



Acta de Correcciones al Proyecto de Grado
Matemáticas Aplicadas

Fecha: 1 de marzo de 2023

Autores: RAFAEL SANTIAGO BEDOYA PAREDES

Nombre del Proyecto de Grado: OSCILACIONES PERIÓDICAS SIMÉTRICAS EN MEMS TIPO PEINE

Director: DANIEL ELÍAS NÚÑEZ

Como indica el artículo 2.27 de las Directrices de Trabajo de Grado, he verificado que los estudiantes indicados arriba han implementado todas las correcciones que los Jurados del Proyecto de Grado definieron que se efectuaran, como consta en el Acta de Calificación correspondiente.

Firma Director del Proyecto de Grado

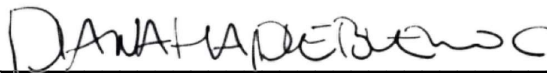
Nota de Aceptación

Aprobado por el Comité de Trabajo de Grado en cumplimiento de los requisitos exigidos por la Pontificia Universidad Javeriana para optar el título de Profesional en Matemáticas Aplicadas.



Hernán Camilo Rocha Niño

Decano de la Facultad de Ingeniería y Ciencias



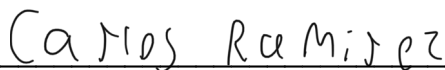
Diana Haidive Bueno Carreño

Directora Carrera de Matemáticas Aplicadas



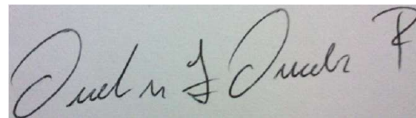
Daniel Núñez

Director(a) Trabajo



Carlos Ramírez Ovalle

Jurado 1



Andrés Felipe Amador

Jurado 2

Santiago de Cali, febrero 2 de 2023.

Señores

Matemáticas Aplicadas

Pontificia Universidad Javeriana Cali

Respetados Señores:

Con la presente deseo manifestar que **DIRIGÍ** el proyecto de grado titulado “Oscilaciones Periódicas Simétricas en MEMS tipo Peine” presentado por **RAFAEL SANTIAGO BEDOYA PAREDES**.

Cordialmente,



Daniel Nuñez

Proyecto Aplicado
Oscilaciones Periódicas Simétricas en MEMS
tipo peine

Rafael Santiago Bedoya

2022

Resumen

Este proyecto realiza una breve descripción de los dispositivos Micro-electro mecánicos tipo peine y estudia el movimiento de un dispositivo de tipo lineal. Para ello utiliza elementos sencillos tales como lo es la teoría de comparación de Sturm y las proposiciones de Rafael Ortega diseñadas para el estudio de cuerpos celestes.

De esta manera este documento presenta un análisis realizado con elementos teóricos sencillos de problemas que generalmente son analizados con herramientas de alta complejidad y presenta de forma aplicada y clara, un procedimiento para abarcar el estudio del movimiento de este tipo de dispositivos mostrando un claro enfoque aplicado sin descuidar en ningún momento los fundamentos teóricos que hacen posible tal estudio.

Abstract

This project shows a brief description of the movement equation of lineal Michro-electro mechanical combdrive finger devices. In order to do that, it uses simple elements such as: Sturm comparison theory and the propositions made by Rafael Ortega for the studies of celestial bodies.

On this way, this document present's an analysis with simple theoretical elements for problems that are generally analized using more complex tools. It presents in a clear and applied style a procedure to study these type of devices with an appied focus without renlinquishing the theoritical elements that makes possible such studies.

Índice general

0.1 Planteamiento del problema	6
1 Fundamentos Teóricos	11
1.1 Teorema de Sturm	11
1.1.1 Conclusiones directas del teorema de Sturm	13
1.1.2 Conteo de ceros para dispositivos tipo peine	15
2 Principio de Ortega	23
2.1 Propositiones de R. Ortega	23
2.2 Un ejemplo. El columpio	29
3 Oscilaciones periódicas impares en MEMS tipo peine	37
3.1 Análisis de equilibrio en un dispositivo tipo peine con voltaje constante	37
3.2 Método de truncamiento	40
4 Simulaciones y resultados numéricos	51
4.1 Dispositivo 1	53
4.2 Dispositivo 2	54
4.3 Dispositivo 3	54
4.4 Revisión de resultados	55

Introducción

Desde la introducción del termino MEMS (Micro Electromechanical Systems), la evolución y aplicación de estos sistemas en diversos campos ha evolucionado a entornos difíciles de concebir inicialmente.

El potencial de maquinas muy pequeñas como los MEMS fue divisado incluso desde antes que existiera una tecnología capaz de fabricarlos eficientemente como se puede ver en la conferencia sobre miniaturización del físico teórico Feynman en 1959 [4]. Sin embargo estos dispositivos tendrían que esperar décadas hasta que pudieran fabricarse utilizando variaciones de la tecnología de fabricación de circuitos integrados en la decada de 1970.

Así mismo debido a la aplicabilidad de estos dispositivos y la complejidad de sus expresiones matemáticas han sido también de interés para las matemáticas aplicadas desde hace aproximadamente 20 años como se puede observar en los trabajos de [3] y [14]. Específicamente el movimiento oscilatorio de estos dispositivos puede ser estudiado por medio de sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Así se han estudiado las soluciones periódicas de estos sistemas y su simetría en artículos tales como el análisis de estabilidad realizado por [11] en 2019 al igual que diversos trabajos recientes como los encontrados en [6], [5] y [7].

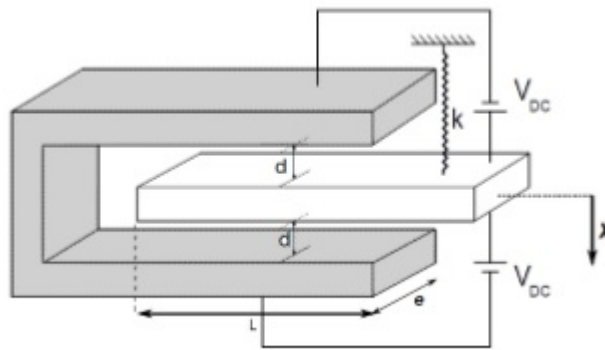
Este estudio analizará las soluciones periódicas impares utilizando el método de Ortega [13] el cual ofrece un enfoque diferente a los estudios mencionados anteriormente y permite su estudio utilizando elementos teóricos más sencillos. Este método no fue diseñado para ser aplicado en los modelos de los MEMS tipo peine, y nace más bien en un contexto de problemas de Mecánica Celeste. Así de manera natural cabe preguntarse si este principio puede adaptarse a ecuaciones diferenciales con singularidades como lo es la ecuación de un MEMS tipo peine y cuáles serían las condiciones que permitirían una tal extensión al ámbito de los dispositivos tipo peine y sus implicaciones para principios de diseño.

0.1. Planteamiento del problema

Han pasado ya varias décadas desde el descubrimiento y desarrollo de sistemas micro electro mecánicos. Esta tecnología ha llegado a un nivel de madurez suficiente para ser utilizada en aplicaciones que van desde sensores de presión en vehículos, micrófonos en los celulares, sensores de inercia en los vídeo juegos, entre otros [15].

Sin embargo, a raíz de la evolución de estos dispositivos, científicos de diversas disciplinas buscan colaborar e innovar en soluciones únicas y más eficientes para lograr un uso más eficiente y estable de estos dispositivos en sus diversas aplicaciones.

Para ello esta investigación se centrará en el movimiento lateral de los dispositivos micro electro mecánicos de tipo peine.



En la ilustración anterior se pueden observar las distintas componentes que conforman este tipo de dispositivos, en el cual nos vamos a centrar en el movimiento del electrodo central entre las dos placas. El movimiento descrito en esta gráfica es conocido como movimiento lateral y es gobernado por la siguiente ecuación de movimiento:

$$mx'' + kx = \frac{\epsilon LV_{AC}^2}{2m} \left(\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2} \right),$$

d : Distancia entre el diente y las placas en reposo.

m : Masa del electrodo central o diente.

ϵ : Constante dieléctrica en el vacío.

L : Longitud de la porción del diente que interactúa con las placas.

V_{AC} : Entrada de voltaje

Por medio de un proceso de adimensionalización [15], [11] eligiendo unidades adecuadas de tiempo y longitud, es posible obtener la siguiente EDO equivalente:

$$x'' + x \left(1 - \frac{4\beta v^2(t)}{(1-x^2)^2} \right) = 0 \quad (-1 < x < 1), \quad (1)$$

donde hemos introducido un voltaje periódico de entrada de la forma (corriente AC-DC) :

$$v(t) = v_0 + \delta p(t)$$

con p definido por:

$$p(t) = \cos(\omega t)$$

Sin embargo, los métodos para encontrar soluciones periódicas para sistemas no lineales no son procesos triviales. Así mismo, la ecuación anterior presenta simetrías o reversibilidades en sus variables, simetrías de tipo impar en x y par en t . Estas simetrías permiten reducir el estudio de soluciones T periódicas impares a un problema de contorno tipo Dirichlet $x(0) = x(T/2) = 0$. ¿Es posible encontrar soluciones periódicas impares para la ecuación del MEMS aludido con un número prescrito de ceros en medio periodo?. ¿Cómo caracterizar sus propiedades de estabilidad en caso de que existan?

En este proyecto queremos avanzar en la primera interrogante. Puesto que los métodos de existencia de soluciones periódicas son de variada complejidad, técnicas como Funciones Globales Implícitas en espacios de Banach [8], teoría de grado topológico [6], sub y super soluciones [11], métodos variacionales [12]. Queremos explorar una respuesta que use técnicas sencillas y que al mismo tiempo permita el conteo de ceros.

Esto nos lleva naturalmente a las observaciones de Ortega en [13], por otra parte, este principio sólo es válido para ciertas no linealidades. Por ejemplo el dispositivo tipo peine descrito en [15] para un voltaje par, no satisface las hipótesis de Ortega en virtud de las singularidades que aparecen y nos preguntamos lo siguiente: ¿son validas las conclusiones del principio en cuestión para este MEMS tipo peine con voltaje con simetría par/impar? ¿hasta que punto son válidas las conclusiones del principio de Ortega en este modelo?, ¿es posible validar esto numéricamente?. Con estos interrogantes se plantea el siguiente trabajo de investigación y empieza la revisión del material adecuado para dar solución a cada una de ellas.

De esta manera el siguiente documento tratará primero los fundamentos teóricos empezando por una revisión del teorema de Sturm que se utilizará para posteriormente hacer una revisión detallada del método propuesto por

Rafael Ortega [13], posteriormente veremos una aplicación sencilla de los principios estudiados en una instancia simple y finalizaremos revisando las condiciones necesarias para la aplicación del método de Ortega en dispositivos micro-electromecánicos así como también su aplicación en algunas instancias.

Objetivos

Objetivos Generales

- Demostrar y aplicar el principio de Ortega para osciladores con simetría periódicamente forzados a algunos osciladores mecánicos clásicos.
- Validar numéricamente el principio de Ortega para osciladores micro electromecánicos de tipo peine.

Objetivos Específicos

- Estudiar la teoría de comparación de Sturm para osciladores lineales.
- Caracterizar el comportamiento de los ceros de una sucesión de funciones uniformemente convergente sobre un intervalo compacto en la topología C^1 .
- Determinar las propiedades de la función número de ceros de un oscilador no lineal que cumple las hipótesis de Ortega, específicamente determinar la magnitud de los saltos y su carácter de monotonía.
- Reducir un problema de contorno periódico bajo simetrías a un problema de Dirichlet.
- Desarrollar simulaciones para el problema de Dirichlet asociado al oscilador tipo peine con el método de diferencias finitas.
- Utilizar el método numérico del disparo para resolver el problema de Dirichlet asociado al oscilador tipo peine.

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos

Definición de abreviatura

Sean q_1, q_2 funciones continuas. Se dice que $q_1 \ll q_2$ si y solo si $q_1 \leq q_2$ y q_1 no es idéntica a q_2 .

