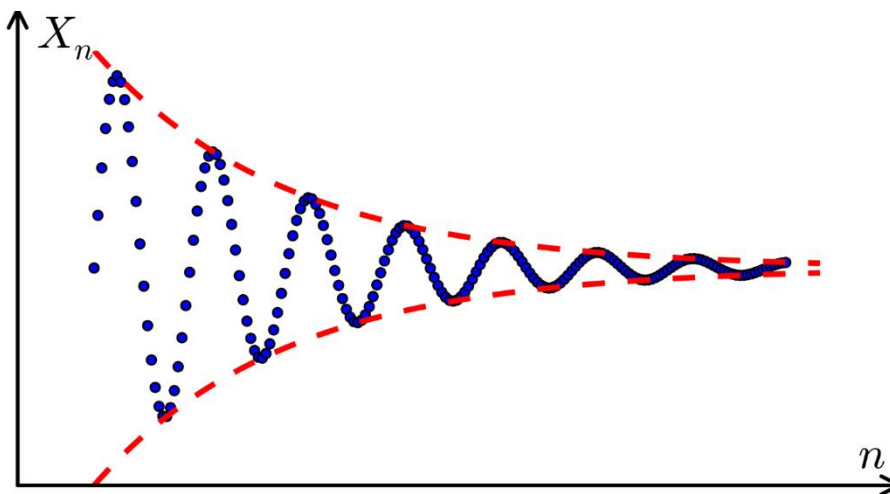


Figura 9. Otro ejemplo de sucesión convergente.

Una función de variable real puede converger igual que una sucesión si

$$\text{sea } f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ y } a \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ el } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ si para todo } n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = a_n$$

Diferenciabilidad y Continuidad.

Relación entre la diferenciabilidad y la continuidad:

En el cálculo diferencial para demostrar la continuidad de una función en un dominio se suele utilizar métodos como la derivada bajo el siguiente teorema:

Teorema 1 (Diferenciabilidad implica continuidad). Sea $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ si la derivada si la derivada f, f' , existe, entonces f es continua.

Es importante notar que una función diferenciable debe ser continua, eso no significa que una función continua sea diferenciable. Las siguientes figuras muestran varios ejemplos:

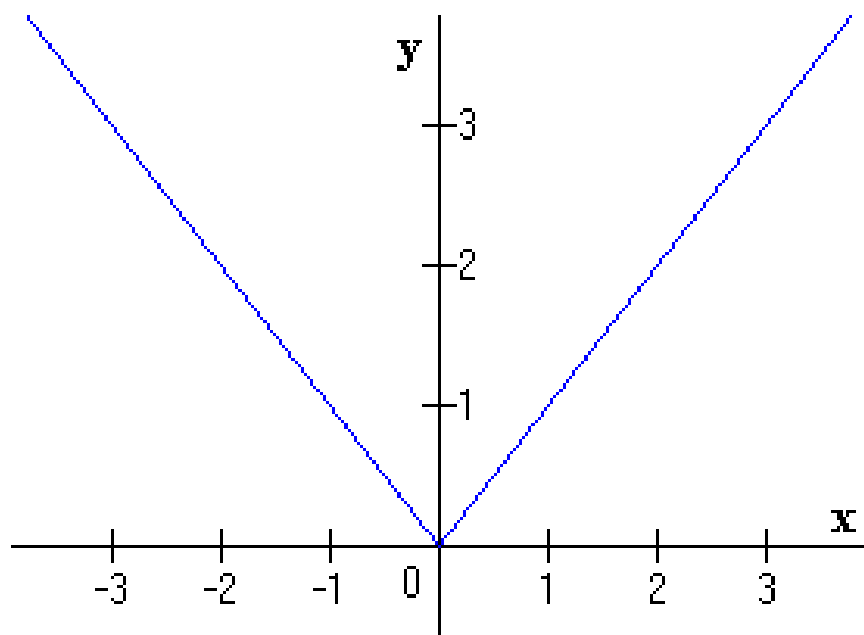


Figura 10. La función $f(x) = |x|$ vemos que es continua para cualquier valor real, pero su derivada no existe en $x=0$, por lo que decimos que no es diferenciable.

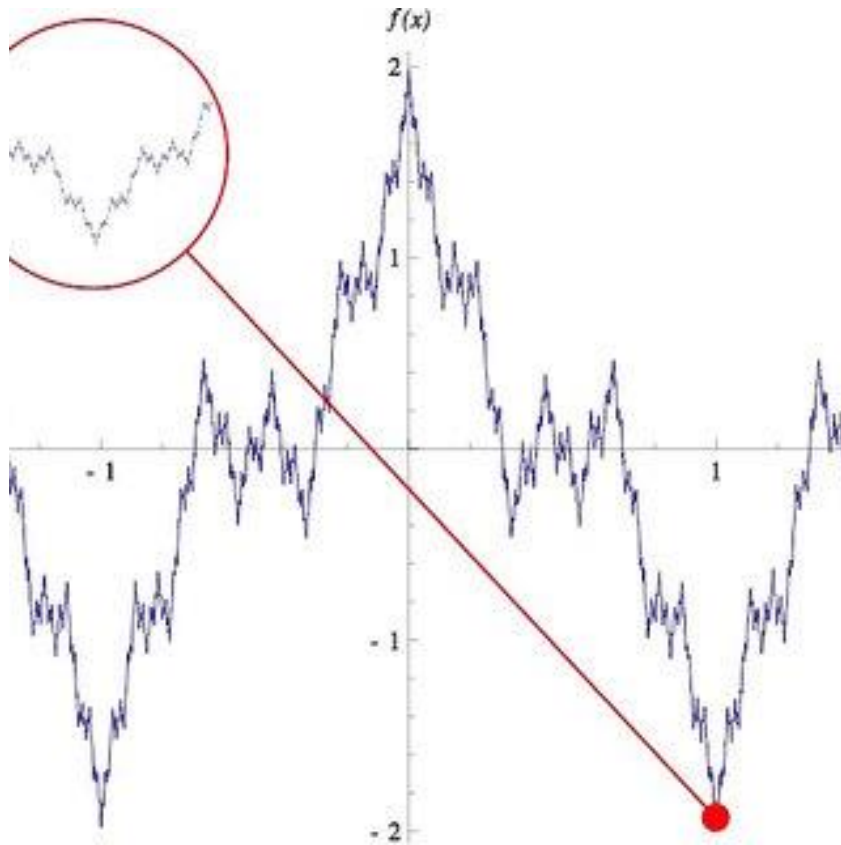


Figura 11. La función de Weierstrass es una función de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n * \cos(b^n * \pi * x)$$

$$\text{donde } 0 < a < 1 \text{ y } b \text{ es impar y } ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

Esta función es continua en todos los puntos, pero presenta una particularidad, no es diferenciable en ningún valor real de x .

Por lo tanto, para demostrar la continuidad de una función es suficiente encontrar una función que sea su derivada o para saber que una función no es diferenciable es suficiente con demostrar que no es continua.

Integración

La integración es uno de los conceptos básicos del cálculo, a grandes rasgos es una suma infinita de elementos que tienden a 0, una suma continua que es opuesta a la derivada de una función. Es muy útil en múltiples disciplinas como las matemáticas puras, ingeniería, física, estadística ya que es útil para encontrar áreas, volúmenes e hipervolúmenes de funciones, regiones y sólidos de revolución.

Definición 4(Integral, [2]). Dada una función $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la integral entre a y b es igual al área bajo la curva de $y = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ y se denota de la siguiente manera.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Otro concepto de la integral es conocido como la integral indefinida, que hace referencia a la antiderivada o primitiva es decir la integral indefinida de la función f es F donde la derivada de F es f , es decir.

$$\int f(x)dx = F(x)$$
$$\frac{dF}{dx} = F'(x) = f(x)$$

Además, se relaciona la integral indefinida con la integral definida de la siguiente forma

Teorema 2 (Teorema Fundamental del cálculo, [1]).

Sea $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $F \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donde

$$\int f(x)dx = F(x)$$

entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

para un a y un b en \mathbb{R}

Esto se le conoce al teorema fundamental del cálculo.

Integral no elemental

Es una integral la cual no existe una función elemental, hecha por polinomios, funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y productos y composiciones de estas funciones.

Una función elemental es una función construida con una cantidad finita de funciones elementales mediante funciones básicas como sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y composición de funciones. Usando potencias, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, trigonométricas inversas, radicales.

Para construir las funciones elementales se enumera un conjunto de funciones llamadas funciones elementales fundamentales.

1. *constante* $f(x) = c, c$ un numero
2. *potencia* $f(x) = x^n$ para un n natural constante,
3. *racional* $f(x) = \sqrt[n]{x}$
4. *exponencial* $f(x) = e^x$ para un n natural constante,
5. *logarítmica* $f(x) = \ln(x)$
6. *trigonometricas* $f(x) = \sin(x), f(x) = \cos(x), f(x) = \tan(x)$
7. *trigonometricas inversas* $f(x) = \operatorname{asin}(x), f(x) = \operatorname{acos}(x), f(x) = \operatorname{atan}(x)$

Si las funciones anteriores se combinan, pudiendo usar, un número finito de veces, las operaciones de adición, resta, multiplicación, división y composición de funciones se consiguen, nuevamente, funciones elementales. Ciertamente, más complicadas que las de la lista precedente.

Una lista de funciones elementales los cuales su integral es no elemental.

$$\begin{aligned} &\sin(x^2) \\ &e^{-x^2} \\ &x^x \\ &\ln(\ln(x)) \end{aligned}$$

Función con varias variables

Una función de varias variables como su nombre indica cumple la definición de función relaciona un elemento de un conjunto a otro conjunto, en el caso de las funciones de una variable relaciona un elemento numérico (como los reales) a otro elemento numérico (como los reales), sino que

también es capaz de relacionar espacios como \mathbb{R}^2 , las funciones de una variable denotan líneas en el espacio, las funciones de dos variables denotan superficies.

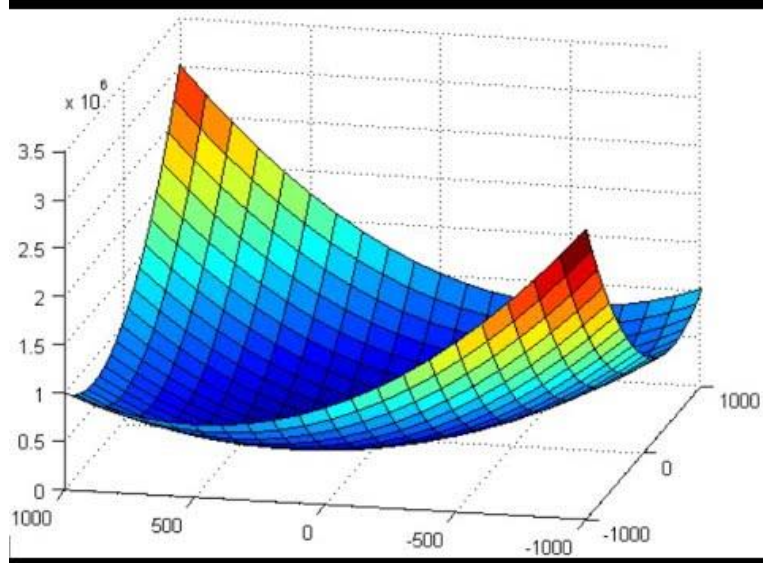


Figura 12. grafica de una funcion de varias variables.

Integral múltiple

La integral múltiple es una variación de una integral definida de una función con varias variables del tipo $f(x, y)$, $f(x, y, z)$ o $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ sobre una región dada, para el caso de dos variables se llama integral doble y en tres variables se llama integral triple.

La doble integral de una función de dos variables indica el volumen que encierra la región en dos dimensiones, la función $z = f(x, y)$ y el plano $z = 0$, para la función excepcional $f(x, y) = 1$ el volumen es exactamente igual al área de la región descrita.

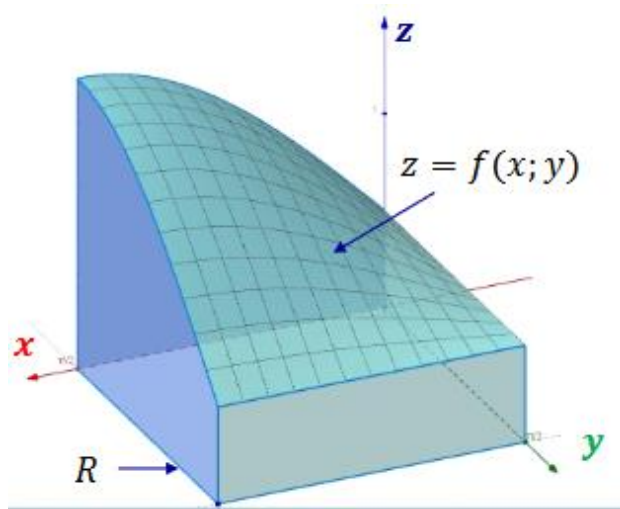


Figura 13. Volumen de una función de varias variables.