1.1. Teorema de Sturm

Sean u, v soluciones reales no triviales de:

$$u'' + q(t)u = 0 \tag{1.1}$$

$$v'' + q_1(t)v = 0 \tag{1.2}$$

Donde $q(t), q_1(t)$ son continuas para todo t . Si $t_1 < t_2$ son ceros consecutivos de u entonces v se anula al menos una vez en (t_1, t_2) a menos que en ese intervalo $q(t) \equiv q_1(t)$ y $v(t) \equiv ku(t)$, para $k \in \mathbb{R}$

Demostración:

Inicialmente multipliquemos la ecuación [1.1](#) y la ecuación [1.2](#) respectivamente dando como resultado las siguientes dos ecuaciones:

$$u''v + q(t)uv = 0, \tag{1.3}$$

$$uv'' + q_1(t)uv = 0, \tag{1.4}$$

Posteriormente se calcula la diferencia de las ecuaciones [\(1.3\)](#), [\(1.4\)](#)

$$u''v + q(t)uv - uv'' - q_1(t)uv = 0,$$

Reorganizando:

$$(u''v - uv'') + (q(t) - q_1(t))uv = 0,$$

Integrando:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} u''v - uv'' + (q(t) - q_1(t))uv dt, \\ & \int_{t_1}^{t_2} u''v - uv'' dt = \int_{t_1}^{t_2} (q_1(t) - q(t))uv dt, \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ahora, sin pérdida de generalidad se puede suponer que:

$$u(t) > 0, \forall t \in (t_1, t_2)$$

Dado que t_1, t_2 son ceros consecutivos y $u(t)$ continua.

tomando la ecuación (1.5) se procede a realizar la integración de la expresión:

$$\int_{t_1}^{t_2} u''v - uv'' dt = 0$$

Integrando por partes se obtiene la expresión:

$$u'v|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} u'v' dt - uv'|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} u'v' dt$$

Simplificando:

$$u'v|_{t_1}^{t_2} - uv'|_{t_1}^{t_2}$$

Dado que t_1, t_2 son ceros de u entonces $uv'|_{t_1}^{t_2} = 0$ entonces se forma la ecuación:

$$u'v|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (q_1(t) - q(t))u(t)v(t) dt \quad (1.6)$$

Dado que $u(t) > 0$ en el intervalo y t_1, t_2 son ceros consecutivos entonces, $u'(t_1) \geq 0$ y $u'(t_2) \leq 0$

Ahora por contradicción supongamos que $v(t)$ no se anula, para fijar ideas supongamos que $v(t) > 0, \forall t \in (t_1, t_2)$, reescribiendo la ecuación (1.6)

$$u'(t_2)v(t_2) - u'(t_1)v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (q_1(t) - q(t))uv dt$$

Analizando la expresión: $u'(t_2) < 0$, por unicidad de condiciones iniciales puesto $u = 0$ es solución. $v(t_2) \geq 0$ por tanto:

$$u'(t_2)v(t_2) \leq 0$$

Igualmente: $u'(t_1) > 0$, $v(t_1) \geq 0$ por tanto:

$$-u'(t_1)v(t_1) \leq 0$$

Por tanto:

$$u'(t_2)v(t_2) - u'(t_1)v(t_1) \leq 0$$

Dado que:

$$\int_{t_1}^{t_2} (q_1(t) - q(t))uv dt > 0$$

Dado que $q_1 \gg q$

es imposible entonces que $v(t) > 0 \forall t \in (t_1, t_2)$ lo cual implica que $\exists t_3 \in (t_1, t_2)$ tal que $v(t_3) = 0$

1.1.1. Conclusiones directas del teorema de Sturm

Consideraremos $c, k > 0$ tal que $c^2 \ll q(t) \ll k^2$ en $[a, b]$ y sea u solución no trivial de:

$$u'' + q(t)u = 0$$

Estimación de la distancia entre ceros consecutivos:

Si t_1, t_2 son ceros consecutivos de u en $[a, b]$ entonces:

$$\frac{\pi}{k} \leq t_2 - t_1 \leq \frac{\pi}{c}$$

Demostración:

Consideremos la ecuación

$$z'' + k^2 z = 0,$$

y una solución particular con un cero en t_2 :

$$z = \text{sen}(k(t - t_2))$$

Dado que $k^2 \gg q(t)$ por teorema de comparación de Sturm se sigue que en el intervalo $\exists \tau \in (t_1, t_2)$ tal que τ es cero de z ubicado en el punto:

$$\tau = t_2 - \frac{\pi}{k}$$

Por lo tanto:

$$t_1 < t_2 - \frac{\pi}{k} < t_2$$

Reacomodando la expresión:

$$\frac{\pi}{k} < t_2 - t_1 \tag{1.7}$$

Consideremos ahora

$$y'' + c^2 y = 0,$$

y la solución que se anula en t_2

$$y = \text{sen}(c(t - t_2))$$

Dado que $q(t) \gg c^2$ entonces por teorema de Sturm sabemos que en el intervalo $(t_2 - \frac{\pi}{c}, t_2)$ existe un cero t_1 cero de u tal que:

$$t_2 - \frac{\pi}{c} < t_1 < t_2$$

Reorganizándolo:

$$t_2 - t_1 < \frac{\pi}{c} \tag{1.8}$$

Por tanto utilizando las expresiones (1.7) y (1.8):

$$\frac{\pi}{k} < t_2 - t_1 < \frac{\pi}{c} \tag{1.9}$$

Estimación del número de ceros

Sea u solución no trivial tal que $u(t_1) = u(t_2) = 0$ tal que u tiene n ceros consecutivos en (t_1, t_2) . Entonces

$$\frac{c(t_2 - t_1)}{\pi} < n + 1 < \frac{k(t_2 - t_1)}{\pi},$$

Demostración: Por el resultado de la expresión (1.9) sabemos que la distancia d entre dos ceros consecutivos está acotada por la expresión:

$$\frac{\pi}{k} < d < \frac{\pi}{c},$$

Como $u(t_1) = u(t_2) = 0$ y u posee n ceros en (t_1, t_2) entonces sumando los intervalos de ceros consecutivos (que son $n + 1$ en total) se obtiene:

$$(n + 1)\frac{\pi}{k} \leq t_2 - t_1 \leq (n + 1)\frac{\pi}{c},$$

Reordenando la expresión:

$$\frac{c(t_2 - t_1)}{\pi} \leq n + 1 \leq \frac{k(t_2 - t_1)}{\pi},$$

1.1.2. Conteo de ceros para dispositivos tipo peine

Consideremos la ecuación adimensional de un dispositivo tipo peine

$$x'' + x\left(1 - \frac{4\beta V^2(t)}{(1 - x^2)^2}\right) = 0, \quad (1.10)$$

donde $|x| < 1$, y $V(t)$ es un voltaje T -periódico continuo.

El propósito de esta sección será estimar las oscilaciones o vaivenes del dispositivo MEMS tipo peine que estamos modelando. Esto se medirá con una estimación del número de ceros promedios de las soluciones no triviales en el intervalo $(0, T/2)$. Comenzaremos con la linealización en $x = 0$ o ecuación variacional en $x = 0$ que es la que nos dará una cota superior de la medida de la oscilación.

Linealizando (1.10) en $x = 0$ obtenemos la ecuación variacional:

$$x'' + (1 - 4\beta V(t)^2)x = 0 \quad (1.11)$$

Sea $\phi(t)$ la solución de la ecuación linealizada (1.11) con condiciones iniciales $\phi(0) = 0, \phi'(0) = 1$. Vamos a estimar el número de ceros de esta solución canónica en $(0, T/2)$, $T = 2\pi/\omega$. Llamaremos a este número ν_0 . El número ν_0 está asociado al período que se tome para el voltaje; así podríamos tomar períodos de la forma kT con k entero positivo. En este caso denotaremos el número de ceros interiores al intervalo $(0, kT/2)$ por $\nu_0(k)$.

De esta manera debemos encontrar el máximo y mínimo de la expresión $q(t) = 1 - 4\beta V(t)^2$ para aplicar el corolario del teorema de comparación de Sturm. Recordar que la entrada de voltaje es la función $V(t)$ definida anteriormente en la Introducción como

$$V(t) = V_0 + \delta p(t),$$

con $p(t) = \cos(\omega t)$ de esta manera $p_{max} = 1$, $p_{min} = -1$. Por lo tanto los valores extremos del voltaje son:

$$V_{max} = V_0 + \delta, \quad V_{min} = V_0 - \delta$$

Asumiremos también que $V_0 > \delta > 0$, así trabajaremos con voltaje positivo. Debemos acotar adecuadamente el oscilador:

$$c^2 \leq q(t) \leq k^2$$

Se puede observar que cuando $V(t)$ es máximo el oscilador alcanza su mínimo, de la misma manera cuando $V(t)$ es mínimo alcanza su máximo. Por tanto

$$1 - 4\beta V_{max}^2 \ll q(t) \ll 1 - 4\beta V_{min}^2$$

Por tanto tenemos las siguientes cotas sobre el coeficiente $q(t)$:

$$k^2 := 1 - 4\beta(V_0 - \delta)^2 \tag{1.12}$$

$$c^2 := 1 - 4\beta(V_0 + \delta)^2 \tag{1.13}$$

Supondremos también $1 - 4\beta V_{max}^2 > 0$. Aplicando el corolario del Teorema de comparación de Sturm sabemos que dados t_1, t_2 ceros consecutivos de la solución $\phi(t)$ no trivial de (1.11) entonces

$$\frac{\pi}{k} < t_2 - t_1 < \frac{\pi}{c}$$

Ahora por condiciones iniciales de la ecuación (1.11) sabemos que:

$$x(0) = 0$$

$$x'(0) = 1$$

Tomaremos $t_1 = 0$ como cero inicial de referencia. Dado que $t_1 = 0$, ahora deseamos conocer una estimación del número de ceros en el intervalo $(0, \frac{\pi}{\omega})$. Necesariamente $\omega \geq c$, de lo contrario el oscilador más pequeño tendría un cero no trivial antes de π/c . Sin embargo suponiendo $\frac{\pi}{\omega} > \frac{\pi}{c}$, y comparando las ecuaciones diferenciales:

$$x''(t) + q(t)x = 0$$

$$x''(t) + c^2x = 0 \tag{1.14}$$

Dado que la expresión $x''(t) + c^2x = 0$ representa un oscilador mas lento entonces fijando $t_1 = 0$ sabemos que el segundo cero de la solución de la expresión (1.14) que inicia en $t_1 = 0$, i.e., $x(t) = \sin(ct)$, está exactamente en $\frac{\pi}{c}$. Por otra parte, en el intervalo $(0, \frac{\pi}{c})$ existe al menos un cero de toda solución no trivial de (1.11). Nótese que existe un entero m tal que:

$$\frac{m\pi}{c} \leq \frac{\pi}{\omega} < \frac{(m+1)\pi}{c}$$

o

$$\frac{m}{c} \leq \frac{1}{\omega} < \frac{m+1}{c}$$

$$m \leq \frac{c}{\omega} < m+1$$

Por lo tanto

$$m := \left\lfloor \frac{c}{\omega} \right\rfloor \quad (1.15)$$

Nótese que entre dos ceros del oscilador (1.14) existe al menos un cero del oscilador (1.11), entonces se puede afirmar que el oscilador (1.11) tiene al menos m ceros interiores en el intervalo $(0, \frac{\pi}{\omega})$

Por tanto sabemos que el número n de ceros interiores a $[0, \pi/w]$ de las soluciones no triviales de la ecuación (1.11) está acotado inferiormente por m : $m \leq n$.

Ahora analicemos la expresión

$$x''(t) + k^2x = 0 \quad (1.16)$$

Como (1.16) representa un oscilador más rápido que (1.11), entonces entre dos ceros consecutivos de toda solución no trivial de (1.11) existe al menos un cero de toda solución no trivial de (1.16). Sabemos también que el primer cero positivo de la solución $\sin(kt)$ de (1.16) está exactamente en $\frac{\pi}{k}$. Análogamente al caso anterior sabemos que existe un entero m' tal que:

$$\frac{m'\pi}{k} \leq \frac{\pi}{\omega} < \frac{(m'+1)\pi}{k}$$

$$\frac{m'}{k} \leq \frac{1}{\omega} < \frac{m'+1}{k}$$

$$m' \leq \frac{k}{\omega} < m'+1$$

Por tanto

$$m' = \left\lfloor \frac{k}{\omega} \right\rfloor$$

Utilizando m, m' entonces se puede delimitar el número de ceros de ϕ de la siguiente manera:

$$m \leq \nu_0 \leq m'$$

$$\left\lfloor \frac{c}{\omega} \right\rfloor \leq \nu_0 \leq \left\lfloor \frac{k}{\omega} \right\rfloor$$

Sustituyendo c, k se obtiene la relación

$$\left\lfloor \frac{\sqrt{1 - 4\beta(V_0 + \delta)^2}}{\omega} \right\rfloor \leq \nu_0 \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{1 - 4\beta(V_0 - \delta)^2}}{\omega} \right\rfloor \quad (1.17)$$

Se obtiene así una estimación del número de ceros interiores. Hemos obtenido el siguiente resultado

Teorema 1.1.1. *Dada una ecuación de la forma $x'' + F(t)x = 0$, con $F(t)$ continua $2\pi/\omega$ -periódica, entonces el número de ceros internos ν_0 de una solución periódica en el intervalo $\frac{\pi}{\omega}$ esta limitado por:*

$$\left\lfloor \frac{\sqrt{F_{max}}}{\omega} \right\rfloor \leq \nu_0 \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{F_{min}}}{\omega} \right\rfloor$$

Finalmente vamos a estimar la oscilación de la solución de la ecuación no lineal (1.10). El número de ceros de toda solución no trivial de esta ecuación en $(0, T/2)$ estará acotado por el número de ceros de ϕ en $(0, T/2)$ al cual ya se ha estimado en (1.17). Toda solución $u = x(t)$ del problema no lineal (1.10) puede verse como solución de una ecuación lineal de la forma

$$\ddot{u} + a(t)u = 0$$

con

$$a(t) = 1 - \frac{4\beta V^2(t)}{(1 - x(t)^2)^2}$$

Además como $a(t) \ll 1 - 4\beta V^2(t) =: a_0(t)$ entonces del Teorema de Sturm aplicado a los osciladores $x'' + a(t)x = 0$ y $x'' + a_0(t)x = 0$ se obtiene lo siguiente:

Lemma 1.1.2. *Sea k un entero positivo. Entonces el número de ceros de toda solución no trivial del oscilador no lineal (1.10) en $(0, kT/2)$ está acotado por $\nu_0(k)$, el número de ceros de la solución canónica ϕ en $(0, kT/2)$ de la ecuación variacional (1.11).*

El siguiente lema técnico da cuenta del comportamiento del número de ceros en un intervalo para una sucesión de funciones que converge en la C^1 -topología. Este resultado es clave para la demostración del Principio de Ortega y se usará en el próximo capítulo.

Lemma 1.1.3. *Supongamos que f_k es una sucesión de funciones de clase C^1 en $[0, L]$ que satisface $f_k(0) = 0$ para cada k y tal que $f_k \rightarrow f$ uniformemente en $[0, L]$, $f'_k \rightarrow f'$ uniformemente en $[0, L]$ (convergencia en la C^1 -topología), para f de clase C^1 en $[0, L]$ con la propiedad:*

$$f(x)^2 + f'(x)^2 > 0, \quad \forall x \in [0, L]$$

Entonces para un k lo suficientemente grande se cumple:

$$n(f) \leq n(f_k) \leq n(f) + 1$$

$n(f)$ denota el número de ceros de la función f en el intervalo $(0, L)$. Si además $f(L) \neq 0$ entonces $n(f_k) = n(f)$, $\forall k \geq k_0$, para cierto natural k_0 .

Demostración

Sea $Cf = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$ donde $f(c_i) = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ y $N = n(f)$ en $]0, L[$.

Por continuidad y dado que $f'(c_i) \neq 0$, existe un $\epsilon_i > 0$ tal que f es estrictamente monótona en $(c_i - \epsilon_i, c_i + \epsilon_i)$, esto implica que c_i es el único cero de f en ese pequeño intervalo. Así mismo dado que $f(0) = 0$ entonces por hipótesis $f'(0) \neq 0$, por tanto por continuidad de f' existe una vecindad $(0, \epsilon_0)$ donde f es monótona creciente o decreciente.

Entonces sea:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N (c_i - \epsilon_i, c_i + \epsilon_i) \cup [0, \epsilon_0) \cup (L - \epsilon_{N+1}, L]$$

Así mismo se define:

$$\epsilon = \inf(|f(c_1 - \epsilon_1) - f(c_1 + \epsilon_1)|, \dots, |f(c_N - \epsilon_N) - f(c_N + \epsilon_N)|)$$

Como $f_k \rightarrow f$ entonces $\exists k$ tal que si $n > k$ entonces:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \forall x \in (0, L)$$

Dado que $f(0) = 0$, entonces $f'(0) \neq 0$ y:

$$\inf(|f'([0, \epsilon])|) > 0$$

Así mismo por hipótesis $f'_n \rightarrow f'$ por lo cual $\exists k$ tal que si $n > k$

$$|f'_n(x) - f'(x)| < \inf(|f'([0, \epsilon])|)$$

En el intervalo $[0, \epsilon_0]$, de esta manera se conoce que f'_n no cambia de signo, f'_n es estrictamente monótona y $f_n(x) \neq 0 \forall x \in [0, \epsilon_0]$.

Ahora tomemos el caso de los intervalos de la forma $(c_i - \epsilon_i, c_i + \epsilon_i)$ sabemos que:

$$\text{sig}(f'(x)) = \text{sig}(f'(c_i)) \forall x \in (c_i - \epsilon_i, c_i + \epsilon_i)$$

Para tanto para un n suficientemente grande, f_n es estrictamente monótona lo cual implica que c_i es su único cero.

Finalmente en el intervalo $[L - \epsilon_{N+1}, L]$ en caso que $f(L) = 0$ sabemos que $f'(L) \neq 0$ por hipótesis, y dado a la convergencia de funciones podemos argumentar que

$$\text{signo}(f'(x)) = \text{signo}(f'(L)) \forall x \in [L - \epsilon_{N+1}, L]$$

Por lo cual este es el único cero.

Finalmente en el caso que $f(L) \neq 0$ sabemos igualmente que $f_n \rightarrow f$ uniformemente, por lo tanto $|f_n(x) - f(x)| < \inf(|f(L - \epsilon_{N+1}, L)|) \forall x \in [L - \epsilon_{N+1}, L]$ y dado a que f no se anula en ese intervalo entonces f_n no tiene ceros.

Así hemos demostrado que:

$$n(f) \leq n(f_k) \leq n(f) + 1$$

En un intervalo dado cuando $f_k \rightarrow f$ uniformemente y todas las funciones son de clase $C1$.

Lemma 1.1.4. *La solución general $x(t, v)$ de la ecuación diferencial $x'' + D(t, x)x = 0$ puede escribirse como*

$$x(t, v) = vt - \int_0^t (t-s)D(s, x(s, v))x(s, v)ds$$

Demostración:

Recordando la fórmula de variación de parámetros sabemos que:

$$\vec{X} = \phi(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \phi(t) \int_0^t \phi^{-1}(s) \vec{b}(s) ds$$

$$\frac{d}{dt} \vec{X} = A(t) \vec{X} + \vec{b}(t)$$

$$\phi(t) \phi^{-1}(s) = \phi(t-s) = e^{(t-s)A}$$

Dado que $x(0) = 0$ y $x'(0) = v$ reescribimos la ecuación diferencial como el sistema:

$$x' = y$$

$$y' = -xD(t, x)$$

entonces:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -xD(t, x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -x(s)D(s, x(s)) \end{pmatrix} ds$$

Donde finalmente obtenemos:

$$x(t, v) = vt - \int_0^t (t-s)D(s, x(s, v))x(s, v) ds$$

Capítulo 2

Principio de Ortega

El método de Ortega es un procedimiento propuesto por Rafael Ortega con el objetivo de resolver problemas relacionados con la mecánica celeste, en este capítulo estudiaremos en detalle las proposiciones de Ortega con el objetivo de aplicarlas en las ecuaciones diferenciales de segundo grado estudiadas en este proyecto.

Encontrando así cómo es posible encontrar soluciones periódicas impares para un sistema de ecuaciones que satisfacen las hipótesis de Ortega.

2.1. Proposiciones de R. Ortega

Sea la ecuación

$$z'' + D(t, z)z = 0 \quad (2.1)$$

donde D es una función de clase C^1 en ambas variables, en el dominio $t \in [-L, L]$ y $z \in \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

$$D(t, z) < D(t, 0), \quad \forall z \neq 0 \quad (2.2)$$

Se cumplen las siguientes simetrías:

$$D(t, -z) = D(t, z), \quad D(-t, z) = D(t, z), \quad \forall (t, z) \in [-L, L] \times \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Asumiremos también que existe un $C > 0$ tal que

$$|zD(t, z)| \leq C, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in]0, L[. \quad (2.4)$$

Esto implica que todas las soluciones son prolongables hasta $t = L$, pues el campo vectorial que define el sistema asociado de primer orden tiene crecimiento lineal.

El propósito de esta sección, es mostrar un principio debido a R. Ortega [13] que permite resolver el problema de Dirichlet

$$z'' + zD(t, z) = 0, \quad x(0) = x(L) = 0 \quad (2.5)$$

Este problema tiene sentido para todas las velocidades iniciales que podamos fijar en virtud de la prolongabilidad hasta L de todas las soluciones.

El principio de Ortega encuentra soluciones del problema de Dirichlet con energía cinética mínima, es decir, para velocidades iniciales mínimas que hacen que el número de ceros en $(0, L)$ no superen un entero dado N con algunas condiciones adecuadas. Para estas velocidades el citado número de ceros cambia en una unidad antes y después de ellas. Estas velocidades resuelven entonces el problema de Dirichlet. Para explicar el principio con mayor formalidad, haremos algunos apuntes y definiciones necesarias.

Sea $z(t, v)$ la única solución de (2.1) con las condiciones iniciales $z(0) = 0$ y $z'(0) = v$. Así mismo como $z = 0$ es solución, por unicidad se deduce que si $z(t)$ es una solución no trivial de (2.1), y $\alpha \in [0, L]$ con $z(\alpha) = 0$ entonces $z'(\alpha) \neq 0$. Esto significa que los ceros en el intervalo $[0, L]$ de cualquier solución no trivial son simples. Esto implica que existe un número finito de ceros en el intervalo $[0, L]$ de toda solución no trivial de (2.1).

Por tanto, podemos definir $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}^+$, $\nu(v)$ el número de ceros de $z(t, v)$ en el intervalo abierto $]0, L[$. De forma más general es posible definir $n(f) : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{N}$ donde $n(f)$ el número de ceros de f en $]a, b[$.

Sea $\phi(t)$ la solución de la ecuación linealizada en $z = 0$:

$$z'' + D(t, 0)z = 0 \quad (2.6)$$

con las condiciones iniciales $z(0) = 0$, $z'(0) = 1$. Al número de ceros de ϕ en el intervalo abierto $]0, L[$ lo denotaremos por $\nu_0 := \nu_0(L)$.

Lemma 2.1.1. *Se verifica para la ecuación (2.1)*

$$\nu(v) \leq \nu_0, \quad \forall v \neq 0 \quad (2.7)$$

Demostración. Nótese que $\eta(t) = z(t, v)$ puede verse como una solución de la ecuación diferencial lineal

$$\eta'' + a(t)\eta = 0, \quad (2.8)$$

donde $a(t) := D(t, z(t, v))$. Vamos ahora a comparar con el oscilador (2.6) mediante la Teoría de Comparación de Sturm.

Dado que por hipótesis $D(t, z) < D(t, 0)$, $\forall z \neq 0$ entonces se puede concluir que $a(t) = D(t, z(t, v)) < D(t, 0)$ fuera de los ceros de $z(t, v)$. Por lo tanto $a(t) \ll D(t, 0)$. En consecuencia, por el teorema de comparación de Sturm, entre dos ceros consecutivos t_1, t_2 de la solución $z(t, v)$ existe un $t_3 \in]t_1, t_2[$ tal que t_3 es cero de ϕ a menos que en el intervalo $]t_1, t_2[$ se cumpla que $a(t) \equiv D(t, 0)$, lo cual no es el caso. Por lo tanto:

$$\nu(v) \leq \nu_0.$$

Lemma 2.1.2. *Dado $\omega \neq 0$ existe $\delta > 0$ dado que $\nu(\omega) \leq \nu(v) \leq \nu(\omega) + 1$ si $|\omega - v| \leq \delta$. Asumiendo que $z(L, \omega) \neq 0$ entonces se cumple $\nu(\omega) = \nu(v)$ si $|\omega - v| \leq \delta$, es decir, $\nu(\cdot)$ es localmente constante.*

Demostración: Para demostrar este resultado consideremos una sucesión v_k que converge a ω . Así mismo, se define $f_k(t) := z(t, v_k)$. Ahora, debido a la continuidad y dependencia de las condiciones iniciales se obtiene que esta sucesión es de clase C^1 y converge uniformemente en la topología C^1 en $[0, L]$ a la función $f(t) := z(t, \omega)$ cuyos ceros son simples, i.e., $f_k \rightarrow f$, $f'_k \rightarrow f'$ uniformemente, en el intervalo $[0, L]$. Utilizando el resultado del lema 1 demostrado en el Apéndice A, entonces se concluye que $\nu(\omega) \leq \nu(v_k) \leq \nu(\omega) + 1, \forall k \in \mathbb{N}$. Tomando el límite en la última desigualdad cuando $k \rightarrow \infty$ se obtiene la desigualdad requerida. Esto finaliza la primera parte de la prueba. Asumamos ahora que $z(L, \omega) \neq 0$. Como $f(L) \neq 0$ podemos aplicar ahora la parte final del lemma (1.1.3) para concluir que $\nu(v_k) = n(f_k) = n(f) = \nu(\omega)$. Como la sucesión de velocidades v_k era arbitraria y convergente a ω , es inmediato concluir que la función $\nu(v)$ es localmente constante cerca de ω . En efecto, razonado por el absurdo, suponemos que para todo $\delta > 0$ existe $v_\delta \in [\omega - \delta, \omega + \delta]$ tal que $\nu(v_\delta) \neq \nu(\omega)$, en particular tomando cada vez $\delta = \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N}$ tendríamos una sucesión de velocidades iniciales convergente a ω , lo que contradice la última afirmación.