Derivadas parciales

La derivada parcial de una función de varias variables es la derivada respecto a cada variable independiente considerando de las otras son constantes.

La notación de la derivada parcial se escribe de la siguiente forma:

Definición 5 (definición derivada parcial,[4]). Sea f una función de varias variables

$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ decimos que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es la derivada parcial de f respecto a x_i y está dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

Incluso si todas las derivadas parciales existen en el punto $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ función no necesariamente es continua en ese punto. Sin embargo, si todas las derivadas parciales existen en un entorno de a y son continuas, entonces la función f es totalmente diferenciable en ese entorno y la derivada total es continua.

Histograma

Un histograma es la gráfica de una variable aleatoria donde la altura de cada barra indica la frecuencia de cada valor, sirve para obtener una aproximación de la distribución de la población o de una muestra.

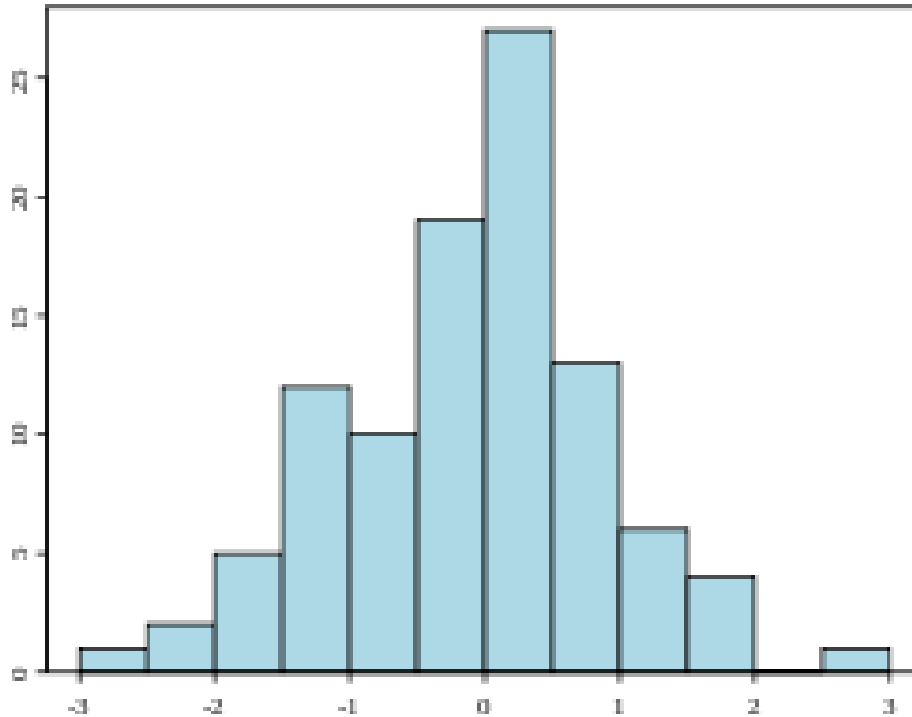


Figura 14. Ejemplo histograma.

El histograma divide el rango de posibilidades de la variable aleatoria en una cantidad finita de bins.

Los histogramas pueden indicar la frecuencia relativa (proporción de bins sobre el total) y frecuencia absoluta (cantidad de elementos en el bin)

Función de densidad

la función de densidad es la extrapolación de los histogramas para variables aleatorias.

La integral entre a y b indica la probabilidad de que dicha variable aleatoria esté entre a y b es decir el área bajo la curva de la función de densidad entre a y b indica la probabilidad de que la variable aleatoria esté entre a y b.

Definición 6 (función de densidad,[5]) sea X una variable aleatoria en \mathbb{R} sea $f(x) \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ a y b números reales, f es una función de densidad tal que

$$P(X < a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

$$P(a < X) = P(a \leq X) = \int_a^{\infty} f(x)dx$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$P(X < a) = 1 - P(X \geq a)$$

$$P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a)$$

Kernel de densidad

El Kernel de densidad o KDE es una forma de estimar una función de densidad de una variable aleatoria. Es muy utilizado para suavizar un histograma de un conjunto de datos específico para hacer inferencias de la población de los datos, basado en una muestra pequeña de la población, otra aplicación está para mejorar la precisión de clasificadores de aprendizaje automático como el bayes ingenuo.

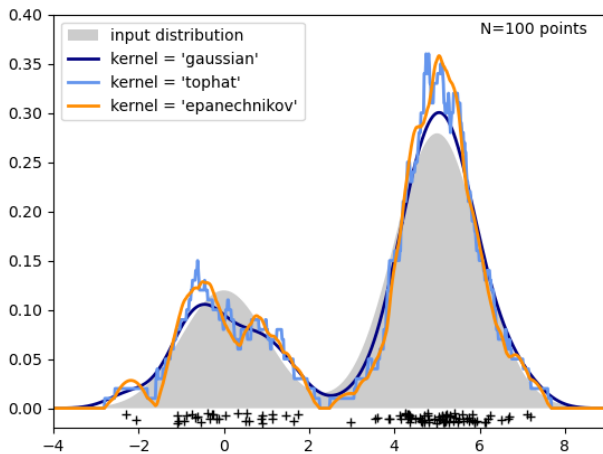


Figura 15. Kernel de densidad.

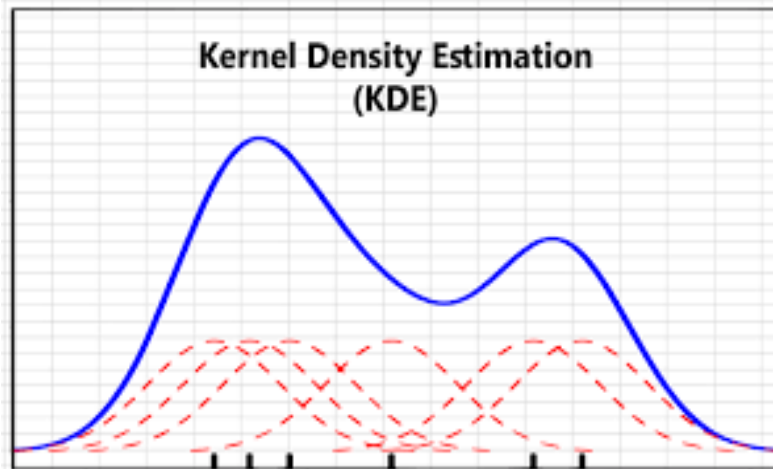


Figura 16. Kernel de densidad

Definición 7(Kernel de densidad, [5]).

Dada una sucesión de la forma $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \dots a_n$ son n muestras de la variable aleatoria a $\hat{f}(x)$ es un KDE o Kernel de densidad que estima la función de densidad de la variable a

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K(x - a_i)$$

Donde h es un parámetro $h > 0$ que señala el ancho de banda K es una función de densidad y simétrica. Es decir.

$$\begin{aligned} K(x) &= K(-x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx &= 1 \\ K(x) &\geq 0 \end{aligned}$$

En esta parte se asumirá que se tienen conocimientos básicos de algebra lineal, tales como el concepto de matriz, multiplicación de matrices, inversa de una matriz, determinante de una matriz, transformaciones lineales y vectores [6].

Valores propios

En algebra lineal los vectores propios o eigenvectores de una transformación lineal son los vectores no nulos los cuales al aplicar la transformación es equivalente al mismo vector multiplicado por un escalar λ que se les hace llamar valor propio o eigenvalor. La transformación está directamente definida por sus vectores y valores propios.

Definición 8(Valores propios, [6]).

Sea una transformación lineal $T(X) = AX$ donde $T \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si existe un vector no nulo v y un escalar λ tal que $T(v) = \lambda v$ se le llamará a v como vector propio y λ valor propio.

Propiedades. Sea $P = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ es decir una matriz conformada por cada vector propio como columna de la matriz D una matriz

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

una matriz diagonal con cada uno de los valores propios.

Entonces tenemos que $A = PDP^{-1}$

Teniendo esto podemos facilitar operaciones de diferente forma:

$A^k = PDP^{-1}PDP^{-1}P \dots DP^{-1}$, sabemos que $PP^{-1} = I$ donde I es la matriz identidad entonces podemos reescribir esto de la siguiente forma $A^k = PD^kP^{-1}$, por lo que podremos calcular cualquier potencia d matrices ya que sabemos la potencia de una matriz diagonal es la diagonal de sus potencias.

Gracias a este resultado podemos definir la exponencial de una matriz gracias a las **series de Taylor** [4]

Sea $f \in \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(A)}{n!} * (X - A)^n$$

A es una matriz nxn para el caso de la función

$$f(X) = e^X$$

para A la matriz nula por lo que $f^{(n)}(A) = e^A = I$ por lo tanto todas las derivadas son la matriz identidad $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ Usando la diagonalización podemos decir que

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{PD^nP^{-1}}{n!} = P \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!} P^{-1} = P f(D)P^{-1}$$

en múltiples casos aplicar la función a la diagonal es equivalente a aplicar la función a los elementos de la diagonal. Podemos aplicarla a la función exponencial antes mencionada

$$e^X = Pe^DP^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

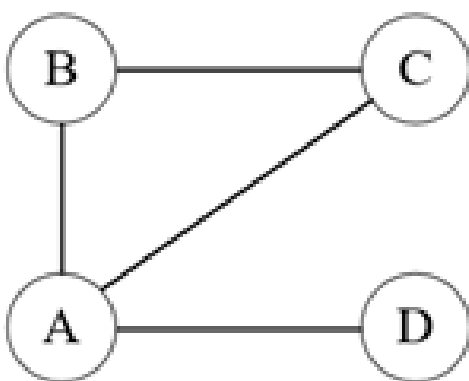
Matriz de adyacencia

Una matriz de adyacencia es una matriz cuadrada que se usa para representar grafos.

Sea una matriz M entonces

Si es grafo no tiene peso.

$$M[i][j] = \begin{cases} 1 & \text{si el vertice } i \text{ tiene un arco a } j \\ 0 & \text{si el vertice } i \text{ no tiene un arco a } j \end{cases}$$

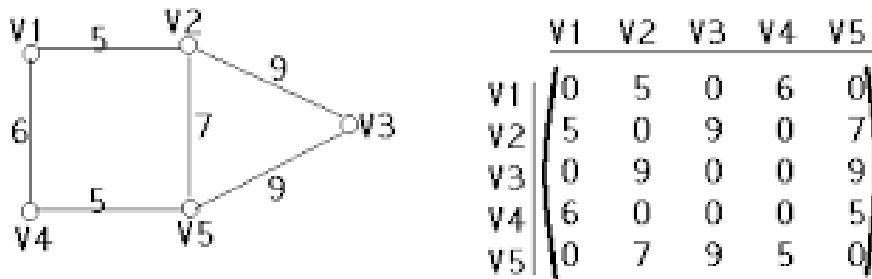


	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	1	0
C	1	1	0	0
D	1	0	0	0

Figura 17. Matriz de adyacencia de grafo sin peso.

Si el grafo tiene peso representado por w

$$M[i][j] = \begin{cases} w(i,j) & \text{si el vertice } i \text{ tiene un arco a } j \\ 0 & \text{si el vertice } i \text{ no tiene un arco a } j \end{cases}$$



G

Figura 18. Matriz de adyacencia de grafo con peso.

Propiedades:

- Si el grafo es no dirigido la matriz es simétrica, eso quiere decir: $M[i][j]=M[j][i]$
- Si M no tiene pesos sabemos que:

$M^k[i][j]$ indica la cantidad de caminos de i a j de tamaño k

Ecuaciones de recurrencia

La ecuación de recurrencia es una sucesión la cual sus valores actuales dependen de los términos anteriores.

Un ejemplo podría ser el siguiente:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$a_1 = 1$$

una solución de esto es $a_n = 2^n - 1$

Otro ejemplo es la sucesión de Fibonacci:

$$F_1 = 0$$

$$F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona las derivadas con sus variables.

Es muy aplicada en matemáticas aplicadas y en matemáticas puras, ya que tienen la capacidad de modelar sistemas eléctricos, sistemas físicos como péndulos, modelos meteorológicos, modelos epidemiológicos, modelos económicos y modelos poblacionales.

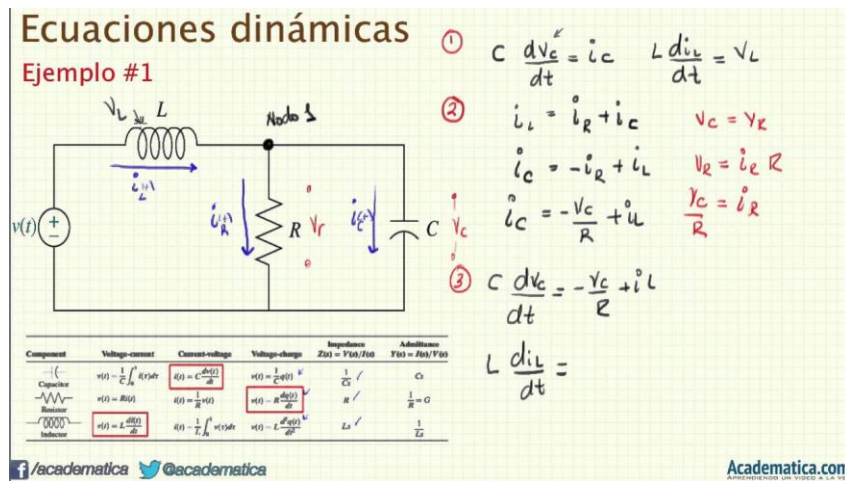


Figura 19. Ecuaciones diferenciales de circuitos eléctricos

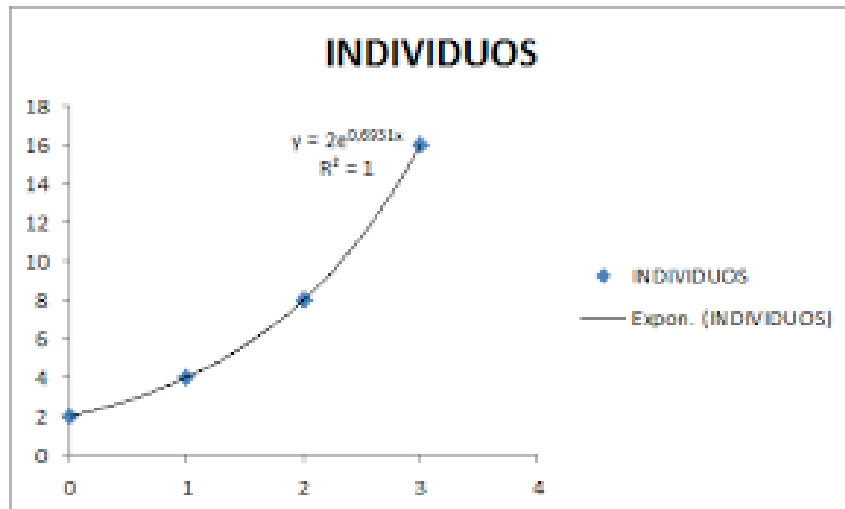


Figura 20. Modelos poblacionales solucionados mediante ecuaciones diferenciales

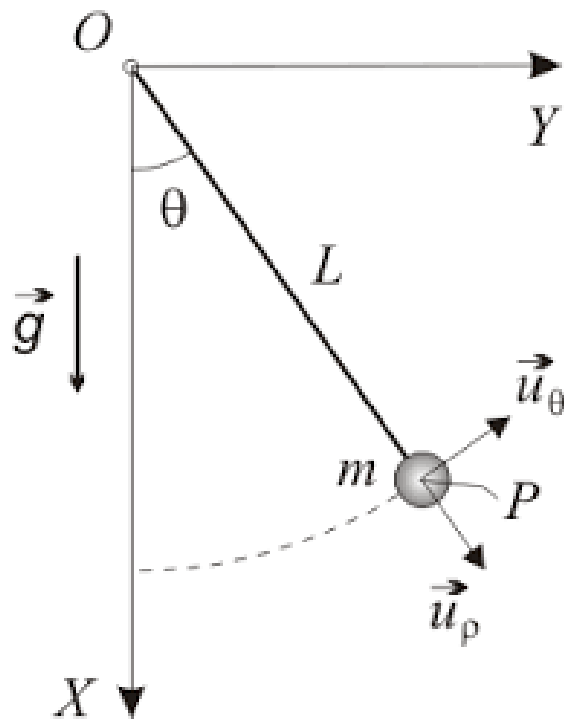


Figura 21. Péndulo simple, es posible modelarlo con una solución de una ecuación diferencial.

Múltiples veces no puedes escribir la relación de las variables de forma explícita, pero si es posible relacionarla con su razón de cambio instantánea (derivada) o su velocidad, en ese caso hay que encontrar una función y su derivada que satisfaga la relación y esa es una solución de la ecuación.

Puede haber múltiples soluciones a esa ecuación diferencial, para eso puede ser necesario fijar un punto de la solución a este se le llama estado inicial o una condición de frontera.

Por lo general la mayoría de las ecuaciones no poseen solución elemental, pero es posible aproximar a estos usando múltiples algoritmos para estimar estas ecuaciones, unos ejemplos son el método de newton o los métodos de rungekutta.

Sistema de ecuaciones diferenciales

Un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de relaciones diferenciales que se relacionan entre sí, la solución de este sistema es un grupo de funciones que relacionan todas las variables.

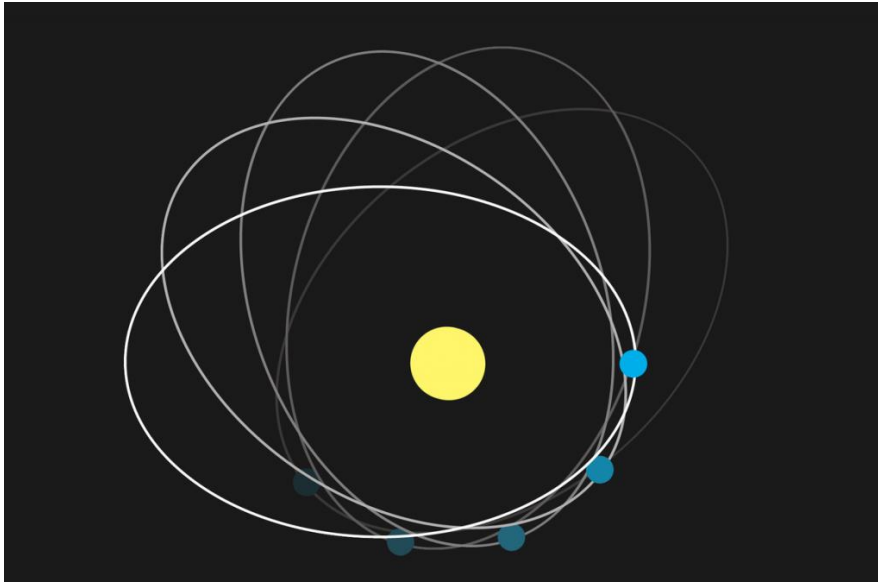


Figura 22. sistema de ecuaciones diferenciales son las leyes de Kepler para el movimiento de los astros.

Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico evoluciona con el tiempo, estos son usados en la física, en la economía y en las matemáticas.

En este sistema hay dos tipos de variables endógenas las cuales afectan al sistema, pero y el sistema las provoca y las variables exógenas que el sistema no las provoca, pero estas si afectan al sistema.

Estas variables interaccionan entre sí para evolucionar.

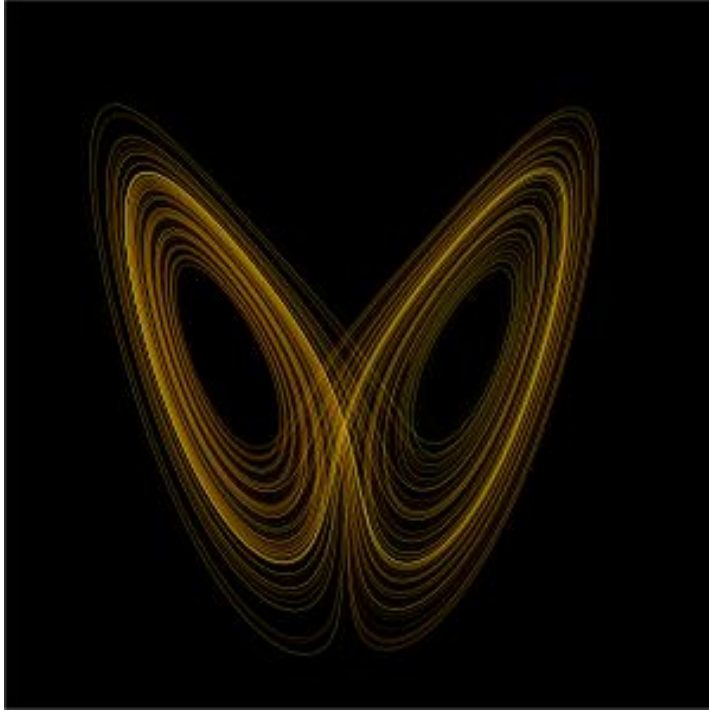


Figura 23. Un ejemplo de sistemas dinámicos es el atractor de Lorenz.

Tipos de sistemas dinámicos:

Discretos

Un sistema dinámico es discreto porque el tiempo se mide en pequeños lapsos, para modelar esto usamos ecuaciones recursivas, de esta forma.

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t)$$

Este sistema es usado en modelos poblacionales y es conocida como la ecuación logística.

Continuos

Si el tiempo es continuo el sistema dinámico es continuo, por lo que suele expresarse como una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{dx}{dt} = ax * (1 - x)$$

Sistemas lineales

Los sistemas lineales son aquellos los cuales las variables solo aparecen de forma lineal, por ejemplo, en el caso continuo sería un sistema de ecuaciones de la siguiente forma.

$$\frac{dy}{dt} = x - y$$

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3y$$

Vemos que las variables x , y solo aparecen de forma lineal en cada una de las ecuaciones diferenciales. Gracias a esto podemos trasladar y encontrar una solución.

sea X un vector de variables

$$X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Sea X' un vector de sus derivadas

$$X' = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)$$

$$f(t) \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

y A una matriz cuadrada

tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales que modela el sistema dinamico de la siguiente forma

$$X' = AX + f(t)$$

adicionalmente conocemos el estado inicial de X que es X_0 para un tiempo inicial t_0

entonces la solución de este sistema está dado por

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s)ds$$

3. Desarrollo del Proyecto

Modelo Basado en DeGroot

Se conoce que el vector w es una función total en los números reales.

El vector w es el producto del modelo multiagentes propuestos en el Artículo de Multiagentes bajo el sesgo de confirmación.

En el artículo [7] donde estudia la evolución de creencias y la polarización basados en DeGroot, se presentan tres modelos multiagentes que aproximan las creencias de las personas bajo distintos sesgos, el sesgo de confirmación y el sesgo de autoridad. La i – esima posición del vector w , $w_i \in [0,1]$ denota la magnitud en la cual el agente i cree en una proposición de interés p , donde 0

y 1 representan los valores mínimos (total rechazo de p) y máximos (total aceptación de p) de esa magnitud.

El vector de creencias w para cada sesgo está dado por el siguiente sistema de ecuaciones recurrentes.

Definición 9 (Modelos DeGroot para las creencias, [9]) Sea $w \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función que modela las creencias en instantes de tiempos discretos y están dadas por las siguientes ecuaciones de recurrencia.

Sesgo de autoridad:

El sesgo de autoridad es la tendencia de sobre estimar la opinión de una autoridad sobre el tema determinado, ya sea un experto, tu jefe, un famoso, una persona particular, etc.

La noción principal del sesgo de autoridad es que tu creencia tienda a acercarse respecto a una noción de influencia. Para eso es necesario definir una relación de influencias que relacione dos agentes y pueda ser cuantificado, por eso usaremos un grafo y su matriz de influencia.

Dado $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $w \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ n es la cantidad de agentes, $I_{i,j}$ representa la influencia que tiene i sobre j es decir entre mayor sea $I_{i,j}$ significa que i es más autoridad frente a j .

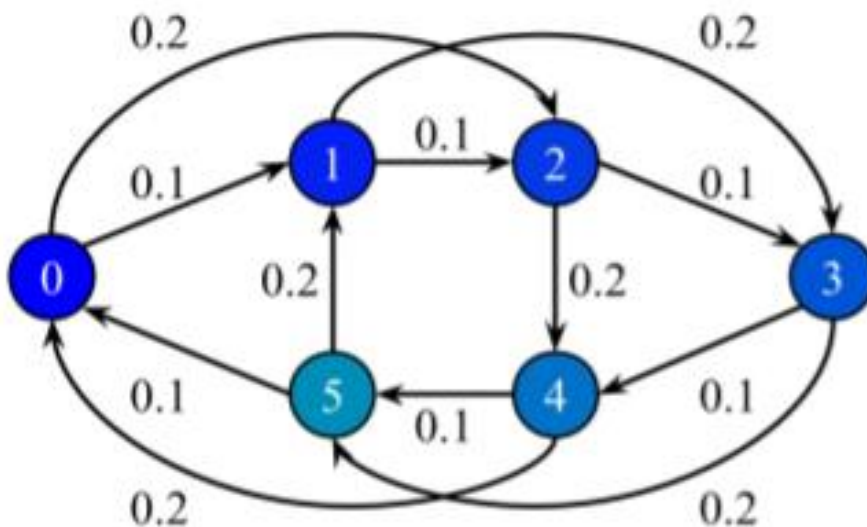


Figura 24 Grafo de influencia.