Lemma 2.1.3. *Existe un $v_* > 0$ tal que $\nu(v) = \nu_0$ si $|v| \leq v_*$*

Demostración:

Retomemos la ecuación (2.8) con condiciones iniciales:

$$x(0, v) = 0$$

$$x'(0, v) = v$$

cuya solución la hemos denotado por $x(t, v)$.

Sabemos del Teorema de diferenciabilidad respecto de condiciones iniciales que $x(t, v)$ es continua y diferenciable con respecto a t y v y que la función

$$z(t) := \frac{\partial x}{\partial v}(t, 0)$$

es solución de la ecuación variacional

$$z'' + a(t)z = 0$$

con condiciones iniciales $z(0) = 0$ y $z'(0) = 1$, donde se define $a(t)$ al evaluar $x = 0$ como:

$$a(t) := \frac{\partial(xD(t, x))}{\partial x} = D(t, 0).$$

Pero $z(t) = \frac{\partial x}{\partial v}(t, 0) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{x(t, v) - x(t, 0)}{v} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{x(t, v)}{v}$

En primer lugar notar que el número de ceros de $z(t)$ en $]0, L[$ es por definición ν_0 . Como $f_v := \frac{x(t, v)}{v}$ converge uniformemente a $z(t)$ en $[0, L]$ en la topología C^1 y los ceros de $z(t)$ son no degenerados, entonces por el citado Lema el número de ceros de f_v es mayor o igual que ν_0 para un v suficientemente pequeño. Combinando con el lema (2.1.1) se alcanza la conclusión.

Lemma 2.1.4. *Existe un $v^* > 0$ tal que $\nu(v) = 0$ si $|v| \geq v^*$*

En virtud del Lemma (1.1.4) se tiene que:

$$x(t, v) = vt - \int_0^t (t-s)D(s, x(s, v))x(s, v)ds \quad (2.9)$$

Tomando valor absoluto en (2.9) podemos obtener la siguiente desigualdad:

$$|x(t, v) - vt| \leq \int_0^t |(t-s)D(s, x(s, v))x(s, v)| |ds|$$

Ahora, sabemos por hipótesis que para un $C > 0$ apropiado se cumple:

$$|xD(t, x)| \leq C, \quad \forall(t, z) \in [0, L] \times \mathbb{R}$$

Por lo tanto combinando con la penúltima desigualdad se llega a

$$|x(t, v) - vt| \leq \int_0^t (t - s)C ds = Ct^2/2$$

Así en $[0, L]$ se tiene

$$|x(t, v) - vt| \leq \frac{L^2C}{2}$$

De forma similar y derivando bajo el signo de integral en (2.9) nos queda la estimación

$$|x'(t, v) - v| = \left| \int_0^t D(s, x(s, v))x(s, v) ds \right|$$

Ahora al aplicar de nuevo la hipótesis de acotamiento es posible obtener:

$$|x'(t, v) - v| \leq LC$$

Consideremos ahora una sucesión arbitraria creciente no acotada v_k . Luego

$$\left| \frac{x(t, v_k)}{v_k} - t \right| \leq \frac{L^2C}{2v_k}$$

Así como $v_k \rightarrow \infty$ entonces $\frac{L^2C}{2v_k} \rightarrow 0$, y se infiere que la sucesión de funciones $f_k(t) := \frac{x(t, v_k)}{v_k}$ converge uniformemente a la función $f(t) = t$ en el intervalo $[0, L]$. De la otra desigualdad se infiere que

$$\left| \frac{x'(t, v)}{v_k} - 1 \right| \leq \frac{LC}{v_k}$$

Entonces $f'_k(t)$ converge uniformemente a $f'(t) = 1$. Esto prueba que f_k converge uniformemente a f en la topología $C^1[0, L]$ Como f tiene ceros no degenerados y no se anula en L entonces una aplicación del Lema 1.1.4 nos dice que el número de ceros de f_k y de f en el interior del intervalo son números idénticos para k grande, entonces son iguales a cero. Por lo tanto $\nu(v_k) = 0$ para k grande. Como la sucesión v_k fue arbitraria la conclusión requerida se sigue fácilmente.

Teorema 2.1.5. *Asúmase las hipótesis (2.2), (2.3) y (2.4). Entonces son equivalentes:*

- El problema de Dirichlet

$$z'' + D(t, z)z = 0, \quad z(0) = z(L) = 0$$

tiene una solución con $N \geq 0$ ceros en $]0, L[$

- $N < \nu_0$.

Demostración. Sea $N \geq 0$ tal que $N < \nu_0$. Definamos

$$S_N = \{v \in (0, \infty) / \nu(v) \leq N\}$$

Esto significa que S_N corresponde a todos las velocidades iniciales que iniciando en $x = 0$, producen un número de ceros no mayor a N en $(0, L)$. Por el lema [2.1.4](#) sabemos que S_N es no vacío pues contiene grandes velocidades v con $\nu(v) = 0 \leq N$. También S_N está acotado inferiormente por 0; por lo tanto en virtud del axioma de completitud podemos definir el número real $\omega_N := \inf(S_N)$.

Ahora, por el lema [2.1.3](#) sabemos que 0 no es un punto de acumulación en S_N , por lo cual $\omega_N > 0$. En efecto una sucesión de velocidades v_n en S_N convergiendo a 0 daría como resultado $\nu(v_n) = \nu_0 > N$ para n grande, lo que es contradictorio con el hecho de que las v_n esten en S_N .

Por definición de ínfimo existe una sucesión $v_k \rightarrow \omega_N$ con $v_k > \omega_N$ y $\nu(v_k) \leq N$. Ahora, por lema [2.1.2](#) sabemos que $\nu(v_k) \geq \nu(\omega_N)$ a partir de un k lo suficientemente grande, esto implica que $\nu(\omega_N) \leq N$ lo cual significa que $\omega_N \in S_N$. Esto hace que ω_N sea adicionalmente el mínimo del conjunto S_N .

Ahora, tomemos velocidades cerca del ínfimo pero por la izquierda: $0 < \omega_N - v < \delta$, donde δ es la constante del Lema [2.1.2](#). Como v no está en S_N entonces $N < \nu(v) \leq \nu(\omega_N) + 1 \leq N + 1$. Esto implica $N - 1 < \nu(\omega_N) \leq N$, y por lo tanto $\nu(\omega_N) = N$.

En síntesis, para v y w cerca de ω_N con $v < \omega_N < w$ se tiene que $N + 1 \leq \nu(v) \leq \nu(\omega_N) + 1 = N + 1$ así $\nu(v) = N + 1$ y $\nu(w) \leq N$. Esto dice que en ω_N la función ν tiene un salto. En virtud del Lema [2.1.2](#) se deduce que $x(L, \omega_N) = 0$. De lo contrario $\nu(v)$ sería localmente constante cerca de ω_N . La solución $x(t, \omega_N)$ es la solución buscada del problema de Dirichlet y tiene exactamente N ceros en $(0, L)$.

Ahora probaremos, utilizando teorema de comparación de Sturm, que estas condiciones son así mismo condiciones necesarias. Sea $z(t) = x(t, v)$ una

solución del problema de Dirichlet, $z(0) = z(L) = 0$ con N ceros en $(0, L]$. Así contabilizamos $N + 2$ ceros en el intervalo $[0, L]$ y $N + 1$ sub-intervalos entre ellos. Comparemos las ecuaciones:

$$z'' + D(t, z)z = 0$$

y

$$\psi'' + D(t, 0)\psi = 0$$

Por teorema de comparación de Sturm dado que $D(t, 0) \gg D(t, z(t)) \forall t \in [0, L]$ entonces por cada par de ceros consecutivos de $z(t)$ existe siempre al menos un cero de ψ , así aparecen al menos $N + 1$ ceros de ψ en el intervalo $[0, L]$; por tanto $N < \nu_0$. □

2.2. Un ejemplo. El columpio

En esta sección realizaremos una aplicación del Principio de Ortega estudiado en la sección anterior a un oscilador clásico en mecánica conocido como el columpio (swing). Este problema es clásico y útil para explicar la resonancia paramétrica. (ver [2]) Se sabe que el ángulo del swing $x(t)$ respecto de la vertical satisface la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$x'' + (A + B\cos(\theta t))\text{sen}(x) = 0, \quad (2.10)$$

donde $l(t) := (A + B\cos(\theta t)) > 0$ representa la longitud variable del péndulo, con $A > B > 0$ y $\theta > 0$ la frecuencia del columpio.

El objetivo consiste en encontrar los parámetros apropiados A, B para que este modelo tenga soluciones periódicas impares de período nT , $T = \frac{2\pi}{\theta}, n \in \mathbf{N}$, con un número de ceros prefijado y arbitrario N_0 . En virtud de la teoría de comparación de Sturm, la estrategia consiste en comparar con la ecuación linealizada en $x = 0$:

$$x'' + (A + B\cos(\theta t))x = 0 \quad (2.11)$$

EL sistema de primer orden asociado a esta ecuación puede escribirse como:

$$\begin{aligned} x' &= u \\ u' &= -(A + B\cos(\theta t))x \end{aligned}$$

Sea $\phi(t)$ la solución de la ecuación linealizada (2.11) con condiciones iniciales $\phi(0) = 0, \phi'(0) = 1$. Vamos a estimar el número de ceros de esta solución canónica en $(0, nT/2)$. Llamaremos a este número $\nu_0(n)$.

Para aplicar el teorema de comparación de Sturm debemos encontrar un máximo y mínimo de la expresión $q(t) := A + B\cos(\theta t)$, el cual se puede encontrar fácilmente dando como resultado $c^2 \leq a(t) \leq k^2$ con

$$c^2 := A - B$$

$$k^2 := A + B$$

Comencemos con la estimación de $\nu_0(1)$. Aplicando el corolario del Teorema de comparación de Sturm sabemos que dados t_1, t_2 ceros consecutivos de la solución $\phi(t)$ de (2.11) entonces

$$\frac{\pi}{k} < t_2 - t_1 < \frac{\pi}{c}$$

Tomaremos $t_1 = 0$ como cero inicial de referencia. Ahora deseamos conocer una estimación del número de ceros en el intervalo $(0, \frac{\pi}{\theta})$. Si $\theta > k$ entonces ϕ no se anula en el intervalo $(0, \pi/\theta)$; por lo tanto en este caso $\nu_0(1) = 0$. Por otra parte si $\theta \in (c, k]$ entonces $\frac{\pi}{k} \leq \frac{\pi}{\theta} < \frac{\pi}{c}$ por tanto no se puede asegurar la existencia de un cero con esta metodología.

Suponemos de acá en adelante que $\theta \leq c$ es decir, $\frac{\pi}{\theta} \geq \frac{\pi}{c}$. Comparando las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x''(t) + q(t)x &= 0 \\ x''(t) + c^2x &= 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Dado que la expresión $x''(t) + c^2x = 0$ representa un oscilador mas lento entonces fijando $t_1 = 0$ sabemos que el segundo cero de la solución de la expresión (2.12) que inicia en $t_1 = 0$, está exactamente en $\frac{\pi}{c}$. Por otra parte, en el intervalo $(0, \frac{\pi}{c})$ existe al menos un cero de toda solución no trivial de (2.11). Nótese que existe un entero m tal que:

$$\frac{m\pi}{c} \leq \frac{\pi}{\theta} < \frac{(m+1)\pi}{c}$$

o

$$\begin{aligned} \frac{m}{c} &\leq \frac{1}{\theta} < \frac{m+1}{c} \\ m &\leq \frac{c}{\theta} < m+1 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$m := \left\lfloor \frac{c}{\theta} \right\rfloor \quad (2.13)$$

Nótese que entre dos ceros del oscilador (2.12) existe al menos un cero del oscilador (2.11), entonces se puede afirmar que el oscilador (2.11) tiene al menos m ceros interiores en el intervalo $(0, \frac{\pi}{\theta})$. Por tanto $\nu_0 \geq m$.