En el grafo podemos ver la influencia de los agentes de 0 al 5, vemos que $I_{0,2}$ es 0.2, esto significa que la influencia del agente 0 al agente 2 es de 0.2 y $I_{2,3}$ es 0.1 esto significa que la influencia del agente 2 al agente 3 es de 0.1

Por ejemplo, imagine un escenario de la política.

p está a favor del tratado de libre comercio (TLC)

Con esto podemos decir que si $w_i(t) = 0$ el agente i está totalmente en contra del TLC en el instante de tiempo t , si $w_i(t) = 1$ el agente i está totalmente a favor del TLC en el instante t .

Si notamos la creencia es dinámica, por lo tanto, se va a actualizar respecto a las creencias e influencias de tu entorno. El agente i tiene una creencia cualquiera $w_i(t)$, la creencia de i se va a actualizar en dirección de las otras personas, dándole más peso a aquellos que tengan más influencia sobre ti. Por lo tanto, la actualización debe dada por un tipo de promedio ponderado de las influencias. Definimos el sesgo de autoridad con la siguiente ecuación de recurrencia.

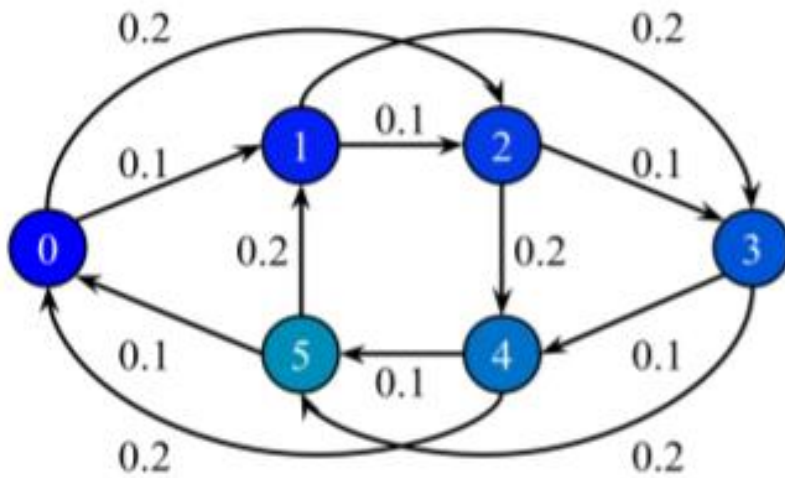
$$w_i(t + 1) = w_i(t) + \frac{1}{n} \sum_j^n I_{i,j} * (w_j(t) - w_i(t))$$

Donde n es la cantidad de individuos en la red, t es un instante dado y I es la matriz de adyacencia de la red.

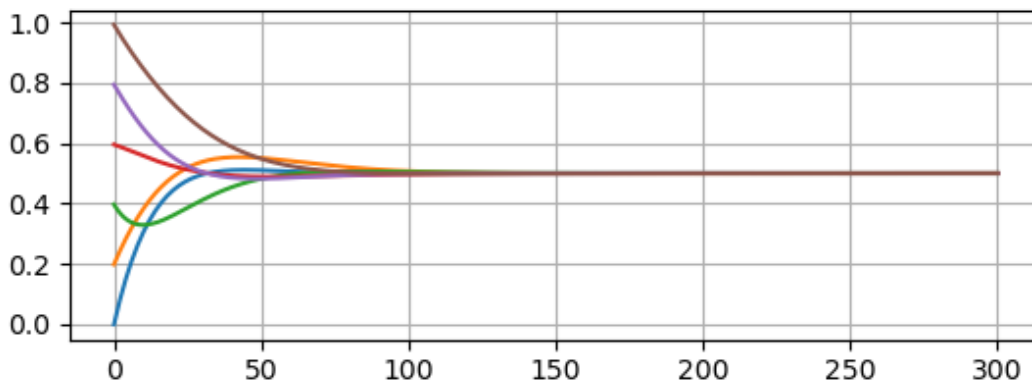
Es necesario notar que hay que fijar un estado inicial, $w(0)$ que indica las creencias en un instante 0.

Manteniendo el ejemplo del TLC, definimos las creencias en un instante 0 como. $w(0) = (0.5, 0.3, 0.7, 0.4, 0.6)$, es decir la creencia del agente 0 es 0.5, la creencia de agente 1 es 0.3, la creencia del agente 2 es 0.7, la creencia del agente 3 es 0.4 y la creencia del agente 4 es 0.6.

El siguiente grafo de influencias



Podemos graficar las evoluciones en el tiempo con la siguiente grafica.



Podemos ver la evolución en múltiples instantes de tiempo:

t_i	$w_0(t_i)$	$w_1(t_i)$	$w_2(t_i)$	$w_3(t_i)$	$w_4(t_i)$	$w_5(t_i)$
0	0.00000	0.20000	0.40000	0.60000	0.80000	1.00000
10	0.30825	0.38624	0.33175	0.56180	0.65290	0.85256
50	0.51431	0.55517	0.48591	0.49300	0.48605	0.55248
100	0.50327	0.51129	0.50855	0.50076	0.50330	0.50286
200	0.49998	0.50001	0.49998	0.50001	0.49998	0.50001
250	0.50403	0.50400	0.50403	0.50400	0.50403	0.50400
300	0.50000	0.49999	0.50000	0.49999	0.50000	0.49999
∞	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000

Podemos ver como cada variable evoluciona en diferentes instantes de tiempo, gráficamente y con las tablas.

Sesgo de confirmación:

Sesgo de confirmación consiste en filtrar o darles más influencia a aquellas ideas cercanas a la propia, esto puede ocurrir de forma inconsciente, es decir entre menos distancia la influencia es mayor.

Por ejemplo, si se tiene una opinión cualquiera, la actualización ponderará mejor a aquellos que están muy cerca de tus ideas y peor entre más lejos, esto independiente esto en adición a la influencia que dicho individuo tiene sobre ti podemos tener la actualización.

Existen múltiples funciones que modelan el sesgo de confirmación, en este caso bastará agregar un factor corrector que hará este efecto de que con menos distancia la actualización es mayor, este efecto es B , a su vez también contamos con la matriz de influencia I del sesgo de autoridad.

$$w_i(t + 1) = w_i(t) + \frac{1}{n} \sum_j^n B_{i,j} I_{i,j} * (w_j(t) - w_i(t))$$

Donde B es una función de confirmación en el Artículo está dada por:

$$B_{i,j} = 1 - |w_i(t) - w_j(t)|$$

Como se mencionó $B_{i,j}$ dará ese efecto de que entre menor sea la distancia expresada con el valor absoluto entre el agente i al agente j la influencia es mayor y al contrario la distancia es mayor la influencia es menor.

Con la anterior ecuación de recurrencia podemos modelar el sesgo de confirmación, como en el sesgo de autoridad para este será necesario un estado inicial $w(0)$.

Con estos dos sesgos podemos modelar en tiempo discretos, las influencias, que nos permitirá medir la polarización en el siguiente capítulo.

Polarización de Esteban y Ray.

En [1] Esteban y Ray desarrollaron una medida de polarización basada en los grupos, primero particiona el rango de 0 a 1 de creencias en una cantidad de subintervalos que agrupan una cantidad de individuos con creencias dentro de cierto rango consideradas similares, creando un histograma además se toma un representante por cada grupo y con esto realizar la medida, esto se deberá hacer en cada instante de tiempo.

definimos π_i como la frecuencia relativa de creencias en el grupo i , es decir dado un modelo de DeGroot $w \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ para un instante t , π_i te dicen la frecuencia de los componentes $w(t)$ que están en el grupo i .

Suponga el siguiente ejemplo anterior tenemos $w(0) = (0.0, 0.2, 0.4, 0.8, 1.0)$ y un histograma de 4 grupos.

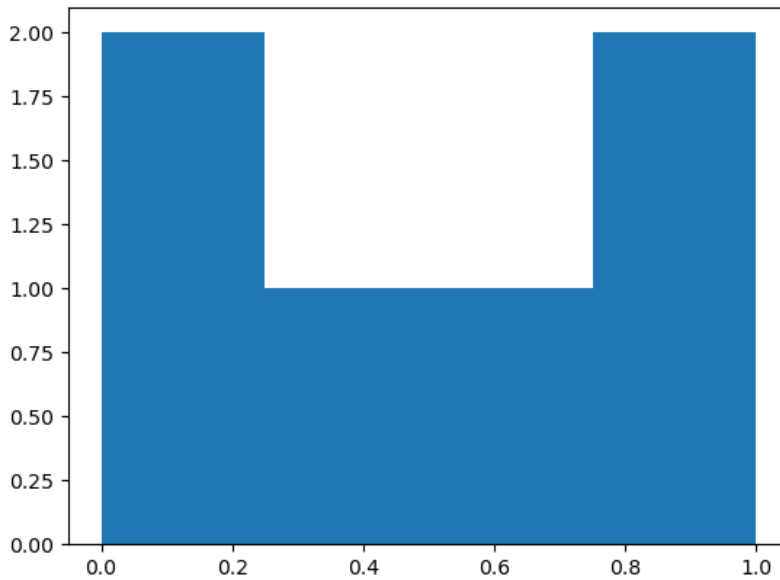


Figura 25 Grafo histograma de $w(t)$.

Este es un ejemplo del histograma para 4 grupos,

Vemos el anterior histograma definimos π tendrá las frecuencias relativas tal que

$$\pi_0 = \frac{2}{6}, \pi_1 = \frac{1}{6}, \pi_2 = \frac{1}{6}, \pi_3 = \frac{2}{6}$$

π_i es la proporción de agentes con estados de creencias en el grupo i . y_i valor representativo del grupo i , en este caso el valor medio del grupo i . Cada grupo i es un intervalo continuo $[a_i, b_i)$ que particiona el intervalo de 0 a 1.

Adicionalmente para cada grupo es necesario definir un representante, para esto usamos la variable $y \in \{0..m - 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, m es la cantidad de grupos

Para el histograma tenemos que

$$y_0 = 0.125, y_1 = 0.375, y_2 = 0.625, y_3 = 0.875$$

Ya que y tiene el punto medio en cada grupo del histograma.

Ya con esto podemos definir la medida de Esteban y Ray.

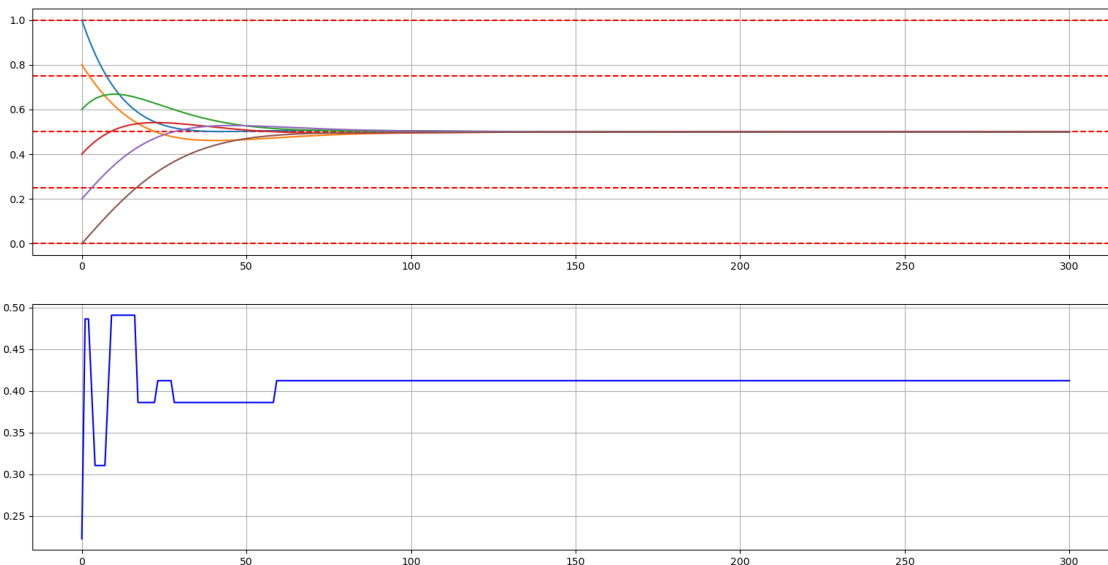
La fórmula de la medida de Esteban y Ray [7] es la siguiente:

Definición 11 medida discreta de Esteban y Ray

$$per(\pi, y) = K \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \pi_i^{1+\alpha} \pi_j |y_i - y_j|$$

K es una constante. α es un parametro. k es la cantidad de grupos.