Ahora analicemos la ecuación

$$x''(t) + k^2x = 0 \quad (2.14)$$

Dado que $\frac{\pi}{k} < \frac{\pi}{\theta}$, (2.14) representa un oscilador más rápido que (2.11), entonces entre dos ceros consecutivos de toda solución no trivial $x(t)$ de (2.11) tal que $x(0) = 0$ existe al menos un cero de toda solución no trivial de (2.14). En particular si $x = \phi$ esto implica que $\nu_0 \geq m'$ donde m' es el número de ceros de $\sin kt$ en el intervalo $]0, \pi/\theta[$. Este número m' es fácil de determinar como sigue. El primer cero positivo de la solución $\sin(kt)$ de (2.14) está exactamente en $\frac{\pi}{k}$. Análogamente al caso anterior sabemos que existe un entero m' tal que:

$$\begin{aligned} \frac{m'\pi}{k} &\leq \frac{\pi}{\theta} < \frac{(m'+1)\pi}{k} \\ \frac{m'}{k} &\leq \frac{1}{\theta} < \frac{m'+1}{k} \\ m' &\leq \frac{k}{\theta} < m'+1 \end{aligned}$$

Por tanto

$$m' = \left\lfloor \frac{k}{\theta} \right\rfloor$$

En síntesis, se puede delimitar el número de ceros interiores de ϕ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} m &\leq \nu_0 \leq m' \\ \left\lfloor \frac{c}{\theta} \right\rfloor &\leq \nu_0 \leq \left\lfloor \frac{k}{\theta} \right\rfloor \end{aligned}$$

Sustituyendo c, k se obtiene la relación

$$\left\lfloor \frac{\sqrt{A-B}}{\theta} \right\rfloor \leq \nu_0 \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{A+B}}{\theta} \right\rfloor \quad (2.15)$$

suponiendo que $\theta \leq \sqrt{A - B}$, obteniendo así una estimación del número de ceros interiores en $[0, \pi/\theta]$.

De manera análoga si hace el conteo en el intervalo $(0, n\pi/\theta)$ con n número natural arbitrario fijo, se obtiene para el número correspondiente $\nu_0(n)$ la estimación:

$$\left\lfloor \frac{nT\sqrt{A - B}}{2\pi} \right\rfloor \leq \nu_0(n) \leq \left\lfloor \frac{nT\sqrt{A + B}}{2\pi} \right\rfloor, \quad (2.16)$$

con $T = 2\pi/\theta$. Con el propósito de encontrar un péndulo apropiado con un número arbitrario de ceros $\nu_0(n)$ en el intervalo $(0, n\pi/\omega)$ para la ecuación (2.11), vamos a considerar los péndulos que cumplan con las siguientes condiciones para un N_0 natural fijado de antemano.

$$N_0 - 1 < \left\lfloor \frac{nT\sqrt{A - B}}{2\pi} \right\rfloor \leq N_0 \leq \left\lfloor \frac{nT\sqrt{A + B}}{2\pi} \right\rfloor < N_0 + 1$$

Por tanto podemos decir que para un N_0 arbitrario, hacemos que el columpio cumpla con las siguientes desigualdades, que serán condiciones suficientes para que $\nu_0(n) = N_0$:

$$\frac{4\pi^2(N_0 - 1)^2}{n^2T^2} < A - B \leq \frac{4\pi^2N_0^2}{n^2T^2}, \quad (2.17)$$

$$\frac{4\pi^2N_0^2}{n^2T^2} < A + B < \frac{4\pi^2(N_0 + 1)^2}{n^2T^2} \quad (2.18)$$

lo que da la regla para la determinación de las longitudes mínimas y máximas del columpio para obtener al menos N_0 ceros en el intervalo de tiempo $(0, n\pi/\omega)$.

Ahora es necesario estudiar cuando (2.10) satisface las hipótesis del Principio de Ortega.

Primero es necesario escribir la ecuación (2.10) en la forma (2.1), posteriormente debemos verificar que cumple con la simetría requerida y finalmente que la hipótesis (2.4) se satisface, es decir, que la no-linealidad de la ecuación diferencial está acotada.

Iniciemos verificando que (2.10) cumple con (2.2)

Dado que la ecuación (2.10) no está inicialmente en la forma requerida, como $x = 0$ es un factor, podemos re-escribirla del siguiente modo:

$$x'' + \frac{(A + B\cos(\theta t))\text{sen}(x)}{x}x = 0$$

Donde $D(t, x) := \frac{A+B\cos(\theta t)\text{sen}(x)}{x}$ si $x \neq 0$ y $D(t, 0) := A + B\cos(\theta t)$
 Primero es necesario verificar que:

$$D(t, 0) > D(t, x), \forall x \neq 0$$

Esto es equivalente a mostrar que:

$$\frac{\text{sen}(x)}{x} < 1, \forall x \neq 0$$

Aunque esta desigualdad es clásica, realizaremos una demostración por casos para completar:

Sea $x > 1$, se puede establecer la siguiente relación:

$$\frac{\text{sen}(x)}{x} \leq \frac{\sup(\text{sen}(x))}{x} = \frac{1}{x}$$

Dado que $x > 1$ entonces:

$$\frac{\text{sen}(x)}{x} \leq \frac{1}{x} < 1$$

Por tanto

$$\frac{\text{sen}(x)}{x} < 1$$

Para $x = 1$ basta con verificar:

$$\text{sen}(1) < 1$$

Caso: $x \in (0, 1)$ Recordemos la expansión de Taylor de la función $\text{sen}(x)$

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$

Así mismo se puede plantear la serie:

$$\frac{\text{sen}(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \dots$$

Supongamos por el absurdo que $\frac{\text{sen}(x)}{x} \geq 1$. Entonces tenemos,

$$\frac{\text{sen}(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \geq 1$$

$$-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} + \dots \geq 0$$

Como las series convergen absolutamente entonces cualquier reordenación convergerá al mismo límite, de este modo podemos escribir:

$$\frac{x^4}{5!} + \frac{x^8}{9!} + \frac{x^{12}}{13!} + \dots \geq \frac{x^2}{3!} + \frac{x^6}{7!} + \frac{x^{10}}{11!} + \dots$$

, i.e.,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n+1)!} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-2}}{(4n-1)!} \quad (2.19)$$

Recordando que $x \in (0, 1)$ se puede observar que ambas series son completamente positivas, por tanto se puede verificar su convergencia usando el criterio de d'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$$

Si $r < 1$ la serie converge. Aplicando el criterio a ambas series de la ecuación (2.19) se obtiene como resultado $r = 0$ por lo cual ambas series convergen.

Estudiemos ahora algunas características de las series establecidas recordando que $x \in (0, 1)$, sean $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $m > n \geq 1$, se puede observar que:

$$\frac{x^{4n}}{(4n+1)!} > \frac{x^{4m}}{(4m+1)!}$$

Así mismo:

$$\frac{x^{4n-2}}{(4n-1)!} > \frac{x^{4m-2}}{(4m-1)!}$$

Igualmente:

$$\frac{x^{(4n-2)}}{(4n-1)!} > \frac{x^{4n}}{(4n+1)!}$$

Por tanto dado que ambas series son enteramente positivas y todos los elementos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-2}}{(4n-1)!}$ son mayores que los de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n+1)!}$, por tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n+1)!} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-2}}{(4n-1)!}$$

cuando $x \in (0, 1)$, lo cual plantea una contradicción con (2.19). De esta forma hemos demostrado que para todos los casos $\frac{\text{sen}(x)}{x} < 1$, lo cual equivale a $D(t, 0) > D(t, x)$.

Todas estas consideraciones nos conducen al siguiente resultado que ha sido demostrado:

Teorema 2.2.1. Sean n, N_0 números naturales y supongamos en que (2.10) $0 < \theta \leq \sqrt{A - B}$. Supongamos que se verifican las condiciones (2.17) y (2.18). Entonces $\nu_0(n) = N_0$ y (2.10) tienen una solución $\frac{2n\pi}{\theta}$ periódica impar φ_k con $\dot{\varphi}_k(0) > 0$ y con k ceros en el intervalo $]0, \frac{n\pi}{\theta}[$ para $k = 0, 1, \dots, N_0 - 1$.

La solución positiva φ_0 siempre es minimal como solución nT - periódica impar con $T = 2\pi/\theta$, pues de lo contrario se anularía antes de $nT/2$. Si $n = 1$ las soluciones periódicas proporcionadas por el resultado anterior son todas minimales.

Capítulo 3

Oscilaciones periódicas impares en MEMS tipo peine

En este capítulo trabajaremos brevemente algunos resultados recientes de la aplicación del principio de Ortega a algunos MEMS electrostáticos tipo peine [10][9], como las ecuaciones del movimiento transversal del dedo en un MEMS tipo peine presenta singularidades, los autores en [10] proponen utilizar la técnica de truncamiento y cotas a priori para soluciones periódicas.

Recordando la ecuación del combdrive adimensionalizada (1.10) se puede observar que existen singularidades en $x = 1$ y $x = -1$, lo cual no permite aplicar directamente el resultado principal del capítulo anterior. Es por ello que en [10][9] los autores recomiendan el método de truncamiento basado en cotas a priori para aplicar de forma exitosa el método del disparo de R. Ortega en este tipo de dispositivos. Este capítulo tiene entonces el propósito de revisar la metodología empleada en estos trabajos recientes para la búsqueda de soluciones periódicas impares en estos dispositivos.

A continuación estudiaremos la dinámica de un dispositivo tipo peine con entrada de voltaje constante (ver [15] para más detalles) y revisar el concepto de voltaje de pull in.

3.1. Análisis de equilibrio en un dispositivo tipo peine con voltaje constante

Para una ecuación diferencial de la forma:

$$x'' + f(x) = 0$$

El sistema de primer orden asociado es:

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -f(x).\end{aligned}$$

El cual tiene equilibrios de la forma $(x^*, 0)$ y $f(x^*) = 0$. La linealización de este sistema en cada equilibrio es:

$$\begin{aligned}u' &= v \\v' &= -f'(x^*)u\end{aligned}$$

Pues la matriz jacobiana A evaluada en el equilibrio es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f'(x) & 0 \end{bmatrix}$$

Así mismo los valores propios de A pueden obtenerse de la siguiente expresión:

$$\lambda^2 + f'(x^*) = 0$$

De esta manera los valores propios están dados por:

$$\lambda = \pm \sqrt{-f'(x^*)}$$

Por tanto si $f'(x^*) < 0$ entonces $\lambda \in \mathbb{R}$ por lo que podemos deducir que el equilibrio $(x^*(0))$ es una silla. Por otra parte si $f'(x^*) > 0$ entonces λ son imaginarios puros lo cual indica que el equilibrio se trata de un centro no lineal, pues además el sistema es conservativo (esto es una excepción en el teorema de Hartman-Grobman).