Podemos verlo gráficamente con el ejemplo del TLC y el estado inicial, tenemos la siguiente grafica



Vemos que cuando los grupos están alejados entonces la polarización es máxima cuando los grupos se acercan ligeramente, pero, aunque todos tiendan a 0.5, algunos agentes tienden a 0.5⁺y

otros a 0.5^- por lo que, aunque vayan asintóticamente al mismo valor, no están nunca en el mismo grupo, por lo tanto, aunque todos van al mismo valor la polarización no es 0.

Problema de discontinuidad.

Esta medida presenta dos problemas sustanciales en cuanto a continuidad, esto se debe a que si en un individuo cruza la frontera de un grupo a otro la polarización va a aumentar o disminuir muy abruptamente porque va a pertenecer a un grupo distinto, es decir que la medida de polarización va a 5 presentar discontinuidades cada momento que el agente cruce la frontera y cambie de grupo. Según el modelo de multiagentes [9], el estado de creencia es continuo en cada instante de tiempo.

Por otra parte, vemos que en el artículo del modelo de multiagentes [3], el cual se utiliza la medida de polarización desarrollada por Esteban y Ray [7] se puede ver que la medida de polarización depende directamente de la cantidad de grupos que se elijan para el histograma.

Podemos ilustrar el siguiente ejemplo

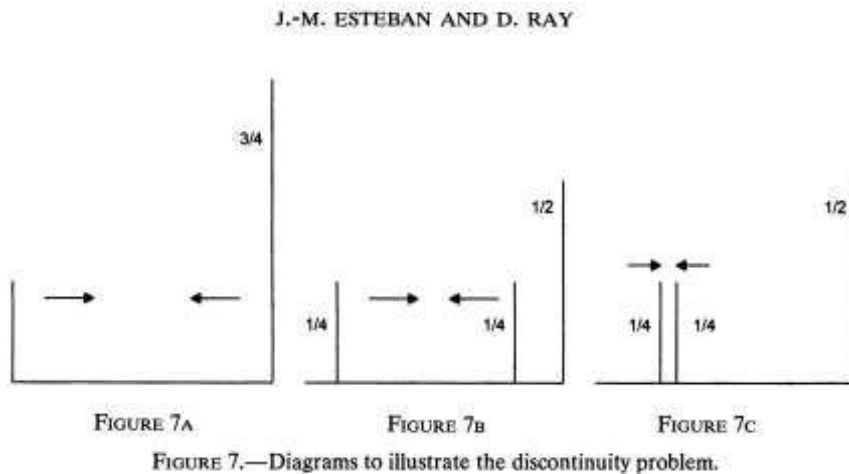


Figura 26. Diagrama que ilustra problema de discontinuidad extraído del artículo de multiagentes [9].

Suponga que inicialmente se tiene una población, dónde $\frac{3}{4}$ de ella está de acuerdo con el TLC y $\frac{1}{4}$ restante no. Ahora suponga que en un instante de tiempo siguiente el $\frac{1}{4}$ que estaba totalmente

en contra, empieza a ponerse un poco de acuerdo y del $\frac{3}{4}$ que estaba de acuerdo $\frac{1}{4}$ empieza a estar ligeramente desacuerdo. En cada instante siguiente las dos poblaciones de $\frac{1}{4}$ se acercan entre sí, cuando estas se juntan (están en el mismo grupo) la polarización presenta un salto inmediatamente, dando lugar a una discontinuidad como se ilustra en la figura 26.

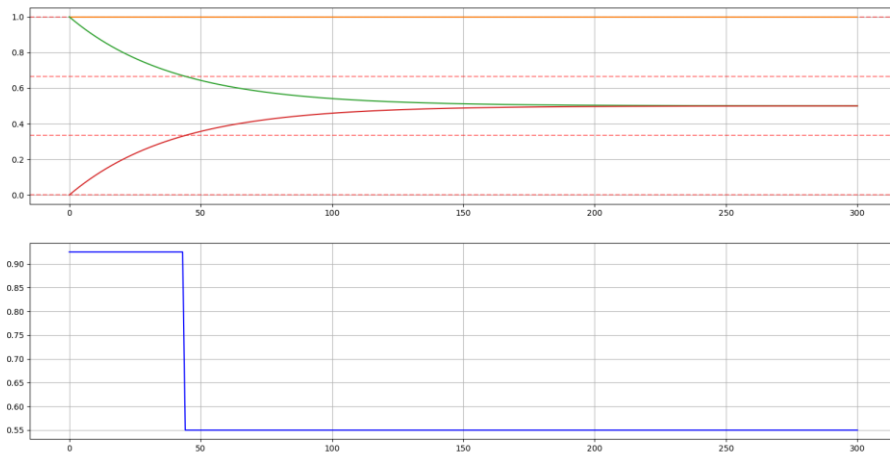


Figura simulación de la figura 25.

Vemos que cuando el agente verde y el agente rojo están en el mismo grupo la polarización toma una discontinuidad esto debe a la noción de los grupos

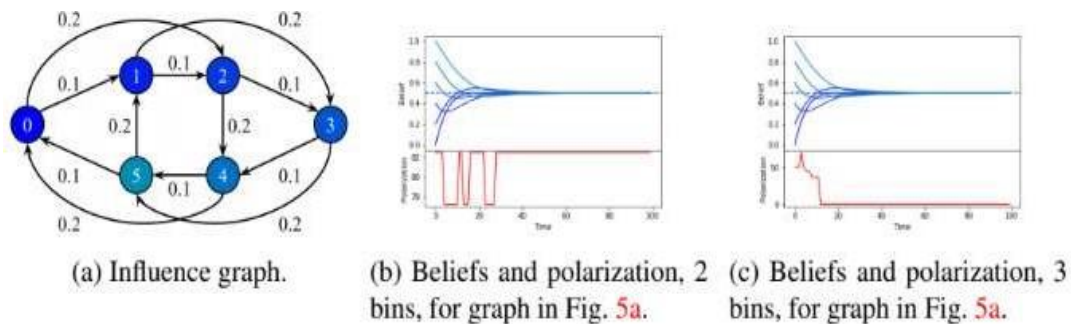


Figura 26. Diagrama que ilustra problema de discontinuidad. Tomada del Artículo de multiagentes [9].

En el gráfico podemos ver las relaciones de influencia que poseen cada agente con los demás en un grafo, en los otros dos vemos la evolución de los estados de creencia de cada uno de los agentes en el tiempo y la medida de la polarización, en el segundo caso con dos grupos y en el tercer caso con tres grupos. Esto se debe a que el estado de creencia de algunos agentes en el caso de los dos grupos tiende al límite a 0.5^+ y otros tienden a 0.5^- al esto ocurrir nunca pertenecerán al mismo grupo $[0, 0.5)$, $[0.5, 1)$. Aunque se acercan al mismo punto asintóticamente por eso la polarización en el caso de 2 grupos tiende a ser máxima. Se puede ver que la polarización en el

caso de tener 3 grupos ($[0,0.33\dots)$, $[0.33\dots,0.66\dots)$, $[0.66\dots,1)$) tiende a 0 eso se debe a que todos los estados de creencia de los agentes tienden a 0.5 como en el caso anterior, pero en este caso no hablamos con un borde de los grupos, al pertenecer al mismo grupo la polarización decrece y va directamente a cero, aunque los estados de creencia evolucionen de la misma forma la conclusión es distinta dependiendo de los grupos que se tomen, esto puede cambiar drásticamente las conclusiones que se tomen.

En este proyecto se busca encontrar una función que mida la polarización que prescindiera del concepto de grupos y además solucione estos problemas de continuidad que la medida de Esteban y Ray poseen, además pueda medir la polarización.

2.Solución

Dado lo anterior a partir de ahora se va a entrar en el desarrollo de una función de medida la cual prescindiera de la noción de los grupos y que sea continua. Para eso usaremos herramientas del cálculo y la estadística como las integrales múltiples, los estimadores de población en específico el Kernel de Estimación de Densidad KDE [5].

Una vez obtenida la función demostraremos la continuidad basándonos en su diferenciabilidad, para eso deberemos extender los modelos basados en DeGroot para los reales además de eso demostraremos que cumple los axiomas de la polarización enunciados en el documento de Duclos, Esteban y Ray [12].

Creación del KDE:

Primero debemos entender que el vector π contiene las probabilidades del grupo, es decir que el vector π es un histograma de la distribución de los agentes.

En estadística y en matemáticas se usan múltiples herramientas para aproximar a estos histogramas de forma continua, un ejemplo de esto son los KDE, los KDE permiten ajustar una función de densidad a un conjunto de datos o al histograma que este crea.

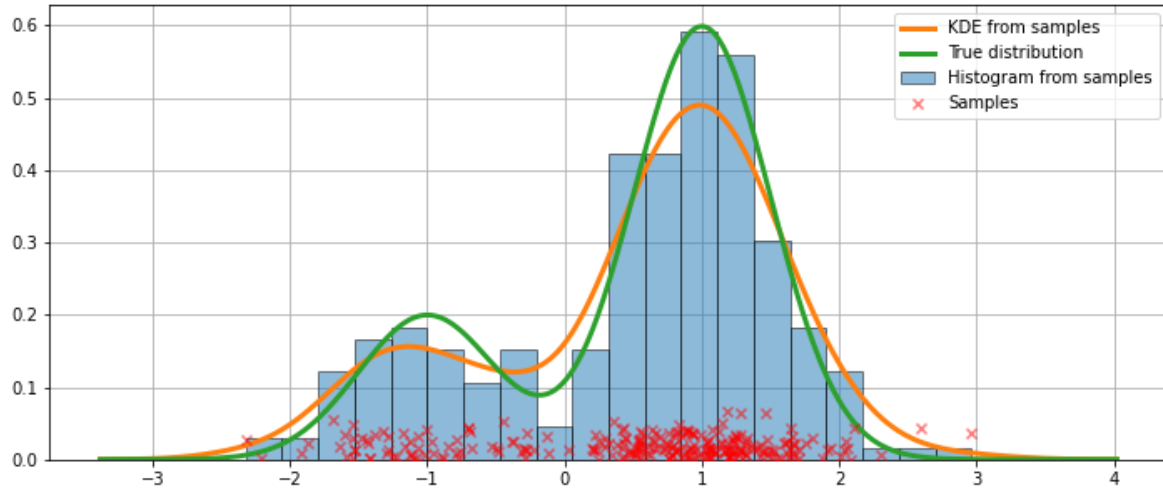


Figura 27. de un KDE tomado de: <https://www.statsmodels.org>

Para eso vamos a usar la siguiente definición:

Definición 10(KDE para la polarización):

Sea f un KDE $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, y $w \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

donde $w(t)$ es el vector de creencias que depende de una variable de tiempo

$$f(x) = K \sum_{i=0}^n e^{-\left(\frac{x-w_i(t)}{a}\right)^2}$$

Donde K y a son constantes.

Podemos ver que la idea de esto es tener una campana gaussiana por cada agente, esta campana estará centrada en la influencia al sumarse dará como resultado el KDE.

K debe ser una constante de la forma que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Sabiendo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a * \sqrt{\pi}} * e^{-\frac{x}{a}} = 1$$

Se puede deducir que $K = \frac{1}{n \cdot a \cdot \sqrt{\pi}}$

De esta forma se puede decir que f es una función de densidad.

a es el ancho de banda, el cuanto de ancha es la campana, si el Kernel busca estimar una función de densidad desconocida y el parámetro es muy grande la estimación es peor porque muchos datos subyacentes entran en juego haciendo que parezca una distribución con una moda. Si a es muy pequeña se verá como un montón de picos sueltos. El valor óptimo para a es $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ [5] con esto podemos encontrar una función de densidad.

Si $K = \frac{1}{n \cdot a \cdot \sqrt{\pi}}$ el valor esperado de f está dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \sum_{i=0}^n \frac{w_i(y)}{n}$$

Es decir, el promedio de la función de densidad es el mismo que el promedio del vector $w(t)$.

Teniendo este KDE podemos definir la medida de polarización $P(w(t))$

Función de Polarización Continua

La extensión natural de la función de medida de Esteban y Ray dada en la definición #, se obtiene reemplazando los histogramas, por KDE y las sumatorias por integrales, como se expresa en la siguiente definición.

Definición 12 (Definición polarización continua). Sea $P \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de vectores de tamaño n a los reales α un parámetro, f un KDE para $w(t)$, P es la medida de polarización del vector de creencias w al instante t y está definida por.

$$P(w(t)) = \int_0^1 \int_0^1 f(x)^{1+\alpha} f(y) |x - y| dx dy$$

α es una constante.

A diferencia de la versión discreta, esta no requiere una noción de grupos.

Para demostrar la continuidad de P respecto al tiempo hay que verificar si P es derivable en el tiempo, para esto hay que encontrar la derivada de P , $\frac{dP}{dt}$

TEOREMA 4 diferenciabilidad de P respecto a t .