Ahora retomando la ecuación de segundo grado del comb-drive:

$$x'' + x = \frac{4\beta xv_0^2}{(1-x^2)^2}$$

La podemos reescribir de forma equivalente de la forma:

$$x'' + f(x) = 0$$

3.1. ANÁLISIS DE EQUILIBRIO EN UN DISPOSITIVO TIPO PEINE CON VOLTAJE CONSTANTE

con

$$f(x) = x\left(1 - \frac{4\beta v_0^2}{(1-x^2)^2}\right)$$

De aquí los equilibrios se dan cuando $f(x) = 0$ Esto es:

$$x = 0$$

ó

$$1 - \frac{4\beta v_0^2}{(1-x^2)^2} = 0$$

Lo cual da como resultado los siguientes puntos de equilibrio:

$$(0, 0), (\sqrt{1 - 2\sqrt{\beta}v_0}, 0), (-\sqrt{1 - 2\sqrt{\beta}v_0}, 0)$$

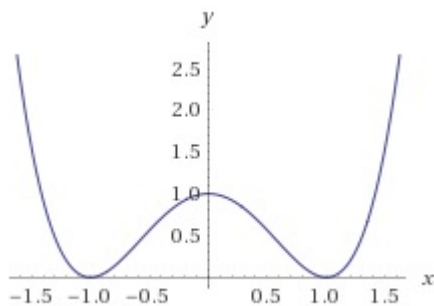
Podemos ahora reescribir la función de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}(Q(x) - 4\beta v_0^2) = g(x)(Q(x) - 4\beta v_0^2)$$

Defiando:

$$Q(x) = (1-x^2)^2$$

Observemos el grafico de $Q(x)$:



Del gráfico podemos observar el signo de la función $Q(x)$ que será utilizado más adelante para determinar el signo de $f'(x)$, igualmente podemos observar la forma analítica de la derivada de la función $Q(x)$ para corroborar el resultado.

$$Q'(x) = 2(1-x^2)(-2x)$$

$$Q'(x) = -4x(1-x^2)$$

Ahora analizando en $(-1,1)$, $Q'(x)$ es positiva para x negativa y negativa para x positiva. Derivemos ahora $f(x)$

$$f'(x) = g'(x)(Q(x) - 4\beta v_0^2) + g(x)Q'(x)$$

Ahora evaluemos en los equilibrios:

$$f'(0) = g'(0)(1 - 4\beta v_0^2)$$

Derivemos

$$g'(x) = \frac{3x^2 + 1}{(1 - x^2)^3}$$

Entonces volviendo

$$f'(0) = g'(0)(1 - 4\beta v_0^2) = (1 - 4\beta v_0^2)$$

Si $1 - 4\beta v_0^2 > 0$ entonces el equilibrio $(0, 0)$ es un centro. Así mismo es posible realizar un análisis similar donde bajo la condición de $1 - 4\beta v_0^2 > 0$ se cumple que $f'(x^*) < 0$ para los demás equilibrios.

Esto nos permite escribir explícitamente el voltaje de pull-in que determina el valor límite del voltaje para que existan equilibrios estables dentro del sistema, siendo este:

$$v_{pull} = \sqrt{\frac{1}{4\beta}}$$

Llamaremos v_{pull} al valor máximo que puede alcanzar el voltaje inicial para que exista la estabilidad del sistema de ecuaciones descrito. Claramente si este voltaje supera la expresión $\sqrt{\frac{1}{4\beta}}$ los puntos de equilibrio calculados anteriormente dejan de existir, lo cual puede observarse con más detalle en [15].

De esta manera hemos demostrado la existencia de tres puntos de equilibrio para una ecuación de la forma

$$x'' + x = \frac{4\beta x v_0^2}{(1 - x^2)^2}$$

3.2. Método de truncamiento

A continuación explicamos brevemente el método de truncamiento usado generalmente en problemas de contorno (ver [1]) y cómo utilizarlo en dispositivos tipo peine como en [10].

Lemma 3.2.1. ([9]) Sea $x'' = g(t, x)$ donde $g(t, x)$ es localmente Lipschitz en x , $g : \mathbb{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. Supóngase que existen constantes $R_1, R_2 \in (a, b)$ con $R_1 < R_2$ tal que se verifica lo siguiente $\forall t$:

i) $g(t, x) > 0$, $b > x > R_2$,

ii) $g(t, x) < 0$, $a < x < R_1$

Entonces toda solución T -periódica $x_0(t)$ verifica que $R_1 \leq x_0(t) \leq R_2$, $\forall t$

Demostración:

Supongamos que existe una solución T -periódica $\phi(t)$ tal que $a < \phi(t) < b$ para todo t y que se cumplen todas las hipótesis del lemma.

Asumamos que $a < \phi(t) < R_1$ entonces por continuidad para algún $t_1 \in \mathbb{R}$ existe un t^* tal que:

$$\min_{t \in [0, T]} \phi(t) = \phi(t^*) \leq \phi(t_1) < R_1$$

por lo tanto:

$$0 \leq \phi''(t^*) = g(t^*, \phi(t^*))$$

Pero por hipótesis sabemos que dado que $a < \phi(t) < R_1$ entonces:

$$\phi''(t^*) = g(t^*, \phi(t^*)) < 0$$

Lo cual contradice el enunciado anterior, y concluye que:

$$\phi(t) \geq R_1$$

Ahora supongamos que $R_2 < \phi(t) < b$, por continuidad para algún $t_1 \in \mathbb{R}$ existe un t^* tal que:

$$\max_{t \in [0, T]} \phi(t) = \phi(t^*) \geq \phi(t_1) > R_2,$$

y

$$0 \geq \phi''(t^*)$$

Pero por hipótesis:

$$\phi''(t^*) = g(t^*, \phi(t^*)) > 0$$

lo cual genera una contradicción, Por tanto hemos demostrado que:

$$R_1 \leq \phi(t) \leq R_2$$

Usando el lemma de cotas a priori se puede utilizar el método de truncamiento propuesto en [9], donde dada una ecuación de la forma $x'' + F(t, x) = 0$, con

$F(t, x) = xD(t, x)$, recordando la ecuación del movimiento de los dispositivos tipo peine estudiados (1.10) es posible estudiar sus cotas a priori utilizando la siguiente expresión:

$$F(t, x) = x\left(1 - \frac{4\beta v^2(t)}{(1-x^2)^2}\right)$$

primero debemos verificar las hipótesis: $F(t, x)$ debe ser localmente Lipschitz en el abierto $(-1, 1)$, debido a su simetría es suficiente con probar esta hipótesis en el abierto $(0, 1)$, para lo cual se puede observar que la función deseada en el abierto designado es diferenciable y por lo tanto localmente Lipschitz. Ahora es necesario encontrar los valores R_1, R_2 , donde debido a su simetría $-R_1 = R_2 = R$. Teniendo en cuenta que si $R < x < 1$ debe implicar $F(t, x) > 0$ es necesario resolver la siguiente inecuación:

$$g(t, x) := -x\left(1 - \frac{4\beta v^2(t)}{(1-x^2)^2}\right) > 0$$

donde resolviendo para x obtenemos el resultado:

$$|x| > \sqrt{1 - 2v(t)\sqrt{\beta}}$$

Ahora dado que las cotas a priori deben ser independientes de t , recordando que $v(t)$ es una función continua y periódica entonces en particular tiene un mínimo global v_{min} , y de esta forma podemos plantear la desigualdad:

$$|x| > \sqrt{1 - 2v_{min}\sqrt{\beta}} \geq \sqrt{1 - 2v(t)\sqrt{\beta}}$$

Encontrando así las cotas a priori:

$$\begin{aligned} R_1 &= -R_2 \\ R_2 &= \sqrt{1 - 2v_{mn}\sqrt{\beta} + \epsilon_0} \end{aligned} \tag{3.1}$$

con $\epsilon_0 > 0$ y pequeño.

Construcción de la función de truncamiento

Utilizando las cotas a priori ya conocidas y utilizando la simetría impar de la función (1.10) proponemos la siguiente función impar $h(x)$ que es una perturbación de la identidad, y que sólo bastará definir en el eje positivo:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq R \\ \frac{A}{e^{cx}} + k, & \text{si } x > R \end{cases} \quad (3.2)$$

donde definiendo de forma adecuada las constantes de la función exponencial propuesta, de tal forma que h sea una función de clase C^1 , es necesario plantear las siguientes condiciones. Acá $R = R_2$ es la cota a priori del párrafo anterior.

$$R < R + \epsilon < 1$$

donde $\epsilon > 0$ y $\epsilon \in \mathbb{R}$ y planteando el sistema de ecuaciones dado por $h(R) = R$ y $h'(R) = 1$:

$$R = \frac{A}{e^{cR}} + R + \epsilon$$

$$1 = -Ace^{-cR}$$

es posible encontrar las constantes necesarias para la función siendo:

$$c = \frac{1}{\epsilon}$$

$$A = -\epsilon e^{\frac{1}{\epsilon}R}$$

y de esta manera se obtiene

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq R \\ -\epsilon e^{\frac{1}{\epsilon}(R-x)} + (R + \epsilon), & \text{si } x > R \end{cases} \quad (3.3)$$

Así mismo podemos definir:

$$h^*(x) = \begin{cases} h(x), & \text{si } x \geq 0 \\ -h(-x), & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Teniendo en cuenta que la función $h(x)$ es una perturbación de la identidad, debido a su simetría puede definirse la función anterior. Así mismo los análisis posteriores se realizarán utilizando $h(x)$ notando que de forma análoga podrán aplicarse también en todo \mathbb{R} utilizando $h^*(x)$.

Ahora es posible mostrar que $\frac{h(x)}{x} \leq 1$, si $0 < x \leq R$ entonces $h(x) = x$, por tanto $\frac{h(x)}{x} = 1$. Si $x > R$ es necesario analizar la derivada $h'(x) = e^{\frac{1}{\epsilon}(R-x)}$, dado que $x > R$ entonces:

$$h'(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{\epsilon}(x-R)}}$$

siendo $x - R > 0$, por tanto es posible observar que $h'(x)$ es decreciente no negativa en $x > R$, así mismo recordando que para $f(x) = x$, $f'(x) = 1$. Dado que por definición conocemos que $h'(R) = 1$ y $h'(x)$ es decreciente no negativa, podemos plantear:

$$\begin{aligned} \int_R^x h'(x) &\leq \int_R^x 1 \\ h(x) - h(R) &\leq x - R \\ h(x) - R &\leq x - R \\ h(x) &\leq x \end{aligned}$$

De esta forma hemos demostrado que:

$$\frac{h(x)}{x} \leq 1, \forall x > 0$$

Así mismo $h(x)$ es de clase C^1 dada su construcción y esta acotada por el valor $\epsilon + R$ ya que $h(x)$ es monotona creciente y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = R + \epsilon < 1$$

Así mismo en virtud de la simetría de la función (1.10) es necesario tener en cuenta que dado que $D(t, x) = D(t, -x)$, dado que $h(x)$ conserva el signo entonces se cumple así mismo que $D(t, h(x))$

Ahora recordando la función (1.10) si quisiéramos verla en la forma de Ortega se diría que:

$$x'' + D(t, x)x = 0$$

donde $D = 1 - \frac{4\beta V^2(t)}{(1-x^2)^2}$, sin embargo como ya vimos al principio de esta sección, esta función D no cumple con las hipótesis de Ortega debido a su singularidad, es por ello que utilizando los elementos calculados en esta sección construiremos una nueva D^* que permita realizar cálculos utilizando el método de Ortega.

De esta forma definimos

$$x'' + xD^*(t, h(x)) = 0 \quad (3.5)$$

para ello en principio debemos plantear la ecuación truncada del modo siguiente:

$$x'' + h^*(x)D(t, h^*(x)) = 0;$$

pero dado que esta ecuación no cumple con la forma de Ortega la re-escribimos así:

$$x'' + x\left(\frac{h^*(x)D(t, h^*(x))}{x}\right) = 0$$

Ahora podemos definir:

$$D^*(t, x) = \begin{cases} \frac{h^*(x)D(t, h^*(x))}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1 - 4\beta V^2(t), & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)D(t, h(x))}{x} = 1 - 4\beta V^2(t)$$

Ahora podemos finalmente plantear la ecuación truncada apropiada como:

$$x'' + xD^*(t, x) = 0 \quad (3.7)$$

Ahora verifiquemos que esta función cumple con las hipótesis de Ortega empezando con la hipótesis:

$$D^*(t, x) < D^*(t, 0), \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

$$D^*(t, x) = \frac{h(x)}{x} \left(1 - \frac{4\beta v^2(t)}{(1 - h^2(x))^2}\right)$$

Dado que ya hemos mostrado en la definición de $h(x)$ que $\frac{h(x)}{x} \leq 1$, probaremos que:

$$D(t, x) < D(t, 0), \forall x \in (0, 1)$$

$$1 - \frac{4\beta v^2(t)}{(1 - x^2)^2} < 1 - 4\beta v^2(t)$$

$$-\frac{4\beta v^2(t)}{(1 - x^2)^2} < -4\beta v^2(t)$$

$$\frac{4\beta v^2(t)}{(1-x^2)^2} > 4\beta v^2(t)$$

$$\frac{1}{(1-x^2)^2} > 1$$

Dado que $x \in (0, 1)$ entonces $(1-x^2)^2 < 1$ por tanto hemos demostrado que dado $x \in (0, 1)$ entonces:

$$D(t, x) < D(t, 0)$$

Retomando ahora la expresión:

$$\frac{h(x)}{x} \left(1 - \frac{4\beta v^2(t)}{(1-h^2(x))^2}\right)$$

Dado que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = R + \epsilon < 1$$

podemos decir que $h(x) \in (0, 1) \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ y así se cumple que:

$$D(t, h(x)) < D(t, 0)$$

recordando que $\frac{h(x)}{x} \leq 1$ se valida que:

$$\frac{h(x)}{x} D(t, h(x)) < D(t, 0)$$

si $D(t, h(x)) \geq 0$. En el caso de que el signo de la última expresión sea negativo, será obvia la desigualdad anterior pues $D(t, 0) > 0$ en virtud de la condición sobre los voltajes $1 - 4\beta v^2(t) > 0$. Nótese que los argumentos anteriores implican la desigualdad buscada para los x negativos en virtud de las simetría impar de h y la simetría par en x de la D .

De esta forma hemos demostrado que:

$$D^*(t, x) < D^*(t, 0), \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

Así mismo como se ha hecho evidente en la construcción de la función (3.5), se conservan las simetrías que ya se habían trabajado en (1.10), por tanto solo queda demostrar que:

$$|xD^*(t, x)| < C, \forall x \in \mathbb{R}$$

para cierta $C > 0$. Si $x = 0$ el resultado es trivial ya que $D^*(t, x)$ esta bien definido en $x = 0$ y se obtiene:

$$0 < C$$

Por otra parte si $x \neq 0$ entonces:

$$\left| \frac{xh(x)D(t, g(x))}{x} \right|$$

$$|h(x)D(t, g(x))|$$

Por definición $h(x) < R + \epsilon$ y dado que ya probamos que $D(t, g(x)) < D(t, 0)$ en el resultado anterior es posible acotar de la siguiente manera:

$$|h(x)D(t, g(x))| < (R + \epsilon)(D(t, 0))$$

Dado que $D(t, 0)$ depende de t es necesario analizar:

$$D(t, 0) = 1 - 4\beta v^2(t)$$

en particular como ya sabemos que la función $v(t)$ es continua y acotada entonces existe un t^* tal que $v(t^*) = v_{min}$:

$$1 - 4\beta v^2(t) \leq 1 - 4\beta v_{min}^2 = D(t^*, 0)$$

Así mismo dado que $D(t, 0)$ es positivo podemos plantear:

$$|h(x)D(t, g(x))| < (R + \epsilon)(D(t^*, 0))$$

De esta forma hemos demostrado que:

$$|xD^*(t, x)| < (R + \epsilon)D(t^*, 0) \leq C$$

Así efectivamente la función:

$$x'' + xD^*(t, x) = 0 \tag{3.8}$$

cumple con todas las hipótesis de Ortega, ahora verificaremos que las cotas a priori son las mismas que las de la ecuación (1.10), dado que la función truncada cumple con las simetrías requeridas es posible realizar un análisis similar:

$$F(t, x) = \frac{xh(x)}{x} \left(1 - \frac{4\beta v^2(t)}{(1 - h^2(x))^2}\right)$$

Dado $x \neq 0$ es necesario estudiar entonces el siguiente signo:

$$-h(x) \left(1 - \frac{4\beta v^2(t)}{(1 - h^2(x))^2}\right) > 0$$

Despejando $h(x)$

$$|h(x)| > \sqrt{1 - 2v(t)\sqrt{\beta}}$$

utilizando v_{min} planteamos:

$$|h(x)| > \sqrt{1 - 2v_{min}\sqrt{\beta}} \geq \sqrt{1 - 2v(t)\sqrt{\beta}},$$

Como por construcción $h(x) \geq R_2$ si $x \geq R_2$ entonces obtenemos las mismas cotas a priori que la ecuación ooriginal:

$$R_1 = -R_2$$

$$R_2 = \sqrt{1 - 2v_{min}\sqrt{\beta}} + \epsilon_0$$

Así hemos mostrado que la ecuación truncada (3.8) cumple con todas las hipótesis de Ortega y tiene las mismas cotas a priori que la ecuación (1.10), por tanto podemos ahora aplicar el método de Ortega para obtener resultados sobre la ecuación truncada de esta forma garantizando que las soluciones periódicas impares obtenidas son las mismas soluciones de la ecuación MEMS original.

Como ya sabemos que la ecuación (3.8) cumple con las hipótesis de Ortega entonces es posible aplicar los resultados del principio de Ortega descrito en el capítulo anterior. Para ello trataremos la ecuación truncada que hemos planteado como la ecuación:

$$z'' + D^*(t, z)z = 0$$

En particular recordemos la función número de ceros $\nu(f) : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{N}$ donde $n(f)$ es el número de ceros de f en (a, b) . Las proposiciones de Ortega definen ν_0 como el número de ceros internos en el intervalo $(0, L)$ de la solución $\phi(t)$ con condiciones iniciales $z = 0$, $z'(0) = 1$. Donde $\phi(t)$ es la solución de la ecuación $z'' + D(t, z)z = 0$ linealizada en $z = 0$.

Linealizando la ecuación (3.8), obtenemos:

$$x'' + x(1 - 4\beta v^2(t)) = 0$$

que es la ecuación (1.11) que estudiamos en el capítulo 1. Recordando la expresión (1.17), podemos delimitar ν_0 utilizando las propiedades físicas del dispositivo usando la siguiente expresión:

$$\left[\frac{\sqrt{1 - 4\beta(V_0 + \delta)^2}}{\omega} \right] \leq \nu_0 \leq \left[\frac{\sqrt{1 - 4\beta(V_0 - \delta)^2}}{\omega} \right]$$

Así mismo gracias al teorema 2.1.5 sabemos que un problema que satisfaga las condiciones de Ortega tiene una solución periódica con $N \geq 0$ ceros en $(0, L)$ cuando $z(0) = z(L) = 0$ y así mismo $N < \nu_0$.

De esta forma para la ecuación (3.8) sabemos que dado que el número de ceros N de cualquier solución periódica impar esta acotado por ν_0 :

$$N < \nu_0$$

Sea N_0 un numero natural. Queremos ajustar los parámetros del dispositivo para obtener soluciones mT -periódicas impares con oscilación prescrita por debajo de N_0 . Para ello usaremos la estimación de ν_0 dada arriba. La estimación de arriba es válida par período mT con m natural, en cuyo caso la frecuencia w cambia por $mT/2\pi$.

Su forzamos a la desigualdad anterior de estimación de ν_0 a estar acotada por abajo por N_0 y por arriba por $N_0 + 1$ podremos obtener condiciones sencillas de ajuste para que ν_0 sea o N_0 o $N_0 + 1$ lo que dá un intervalo cerrado para los voltajes máximos y mínimos (ver el siguiente Corolario).

Más específicamente tendremos la siguiente condición:

$$v_{max}, v_{min} \in \left[\sqrt{\frac{1 - (N_0 + 1)^2 \omega_m^2}{4\beta}}, \sqrt{\frac{1 - N_0^2 \omega_m^2}{4\beta}} \right],$$

donde $\omega_M m = \frac{2m\pi}{T}$ donde impondremos también que

$$1 - (N_0 + 1)^2 \omega_m^2 > 0.$$

Hemos probado entonces el siguiente resultado central del artículo [9] y su versión práctica que permite estimar $\nu_0(m)$.

Teorema 3.2.2. Sean N, ν_0 números naturales y supongamos en que (1.10) $1 - 4\beta v^2(t) > 0$. Así mismo para (3.8) se verifican las condiciones (??), (??). Entonces $m\nu_0(n) = m\nu_0$ y (1.10) tiene una solución $\frac{2m\pi}{\omega_M}$ periódica impar $\varphi_k(0) > 0$ y con k ceros en el intervalo $(0, \frac{m\pi}{\omega_M})$ para $k = 0, 1, \dots, \nu_0 - 1$.

Así mismo como ya se ha planteado en la pagina 5 del artículo [9], obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.2.2.1. Dada la ecuación (1.10) donde $v(t) < \sqrt{\frac{1}{4\beta}}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ para $L = \frac{mT}{2\pi}$, con m natural. Sea N_0 un número natural mayor a 2. Asumir que $T > \frac{2\pi(N_0+1)}{m}$ y además

$$v_{max}, v_{min} \in \left[\sqrt{\frac{1 - (N_0 + 1)^2 \omega^2}{4\beta}}, \sqrt{\frac{1 - N_0^2 \omega^2}{4\beta}} \right]$$

Entonces $\nu_0 = N_0$ o $\nu_0 = N_0 + 1$. Así mismo la ecuación (1.10) tiene una solución mT -periódica impar con k ceros en $(0, \frac{mT}{2})$ para cada $k = 0, 1, \dots, N_0 - 1$

Capítulo 4

Simulaciones y resultados numéricos

A continuación utilizaremos el método descrito en los capítulos anteriores, recordemos que la ecuación (1.10) y así mismo las propiedades del dispositivo:

$$1 - 4\beta v^2(t) > 0$$

y

$$L := \frac{mT}{2}$$

Utilizando el corolario 3.2.2.1 podemos encontrar los parámetros de control N_0 , así como la relación de β , la frecuencia y los voltajes. Finalmente utilizando el truncamiento (3.4) podemos satisfacer las hipótesis de Ortega para así computar de forma apropiada las ecuaciones de los siguientes dispositivos. De esta manera proponemos el siguiente procedimiento para aplicar el método de Ortega en un dispositivo MEMS lineal tipo peine.

Consideremos la función truncada (3.4) asociada a (1.10), dado que como hemos visto, esta ecuación satisface las condiciones de Ortega como hemos visto en secciones anteriores, de esta manera a continuación ilustramos el procedimiento del método de Ortega.

Procedimiento

Sea $\nu(v)$ la función número de ceros asociada a la ecuación truncada equivalente (3.4), sean m, N_0 valores fijos como los plantea el teorema 3.2.2. Por

tanto sabemos que existen las siguientes velocidades reales positivas

$$vel_0, vel_1, \dots, vel_{n_0-1}$$

tal que $f(\frac{mT}{2}, vel_n) = 0$ y $\nu(vel_n) = N$, para $n = 0, \dots, N_0 - 1$ entonces existe un $\delta_N > 0$ tal que $\nu(v) = N + 1 \forall v \in [vel_N - \delta_N, vel_N]$ y $\nu(v) = N$, $\forall v \in (vel_N, vel_N + \delta_N]$. En otras palabras $\nu(vel)$ es una función constante localmente en una vecindad y cambia mediante saltos de valor exactamente 1. Así mismo estos saltos ocurren exactamente en vel_N .

Tengamos en cuenta que inicialmente no conocemos una estimación de las velocidades críticas vel_N ni tampoco la extensión de la vecindad δ_N . Por ello el proceso que realizaremos es buscar obtener una estimación de vel_N encontrando algún valor perteneciente a la vecindad $[vel_N, vel_N + \delta_N]$ una vez obtenido este representante podemos utilizar un método de aproximación para precisar a un valor lo más cercano posible a vel_N como explicaremos a continuación.

Procedimiento de aproximación de la velocidad crítica

Dada la estructura escalonada de la función $\nu(v)$ entonces cualquier $v \in [vel_N, vel_N + \delta_N]$ satisface $\nu(v) = N$, así mismo de acuerdo al teorema 2.1.5 sabemos que resolviendo el sistema de condiciones iniciales (3.4) con $x = 0$ y $x' = vel_N$ obtenemos una solución $F(t)$, donde $F(L) = 0$. Por tanto definamos un paso p , tal que $p < |[vel_N, vel_N + \delta_N]|$. Sea $v(c)$, $v(c+p)$, $v(c-p)$ candidatos, ahora seleccionamos la dirección apropiada seleccionando el candidato que genera la solución tal que $|F(L_c)|$ se acerca más a 0. De forma iterativa seleccionamos nuevos candidatos hasta encontrar uno que cumpla con los niveles de tolerancia, en caso que $\nu(v_c) \neq N$ y $v_c \neq vel_N$ entonces $p_{nuevo} = \frac{c - p_{anterior}}{2}$.

Iteración

Ahora debemos realizar el mismo procedimiento anterior para todos los N para encontrar de esta manera todas las velocidades críticas, una vez hemos encontrado las velocidades críticas tenemos todas las soluciones periódicas impares de la ecuación trabajada.

4.1. Dispositivo 1

Para un dispositivo con los siguientes parámetros: $N_0 = 4$, $m = 1$, $\beta = 4.427 \times 10^{-3} \text{ V}^{-2}$, $\omega = 0,1$, $v_0 = 6.697\,684\,163\,705\,222 \text{ V}$, $\delta = 0.189\,709\,177\,328\,008 \text{ V}$.