La función de polarización

$$P(w(t)) = \int_0^1 \int_0^1 f(x)^{1+\alpha} f(y) |x - y| dx dy$$

Es diferenciable respecto al tiempo si $w'(t)$ existe para todo t .

Demostración 2 (Diferenciabilidad de P):

Primero hay que encontrar la derivada de f con respecto al tiempo t (el KDE):

$$f(x) = K \sum_{i=0}^n e^{-\left(\frac{x-w_i(t)}{a}\right)^2}$$

Para ello se encuentran las derivadas parciales de f respecto a $w_i(t)$

dónde $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial w_i(t)} = 2 * K e^{-\left(\frac{x-w_i(t)}{a}\right)^2} \left(\frac{x - w_i(t)}{a}\right).$$

Ahora se encuentra la derivada parcial de f respecto a x :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = -2 * K \sum_{i=0}^n e^{-\left(\frac{x-w_i(t)}{a}\right)^2} \left(\frac{x - w_i(t)}{a}\right)$$

Dado esto se encuentra la derivada de f respecto a t , usando la regla de la cadena [1]:

$$\frac{df(x)}{dt} = \sum \frac{\partial f}{\partial w_i(t)} * \frac{dw_i(t)}{dt} + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

Debido a que $\frac{dx}{dt} = 0$ pues x es independiente de t , tenemos que:

$$\frac{df(x)}{dt} = 2 * K \sum_{i=0}^n e^{-\left(\frac{x-w_i(t)}{a}\right)^2} \left(\frac{x - w_i(t)}{a}\right) * \frac{dw_i(t)}{dt}$$

Ya con la derivada de f respecto al tiempo t , encontraremos la derivada de P respecto a t .
 Recordemos que la derivada de una suma es la suma de sus derivadas y que

$$\int_a^b h(x)dx = \sum_{i=0}^{\infty} h(x_i)\Delta x$$

Es decir, si x es independiente del tiempo tenemos que

$$\frac{d \int_a^b h(x)dx}{dt} = \int_a^b \frac{dh(x)}{dt} dx$$

Finalmente tenemos que la derivada de P está dada por

$$\frac{dP}{dt} = \int_0^1 \int_0^1 (f(x)^{1+\alpha} f(y))' |x - y| dx dy$$

Entonces encontrar la derivada de P en el tiempo es encontrar la derivada de

$$g(x, y; t) = f(x)^{1+\alpha} f(y)$$

Aplicando la regla de la multiplicación tenemos que

$$\frac{dg(x, y)}{dt} = f(x)^{1+\alpha} \frac{df(y)}{dt} + \frac{df(x)^{1+\alpha}}{dt} f(y)$$

Recordemos

$$\frac{df(x)}{dt} = 2 * K \sum_{i=0}^n e^{-\left(\frac{x-w_i(t)}{a}\right)^2} \left(\frac{x - w_i(t)}{a}\right) * \frac{dw_i(t)}{dt}$$

Análogo para y

$$\frac{df(y)}{dt} = 2 * K \sum_{i=0}^n e^{-\left(\frac{y-w_i(t)}{a}\right)^2} \left(\frac{y - w_i(t)}{a}\right) * \frac{dw_i(t)}{dt}$$

Además, con la regla de la cadena sabemos que

$$\frac{df(x)^{1+\alpha}}{dt} = (1 + \alpha) f(x)^\alpha \frac{df(x)}{dt}$$

Finalmente, con esto tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dg(x, y)}{dt} &= f(x)^{1+\alpha} \frac{df(y)}{dt} + \frac{df(x)^{1+\alpha}}{dt} f(y) \\ \frac{dg(x, y)}{dt} &= f(x)^{1+\alpha} \frac{df(y)}{dt} + (1 + \alpha) * f(x)^\alpha \frac{df(x)}{dt} f(y) \end{aligned}$$

$$\frac{dg(x,y)}{dt} = f(x)^\alpha \left(f(x) \frac{df(y)}{dt} + (1 + \alpha) \frac{df(x)}{dt} f(y) \right)$$

Note que si $w(t)$ es total y derivable, $f(x), f(y), \frac{df(y)}{dt}$ y $\frac{df(x)}{dt}$ existen, por lo tanto $\frac{dg(x,y)}{dt}$ existe, finalmente $\frac{dP(w(t))}{dt}$ existe. Es decir $P(w(t))$ es diferenciable y por lo tanto continua.

QED.

En referencia al teorema anterior es suficiente que la función w sea diferenciable con respecto al tiempo para que la medida de polarización P sea diferenciable con respecto al tiempo.

Modelo de creencias para tiempo continuo

Note que la definición 12, se asume un w en tiempo t continuo mientras en la definición 9 vemos las ecuaciones de recurrencia para w para las creencias en tiempo t discreto, usando ecuaciones diferenciales podemos extender a w para un tiempo continuo. Sea Δt la variación del tiempo, por lo tanto, tenemos los siguientes sistemas de ecuaciones de recurrencia, para esto hay que redefinir a w para tiempo continuo.

Definición 12 (Modelos DeGroot para tiempo continuo) Sea $w \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función vectorial, y sea $\Delta t \in \mathbb{R}$ un salto de tiempo, el modelo continuo de DeGroot está aproximada por la siguiente ecuación de recurrencia.

Sesgo de autoridad:

$$w_i(t + \Delta t) = w_i(t) + \Delta t \frac{1}{n} \sum_j^n I_{i,j} * (w_j(t) - w_i(t))$$

Sesgo de confirmación:

$$w_i(t + \Delta t) = w_i(t) + \Delta t \frac{1}{n} \sum_j^n B_{i,j} I_{i,j} * (w_j(t) - w_i(t))$$

Note que podemos hacer a Δt , tan pequeño como queramos, entonces podemos tomar el límite cuando tiende a 0.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(w_i(t + \Delta t) - w_i(t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_j^n I_{i,j} * (w_j(t) - w_i(t))$$

Para el sesgo de autoridad, el lado derecho al no contener Δt el límite es la evaluación y al lado izquierdo vemos que es la derivada de w_i con respecto al tiempo t , $w_i'(t)$. Por lo que la ecuación de recurrencia se vuelve un sistema de *ecuaciones diferenciales* cuya incógnita es w_i [17].

Para el sesgo de autoridad tenemos la siguiente ecuación:

$$w_i'(t) = \frac{1}{n} \sum_j^n I_{i,j} * (w_j(t) - w_i(t)) [1]$$

Análogamente para el sesgo de confirmación

$$w_i'(t) = \frac{1}{n} \sum_j^n B_{i,j} * I_{i,j} * (w_j(t) - w_i(t)) [2]$$

Creencias en tiempo continuo para el sesgo de autoridad

Específicamente para el sesgo de autoridad es posible encontrar una solución analítica debido a que es un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes de la forma $w'(t) = A * w(t)$ y con $w(0)$ conocido que son las creencias iniciales de las personas. Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones en la Ecuación 1, para el caso del sesgo de autoridad es de la forma:

$$w(t) = e^{A*t} * w(0)$$

Donde e es el número de Euler, I es la matriz de adyacencia del grafo de influencias y A es una matriz cuadrada y diagonalizable [6] de la forma:

$$A_{i,j} = \begin{cases} \frac{I_{i,j}}{n} & \text{if } i \neq j \\ \frac{I_{i,j}}{n} - \sum_{k=0}^n \frac{I_{i,k}}{n} & \text{if } i = k \end{cases}$$

Comparación evolución discreta y evolución continua

Retomando el ejemplo del TLC y el respectivo grafo de influencia podemos ver la diferencia entre la recurrencia y el sistema de ecuaciones diferenciales.

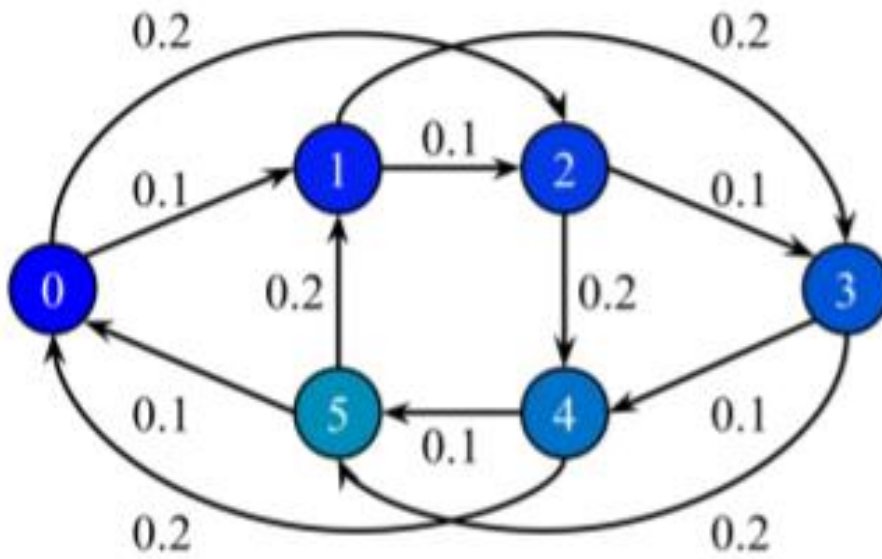


Figura 28. Grafo de influencia

Usando la siguiente matriz adyacencia del grafo de influencia de la figura 28.

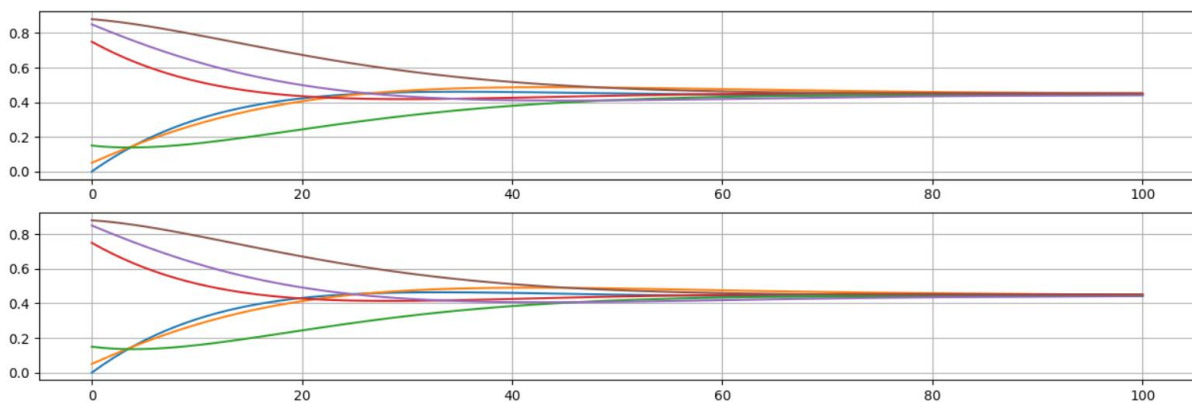


Figura 29. Comparación caso discreto y solución continua. En la gráfica superior tenemos el sistema discreto con $\Delta t = 1$, abajo tenemos la solución de la ecuación diferencial.

Obtenemos estos resultados usando el sistema de ecuaciones diferenciales respecto al sistema de ecuaciones de recurrencia.

Al salir de una función exponencial, se puede asegurar que el sesgo de autoridad es una función diferenciable donde su derivada w' está definida como:

$$w'(t) = A * e^{A*t} * w(0)$$

Podemos ver la raíz del error cuadrático medio del modelo discreto y el modelo continuo en cada punto en el siguiente Gráfico.

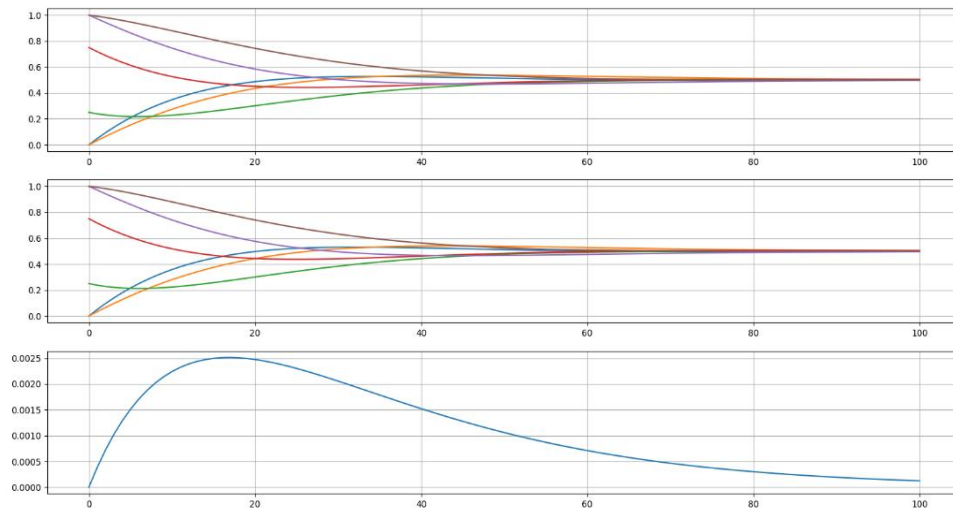


Figura 30. Error en cada instante de tiempo. La figura superior representa la solución de la ecuación diferencial, la figura de la mitad representa el modelo de DeGroot para tiempo discreto y la figura de la parte inferior, el error en cada instante de tiempo, podemos ver que el valor de error máximo es de 0.025.

Creencias en tiempo continuo para el sesgo de confirmación

Para el sesgo de confirmación no se puede asegurar que exista una solución analítica ya que no es un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

Diferenciabilidad de las creencias en tiempo continuo

Para demostrar la diferenciabilidad de w para cualquiera de los sesgos basta con conocer que existe un valor para $w'(t)$ para todo t real en el caso del sesgo de autoridad podemos ver fácilmente que para todo t existe un w' .

Para el sesgo de confirmación con ecuación

$$w'_i(t) = \frac{1}{n} \sum_j^n B_{i,j} * I_{i,j} * (w_j(t) - w_i(t))$$

De la anterior ecuación podemos observar que w' está definida para todo t si w está definida para todo t . De lo cual se concluye que w es diferenciable para todo t .

Validez de la medida de polarización

Ya conocemos que $P(w(t))$ es una función continua, el siguiente paso es demostrar que captura la polarización.

Para esto Esteban y Ray junto a Duclos en el Artículo “POLARIZATION: CONCEPTS, MEASUREMENT, ESTIMATION” cita cuatro axiomas los cuales son necesarios para que una función continua capture la polarización, los axiomas son los siguientes [12].

Axioma 1. Si una distribución se compone de una sola densidad básica, entonces una contracción de esa, la densidad no puede aumentar la polarización [12].

Axioma 2. Si una distribución simétrica se compone de tres densidades básicas con la misma soportes de raíz y mutuamente disjuntos, entonces una compresión simétrica de las densidades laterales no puede reducir la polarización [12].

Axioma 3. Considere una distribución simétrica compuesta por cuatro densidades básicas con el misma raíz y soportes mutuamente disjuntos, como en la Figura 3. Deslice las dos densidades medias hacia el lado como se muestra (manteniendo todos los soportes separados). Entonces la polarización debe aumentar [12].

Axioma 4. Si $P(F) \geq P(G)$ y $p > 0$, entonces $P(pF) \geq P(pG)$, donde pF y pG representan escalas de población (idénticas) de F y G respectivamente [12].

Según el Artículo de Duclos y Esteban y Ray si la función de polarización es proporcional a

$$P(w(t)) \equiv \int \int f(x)^{1+\alpha} * f(y) * |x - y| dx dy$$

Donde f es una función de densidad

Automáticamente la función de polarización cumple el axioma 1 y 4.

Sabemos que P es de la forma

$$P(w(t)) = \int_0^1 \int_0^1 f(x)^{1+\alpha} f(y) |x - y| dx dy$$

$P(w(t))$ cumple los axiomas 1 y 4.

Los axiomas 2:

Según el Artículo de Duclos, Esteban y Ray mencionado anteriormente menciona el siguiente lema con su respectiva prueba:

Lema 10. Dado que $P(f)$ tiene la forma (35), el axioma 2 se satisface si y solo si $\alpha \geq 0,25$ [12].

Forma (35)

$$P(w(t)) = k \int \int f(x)^{1+\alpha} f(y) |y - x| dx dy$$

$P(w(t))$ por definición tiene la forma de:

$$P(w(t)) \equiv \int \int f(x)^{1+\alpha} * f(y) * |x - y| dx dy$$

Por lo tanto, si $\alpha \geq 0.25$ la función de polarización cumple el axioma 2

Axioma 3:

Al igual que el axioma 2 el axioma 3 se satisface gracias al lema anterior

Lema 11. Dado que $P(f)$ tiene la forma (35), se satisface el axioma 3[12].

3.Simulaciones

En esta parte se mostrarán simulaciones de los resultados antes mostrados utilizando métodos numéricos para aproximar las soluciones en un tiempo computacional aceptable. Para ello usaremos las bibliotecas de numpy que nos permitirá manejar matrices y vectores de forma rápida y sencilla, pycuda que nos permitirá acceder a la GPU y acelerar los cálculos, numba, que nos permite crear funciones precompiladas, matplotlib que nos permite crear graficas de los resultados y networkx que nos permite crear y manejar redes de grafos. Todas estas bibliotecas están disponibles de forma abierta para python 3.9.

Simulación 1:

En este caso solo usaremos la función de polarización, tendremos 6 agentes, dos en un extremo y otros dos en otro, dos agentes que empiezan en 0.4 y en 0.6, después de 45 unidades de tiempo terminan uno en cada extremo. Lo que se espera en este ejemplo es que la polarización aumente poco a poco hasta que llegue a un máximo que se logra cuando la influencia de los dos agentes llegue a los extremos, se espera que el incremento sea suave, a diferencia de la medida de Esteban y Ray que presenta un incremento abrupto.

$$w(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ +\frac{0.4}{45} * t + 0.6 \\ -\frac{0.4}{45} t + 0.4 \end{pmatrix}$$

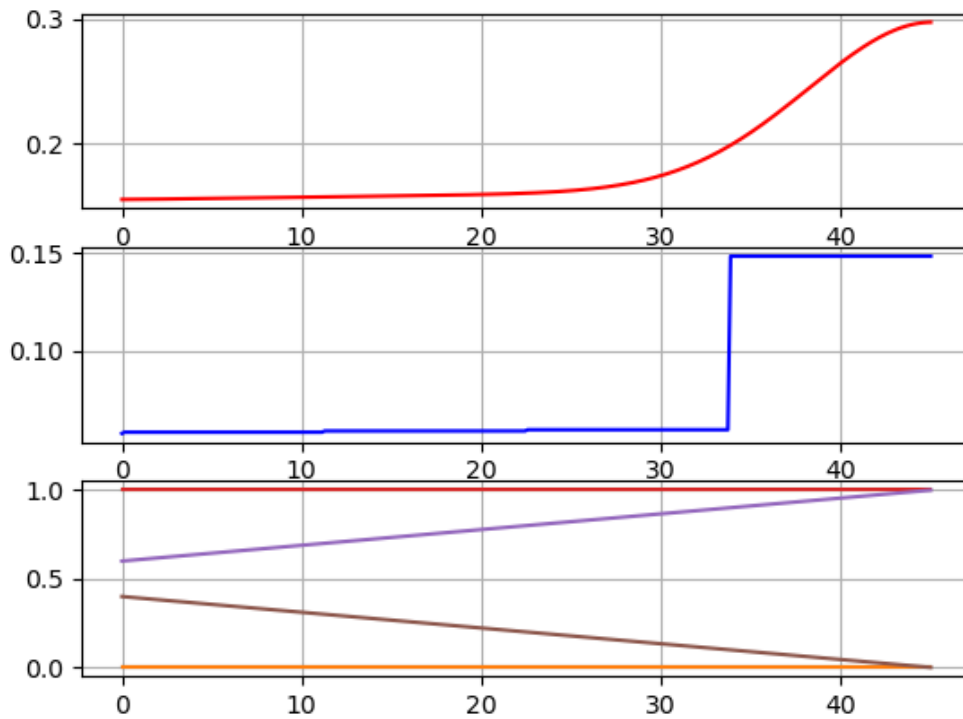


Figura 36. Simulación 1, la primera gráfica muestra la medida de la polarización que incrementa de forma suave hasta llegar al máximo en el instante 45. La segunda gráfica muestra la medida de polarización discreta, que también incrementa y presenta su máximo en el instante de tiempo 45, pero podemos notar un salto discontinuo entre el instante 30 y el instante 40. Por último, en la tercera grafica vemos la evolución de las creencias de los agentes en cada instante de tiempo, donde los dos agentes que empezaron en el cercanos a 0.5 terminan en los extremos.

Podemos ver el ejemplo donde dos creencias se acercan de forma constante a los dos extremos, donde están situados los dos agentes. Además, vemos que la polarización es no decreciente.

Simulación 2:

Aquí vemos un ejemplo que generaba discontinuidad en la medida de Esteban y Ray, tenemos $\frac{1}{4}$ de los agentes con creencia 0, el resto poseen influencia 1, $\frac{1}{4}$ de los que poseen influencia 1 se acerca lentamente mientras el $\frac{1}{4}$ que poseía creencia 0 se acerca lentamente hasta juntarse, vemos dos instantes con potencial discontinuidad cuando el $\frac{1}{4}$ se separa y cuando se juntan los las dos partes que conforman $\frac{1}{4}$ de los agentes. Lo que se espera ver en esta simulación es una representación de la polarización que perdure la continuidad.

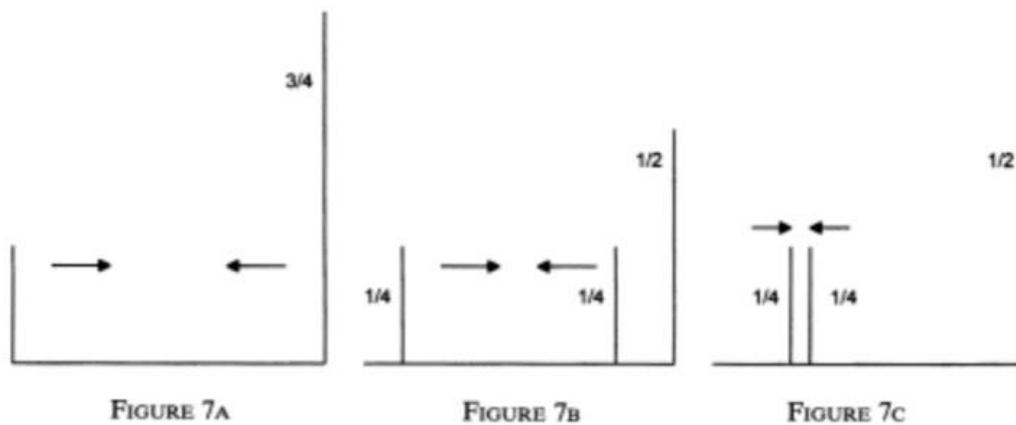


Figura 37. Problema de discontinuidad mencionado anteriormente

$$w(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \\ \frac{t}{90} \\ 1 - \frac{t}{90} \end{pmatrix}$$

Problema de discontinuidad evidenciado en el anteproyecto:

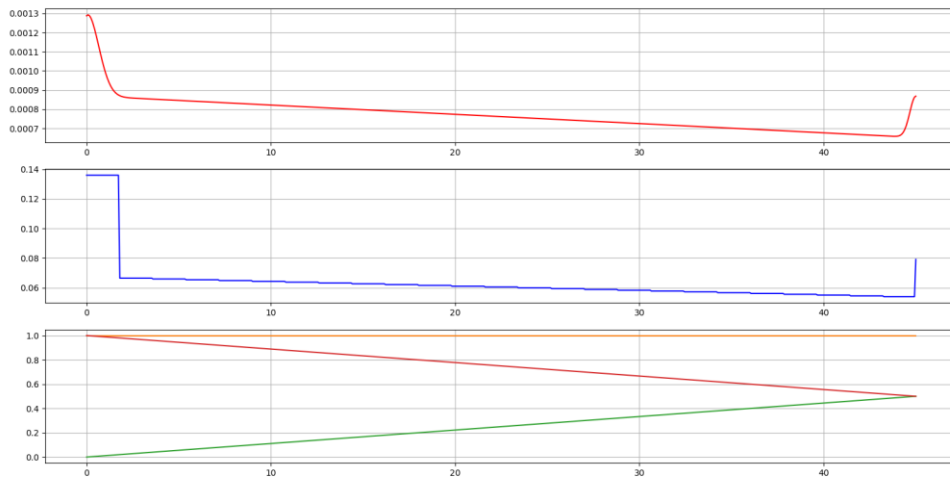


Figura 38. Simulación 2 en la gráfica de arriba tenemos la medida de polarización continua, vemos que cuando ocurre la separación la polarización baja de forma suave y continua, perdura bajando suave hasta que las masas se vuelven a unir que la polarización aumenta de forma suave. En la segunda grafica vemos la medida de Esteban y Ray, la polarización presenta una bajada abrupta cuando se separan empieza a bajar en forma de dientes de sierra y vuelve a subir con un salto abrupto. Por último, vemos la evolución de las creencias que terminan juntándose en el instante 45.

Vemos que la medida roja es totalmente continua y diferenciable a diferencia de la azul que presenta saltos y puntos de sierra.