Este sistema presenta soluciones periódicas impares con 0, 1, 2, 3 ceros interiores y sus velocidades críticas respectivamente:

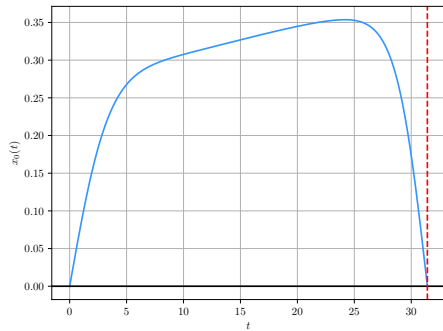
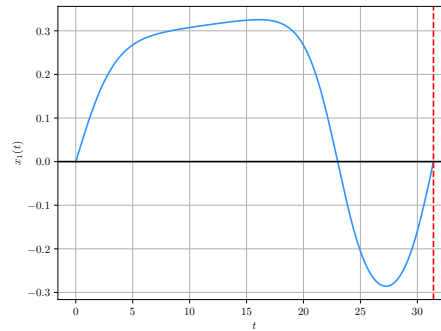
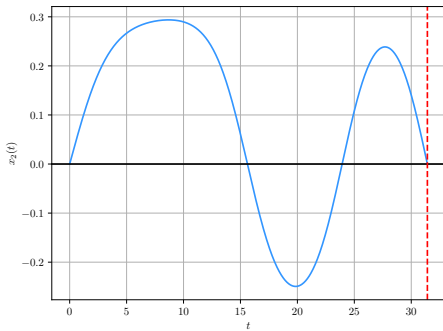
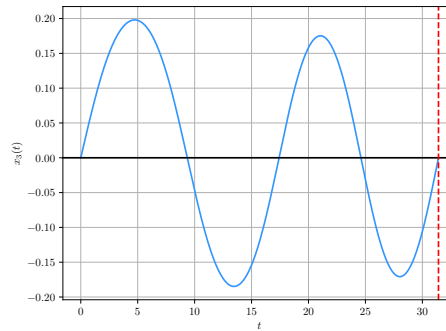
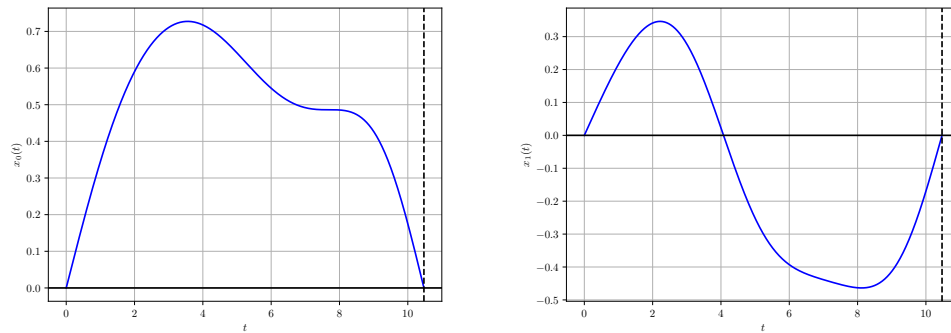
(a) $N = 0$.(b) $N = 1$.(c) $N = 2$.(d) $N = 3$.

Figura 4.1: Gráfica de las soluciones periódicas impares obtenidas para el *Caso 1* por individual (intervalo $[0, T]$).

Vcrit(0)	0.085457647566
Vcrit(1)	0.085456604074
Vcrit(2)	0.085256195538
Vcrit(3)	0.070645424958

4.2. Dispositivo 2

Para un dispositivo con los siguientes parámetros: $N_0 = 2$, $m = 3$, $\beta = 4.427 \times 10^{-3} \text{ V}^{-2}$, $\omega = 0,9$, $v_0 = 4.643\,709\,343\,412\,434 \text{ V}$, $\delta = 0.751\,073\,636\,730\,917\,4 \text{ V}$.



(a) $N = 0$.

(b) $N = 1$.

Figura 4.2: Gráfica de las soluciones periódicas impares obtenidas para el *Caso 2* por individual (intervalo $[0, T]$).

Vcrit(0)	0.3654980555008
Vcrit(1)	0.2303360965225

4.3. Dispositivo 3

Para un dispositivo con los siguientes parámetros: $N_0 = 3$, $m = 2$, $\beta = 4.427 \times 10^{-3} \text{ V}^{-2}$, $\omega = 0,4$, $v_0 = 5.260\,333\,554\,4 \text{ V}$, $\delta = 0.751\,476\,222\,05 \text{ V}$.

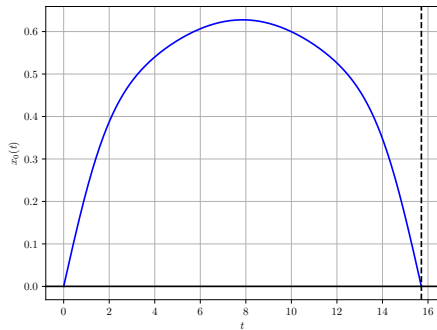
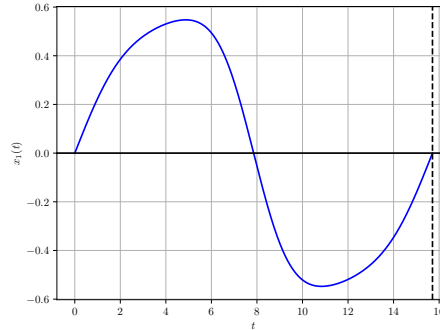
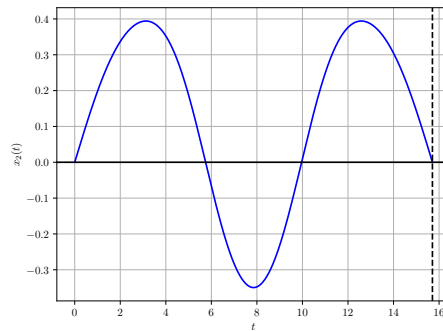
(a) $N = 0$.(b) $N = 1$.(c) $N = 2$.

Figura 4.3: Gráfica de las soluciones periódicas impares obtenidas para el *Caso 3* por individual (intervalo $[0, T]$).

$V_{\text{crit}}(0)$	0.0.2381666719
$V_{\text{crit}}(1)$	0.237181518411
$V_{\text{crit}}(2)$	0.210091503921

4.4. Revisión de resultados

En los distintos modelos de los dispositivos se puede observar en sus gráficas de soluciones periódicas impares, la no linealidad de la ecuación diferencial

(1.10), así mismo se observa que a mayor velocidad inicial usada en el método del disparo, se obtiene un menor número de ceros, así mismo existe una familia de soluciones con cantidad de ceros prescrita. Sin embargo, gracias a las adaptaciones de los principios de Ortega que se han revisado de la literatura reciente y desarrollado en detalle en este trabajo, es posible determinar que existen soluciones mT -periódicas impares, estudiando el problema de contorno en medio período $x(0) = x(mT/2) = 0$.

Con los resultados actuales no se conocen propiedades de estabilidad de las soluciones, sin embargo [9] estudia la estabilidad de las soluciones desde el punto de vista numérico. Las simulaciones concuerdan muy bien con los resultados teóricos enunciados al final del capítulo 3 y demostrados a lo largo del mismo.

Conclusiones

- Es posible aplicar el principio de Ortega en osciladores MEMS tipo peine, y de esta manera encontrar soluciones periódicas impares para el movimiento transversales del peine de un dispositivos micro electro mecánico tipo comb-drive. Para ello debe realizarse un proceso de truncamiento que garantiza las condiciones propuestas por los principios de R. Ortega.
- El método de Ortega es válido para distintos tipos de osciladores con simetría y condiciones apropiadas, no solo es posible aplicarlo en el estudio de los cuerpos celestes, sino que también tiene aplicación en dispositivos físicos tales como el péndulo de longitud variable y los MEMS.
- El método de Ortega requiere un alto nivel de precisión en los mecanismos de cálculo ya que, a pesar que la función para contar ceros interiores solo requiere un mallado apropiado para las soluciones, se requiere una precisión bastante alta para determinar cuando se considera que una solución es la solución periódica impar (se requiere una tolerancia pequeña para determinar cuando $x(L) = 0$.) Consideramos que pueden existir futuras investigaciones para precisar con menor costo computacional cuando una solución es la deseada. Acá se ha afinado la solución periódica detectando el cambio del número de ceros internos en medio período manejando una tolerancia, con la velocidad inicial del disparo.
- La teoría de comparación de Sturm permite estudiar el sistema linealizado de la ecuación de movimiento de dispositivos micro-electro mecánicos, y es posible también aplicarla para inferir propiedades del sistema no lineal. Sin embargo a pesar de que es posible acotar y obtener algunas características de la solución tal como una cota superior para el

número de ceros, se hace necesario un principio variacional de mínima energía cinética en el modelo no lineal para encontrar soluciones periódicas impares. Es importante destacar la forma muy asimétrica y no lineal de las soluciones impares en medio período para el modelo MEMS estudiado. Ajustando entonces adecuadamente los voltajes DC y la amplitud AC δ es posible obtener una respuesta periódica con oscilación prescrita. Sin embargo no sabemos nada sobre la estabilidad de dichas respuestas periódicas simétricas. Finalmente, el balance muestra que se han cumplido con los objetivos del proyecto y más aún se han revisado y desarrollado en detalles extensiones de la literatura reciente sobre los principios de R. Ortega para un dispositivo micro-electromecánico tipo peine lineal.

Bibliografía

- [1] Pablo Amster. *Topological Methods in the Study of Boundary Value Problems*. Springer US, 2014. DOI: [10.1007/978-1-4614-8893-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8893-4). URL: <https://doi.org/10.1007%2F978-1-4614-8893-4>.
- [2] Vladimir Igorevich Arnold y André Avez. *Ergodic problems of classical mechanics*. Vol. 9. Benjamin, 1968.
- [3] D Bernstein, P Guidotti y JA Pelesko. «Mathematical analysis of an electrostatically actuated MEMS device». En: *Proceedings of Modeling and Simulation of Microsystems (MSM)* (2000), págs. 489-492.
- [4] Richard P Feynman. «Plenty of Room at the Bottom». En: *APS annual meeting*. 1959.
- [5] Alexander Gutierrez, Daniel Núñez y Andrés Rivera. «Effects of voltage change on the dynamics in a comb-drive finger of an electrostatic actuator». En: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 95 (2017), págs. 224-232.
- [6] Alexander Gutiérrez y Pedro J Torres. «Nonautonomous saddle-node bifurcation in a canonical electrostatic MEMS». En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 23.05 (2013), pág. 1350088.
- [7] Jaume Llibre, Daniel E Nuñez y Andrés Rivera. «Periodic solutions of the Nathanson's and the Comb-drive models». En: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 104 (2018), págs. 109-115.
- [8] Jaume Llibre y Rafael Ortega. «On the families of periodic orbits of the Sitnikov problem». En: *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 7.2 (2008), págs. 561-576.
- [9] D. Núñez, O. Larreal y L. Murcia. «Odd periodic oscillations for Comb-drive fingers MEMS with cubic stiffness». En: *To appear in Journal of Mathematical Control Science & Applications* (2022).

- [10] D. Núñez, O. Larreal y L. Murcia. «Odd periodic oscillations in Comb-drive finger actuators». En: *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 61 (oct. de 2021), pág. 103347. DOI: [10.1016/j.nonrwa.2021.103347](https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2021.103347). URL: <https://doi.org/10.1016%2Fj.nonrwa.2021.103347>.
- [11] D. Nuñez, O. Perdomo y A. Rivera. «On the stability of periodic solutions with defined sign in MEMS via lower and upper solutions». En: *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 46 (2019), págs. 195-218.
- [12] Daniel Nuñez y Pedro J. Torres. «Stable odd solutions of some periodic equations modeling satellite motion». En: *Journal of mathematical analysis and applications* 279.2 (2003), págs. 700-709.
- [13] Rafael Ortega. «Symmetric periodic solutions in the Sitnikov problem». En: *Archiv der Mathematik* 107.4 (2016), págs. 405-412.
- [14] John A. Pelesko. «Mathematical modeling of electrostatic MEMS with tailored dielectric properties». En: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 62.3 (2002), págs. 888-908.
- [15] Mohammad I. Younis. *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*. Springer US, 2011. DOI: [10.1007/978-1-4419-6020-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6020-7). URL: <https://doi.org/10.1007%2F978-1-4419-6020-7>.