Simulación 3:

En este caso se realizará una simulación usando los modelos de DeGroot continuos desarrollados en esta tesis. Para el modelo usaremos el sesgo de confirmación y el siguiente grafo de influencias

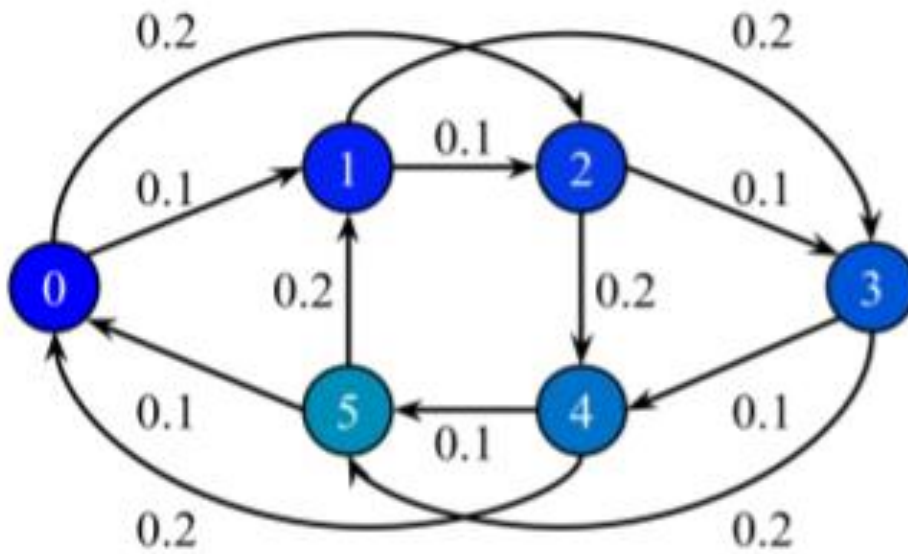


Figura 39. Grafo de influencias mencionado anteriormente

La matriz de influencia I que representa el grafo es la siguiente:

$$I = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.10 & 0.20 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.10 & 0.20 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.10 & 0.20 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.10 & 0.20 \\ 0.20 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.10 \\ 0.10 & 0.20 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

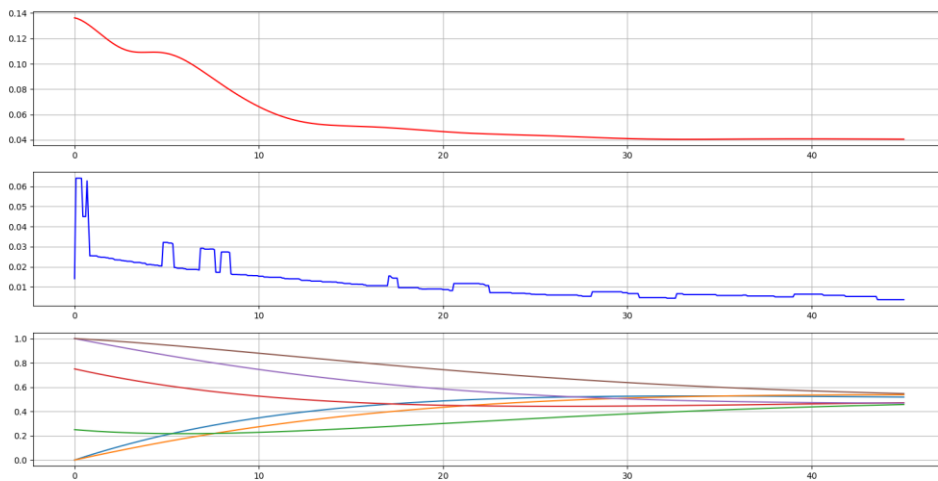


Figura 40. Simulación 3, en la gráfica de abajo podemos ver la tendencia de las creencias que buscan unificarse en un punto en un consenso, por lo que se espera que la polarización tienda a un mínimo. En las dos graficas de arriba vemos las tendencias decrecientes claras, pero en el caso discreto vemos discontinuidades que no corresponden a incrementos ni decrementos en la versión continua, esto podría deberse a la cantidad de grupos elegidos y no necesariamente a que exista ese cambio en la polarización.

Simulación 4:

Ejemplo anterior pero la versión discreta con 500 grupos, la evolución de creencias será la misma que en la simulación anterior. Este caso la polarización de Esteban y Ray tomará una gran cantidad de grupos para ver su comportamiento. En este caso se tomaron 500 grupos. Se espera que la medida siga teniendo discontinuidades incluso con una gran cantidad de grupos.

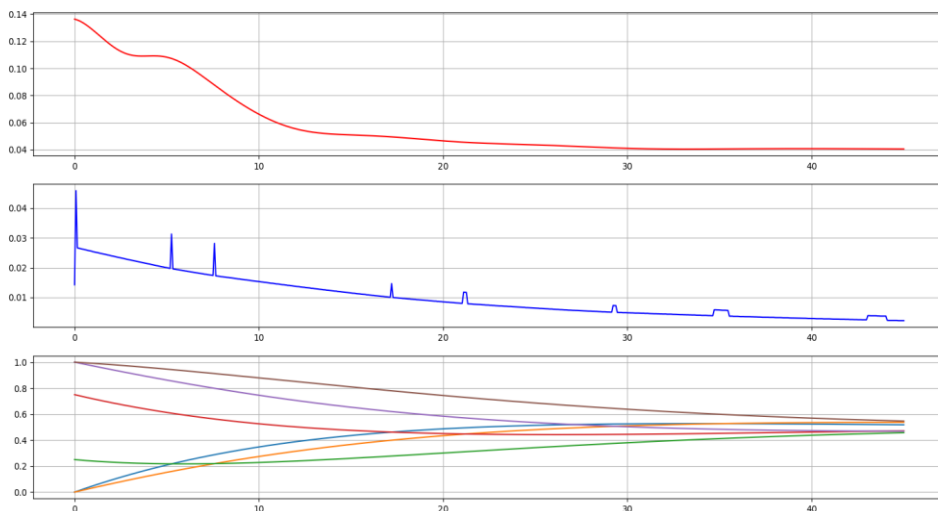


Figura 41. Simulación 4. La gráfica de arriba se ve la medida de polarización continua que es exactamente igual que en la simulación anterior, la gráfica azul se ve como aún poseen picos debidos a la discontinuidad. Por ultimo la tercera gráfica se ve la evolución de las creencias que es exactamente igual que en la simulación anterior.

Vemos que, aunque aumenta sustancialmente la cantidad de grupos la medida aún posee discontinuidades evidentes.

Para encontrar el volumen bajo la superficie (la integral doble) se usa el método de Simpson separando el espacio en 49152000 trozos de volumen que serán útiles para calcular la doble integral, para esto se usa la aceleración de hardware por GPU. Esto para un intervalo de 0 a 45 dividido en 300 toma alrededor de 120 segundos. Otras técnicas estudiadas para lograr hacer las simulaciones fueron encontrar una fórmula alternativa para medir la polarización, para ello había que cambiar el KDE para que no usara la campana de gauss, por ejemplo, una la distribución de Lorenz, esta presenta forma acampanada, pero no presenta ni media ni varianza, aparentaba no cumplir algún axioma de la polarización. Por lo que fue rápidamente descartada. También una posibilidad que se estudió fue no realizar el método de Simpson sino el método de Montecarlo para estimar un área de forma aleatoria.

4. Conclusiones y resultados

A lo largo de este proyecto se han usado múltiples herramientas de cálculo y las ciencias de la computación para lograr obtener un método para medir la polarización de un grupo de individuos, donde esta presenta suavidad, continuidad y además cumple con los axiomas necesarios para poder capturar la polarización. Para ello usamos los kernel de densidad, las integrales múltiples y además se logró extender el modelo de multiagentes de DeGroot a un caso continuo para poder asegurar la continuidad de la función de polarización, dando soluciones analíticas para algunos casos específicos y gráficos respecto al tiempo.

Las contribuciones presentadas en esta tesis son de carácter teóricas y computacionales, en particular se puede observar cómo usando herramientas del Cálculo, Estadística y Algebra nos permite tener un sistema que sea capaz de desarrollar un modelo de polarización en el tiempo que esté definido para cualquier instante de tiempo, que cumpla los axiomas necesarios para capturar la polarización y que además sea continua y suave, lo que permite reducir errores dados por discretizar la polarización, incluso en algunos casos es posible tener una fórmula para obtener la polarización en cualquier instante de tiempo. Por lo tanto, se concluye que se pueden aplicar las áreas ya mencionadas para lograr resolver el problema de la polarización en particular.

Además, se puede también concluir que gracias a los avances obtenidos en esta tesis podemos darle mejores estimaciones a la polarización debido a que redujimos errores que no correspondían a la discretización de la polarización, lo que se tiene métricas para la polarización que no tiene problemas de la discretización.

Finalmente, para la aplicación de estas técnicas se usan métodos numéricos para estimar la polarización usando métodos para aproximar ecuaciones diferenciales y métodos para aproximar integrales, para esto se usa la aceleración por hardware y en este caso particular pycuda y numba,

para usar los algoritmos de ecuaciones diferenciales usamos el método de Euler para ecuaciones diferenciales y el método de Simpson para poder tener buenas estimaciones de integrales y de ecuaciones diferenciales. Gracias a eso podemos estimar el valor a un punto específico y poder graficar para ver las tendencias de la polarización.

6. Referencias

- [1] Cálculo de una Variable Tom Apóstol (1997)
<https://calculounicaes.files.wordpress.com/2012/04/calculo-volumen-1-de-tom-apostol.pdf>
- [2] Calculo diferencial e integral Piskunov N (1977)
https://ele.chaco.gob.ar/pluginfile.php/742405/mod_resource/content/1/CÁLCULO%20DIFERENCIAL%20E%20INTEGRAL%20TOMO%20I-%20PISKUNOV%20CN.pdf
- [3] Integration in Finite Terms Maxwell Rosenlicht (1972)
<https://www.jstor.org/stable/2318066?origin=crossref>
- [4] Calculo 2. Edición Roland Larsson (1999).
https://www.academia.edu/31620687/Cálculo_Vol_2_6ta_Edición_Roland_E_Larson_Robert_R_Hostetler_Bruce_H_Edwards
- [5] Nonparametric and Semiparametric Models Wolfgang Härdle, Axel Werwatz, Marlene Müller, Stefan Sperlich (2004)
<https://www.infona.pl/resource/bwmeta1.element.springer-a5daa851-2da7-39be-b0daf76b36beba7d>
- [6] Manual de álgebra lineal 2da edición Sebastián Castañeda Hernández y Agustin Barrios Sarmiento (2020)
<https://editorial.uninorte.edu.co/gpd-manual-de-algebra-lineal-2da-edicion.html>
- [7] Esteban and Debraj Ray. (1994). On the Measurement of Polarization
<https://www.jstor.org/stable/2951734?origin=JSTOR-pdf>
- [8] Esteban and Ray's. (2012). Comparing Polarization Measures.
<https://www.oxfordhandbooks.com/view/10.1093/oxfordhb/9780195392777.001.0001/oxfordhb-9780195392777>
- [9] Mario S. Alvim, Bernardo Amorim, Sophia Knight, Santiago Quintero, and Frank Valencia Bias. (2021). Polarization and Belief Convergence of Multiagent Systems under Confirmation.
<https://arxiv.org/abs/2104.11538>
- [10] Benjamin Golub and Evan Sandler. (2017). Learning Social networks.
https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2919146
- [11] Zachary P. Neal. (2020). A sign of the times? Weak and strong polarization in the U.S. Congress, 1973–2016.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0378873317303039>
- [12] Jean-Yves Duclos, Joan Esteban, Debraj Ray (2003). Polarization: Concepts, Measurement, Estimation.

- <https://pages.nyu.edu/debraj/Papers/4369DuclosEstebanRay.pdf>
- [13] Edward N. Lorenz The Essence of Chaos (1996).
<https://uwapress.uw.edu/book/9780295975146/the-essence-of-chaos/>
- [14] James Gleick Chaos: Making a New Science (1988).
<http://vattay.web.elte.hu/lectures/ChaosTheory/James%20Gleick%20-%20Chaos.%20Making%20a%20new%20science.pdf>
- [15] The general problem of stability of motion Lyapunov, Aleksandr (1992).
<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00207179208934253?journalCode=tcon20>
- [16] Irwin, Michael C. Smooth Dynamical Systems (2001)
<https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/4681#t=aboutBook>
- [17] Differential Equations and Dynamic Systems Perko, Lawrence (2001)
[https://www.google.com/books/edition/Differential Equations and Dynamical Sys/DabBwAAQBAJ?hl=en&gbpv=0](https://www.google.com/books/edition/Differential%20Equations%20and%20Dynamical%20Systems/DabBwAAQBAJ?hl=en&gbpv=0)
- [18] Discrete Mathematics and Its Applications Kenneth H. Rosen (1999)
<https://www.houstonisd.org/cms/lib2/TX01001591/Centricity/Domain/26781/DiscreteMathematics.pdf>