

# Sobre la existencia y estabilidad de soluciones periódicas en actuadores micro-electro-mecánicos en presencia de controladores realimentados con retraso temporal

J. C. Florez Valencia

Pontificia Universidad Javeriana Cali, Santiago de Cali, Colombia (florezcamilo@javerianacali.edu.co)

**Resumen**—En este proyecto de grado se considera el estudio analítico y numérico de la ecuación diferencial tipo Liénard con retraso:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x - u = \frac{4\beta V^2(t, \varphi(\dot{x}(t), \dot{x}_\tau(t)))x}{(1-x^2)^2}, \quad x \in ]-1, 1[, \quad u \in [0, 1], \quad (1)$$

en donde  $V = V(t)$  es una función continua, positiva y periódica,  $\varphi(\dot{x}(t), \dot{x}_\tau(t)) = G(\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t))$ ,  $G \in \mathbb{R}$  y  $\gamma, \beta \in \mathbb{R}^+$ . La ecuación diferencial (1) describe el movimiento del electrodo móvil (*finger*) en el actuador microelectromecánico conocido como *Comb-drive finger* cuya dinámica global contempla la presencia de una fuerza restauradora lineal, la fuerza electrostática generada por la fuente de voltaje  $V(t)$  entre los electrodos y el efecto de un retraso temporal  $\tau \geq 0$  debido a un controlador realimentado (feedback), el cual actúa directamente sobre la velocidad del electrodo móvil. Las técnicas matemáticas consideradas para nuestro análisis abarcan el análisis de ecuaciones lineales con retraso temporal, el método de perturbación de múltiple escalas y el teorema de la función implícita en espacios de Banach.

**Palabras claves**—Ecuaciones tipo Liénard con retraso, soluciones periódicas, actuadores micro electromecánicos, método de múltiples escalas, teorema de función implícita en espacios de Banach.

**Abstract**—This proposal presents an analytical and numerical study of the time-delay Liénard differential equation:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x - u = \frac{4\beta V^2(t, \varphi(\dot{x}(t), \dot{x}_\tau(t)))x}{(1-x^2)^2}, \quad x \in ]-1, 1[, \quad u \in [0, 1], \quad (2)$$

where  $V = V(t)$  is a continuous, positive and periodic function,  $\varphi(\dot{x}(t), \dot{x}_\tau(t)) = G(\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t))$ ,  $G \in \mathbb{R}$  and  $\gamma, \beta \in \mathbb{R}^+$ . The differential equation (2) describes the motion of the moveable electrode (*finger*) in the micro-electromechanical actuator known as *Comb-drive finger* in the microelectromechanical actuator whose global dynamics consider the presence of a linear restoring force, the electrostatic force generated by the voltage source  $V(t)$  between the electrodes and the effect of a time delay  $\tau \geq 0$  due to a feedback controller acting directly in the speed of the moveable electrode. The mathematical techniques considered for our analysis include the analysis of time-delayed linear equations, the implicit function theorem in Banach spaces, and the perturbation method of multiple scales.

**Keywords**—Liénard-type equations with delay, periodic solutions, microelectromechanical actuators, multiple-scale method, implicit function theorem in Banach Spaces.

## I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas microelectromecánicos, o conocidos por el acrónimo MEMS, es una actual clasificación de la tecnología dedicada a diseñar y fabricar dispositivos o sistemas integrados muy pequeños los cuales combinan componentes mecánicos y electromecánicos. En 1967 H.C. Nathanson y sus colaboradores presentan el primer modelo matemático de un actuador electrostático de placas paralelas con interacción elástico-electrostática [8], enfocando su trabajo en el estudio analítico y numérico del voltaje que induce efectos de inestabilidad en la activación del dispositivo. Dicho voltaje de crítico es conocido como *voltaje pull-in*. Cuando se llega a este valor crítico, un efecto mecánico es la posible colisión entre los electrodos fijo y móvil, lo que equivale a daños del dispositivo. Hoy en día, el modelo de Nathanson se ha convertido en un “modelo canónico” entre los modelos dinámicos sobre MEMS, con una gran cantidad de artículos dedicados a su estudio analítico y numérico. Véase, por ejemplo los artículos [4], [8], [10], [2], [14], [16].

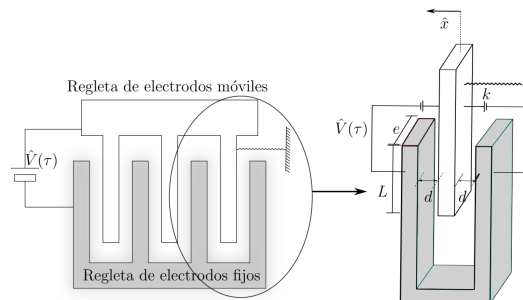


Figura 1: Esquema de un actuador electrostático tipo peine. Gráfica tomada de [13].

Otro actuador electrostático cuya configuración es similar al actuador de placas paralelas de Nathanson es el actuador electrostático conocido en la literatura como *Comb-drive finger* o bien *actuador tipo peine*. El diseño básico del actuador tipo peine consiste en dos electrodos fijos y en medio de ellos un electrodo móvil el cual se mueve en la dirección ortogonal o paralela al eje de los electrodos fijos. La ecuación diferencial que gobierna el movimiento del electrodo móvil de masa  $m$  ubicado en medio de los electrodos

fijos a una distancia equidistante  $d$ , unido a un resorte con coeficiente de rigidez lineal  $k$ , moviéndose de derecha e izquierda debido a las fuerzas electrostáticas generadas por una misma fuente de voltaje  $\mathcal{V}(s)$  está dada por

$$m\hat{x}'' + c\hat{x}' + k\hat{x} = \frac{\epsilon(Le)\mathcal{V}^2(s)}{2} \left( \frac{1}{(d-\hat{x})^2} - \frac{1}{(d+\hat{x})^2} \right),$$

donde  $\hat{x}'' = \hat{x}''(s)$  representa la aceleración inducida en el electrodo móvil,  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento lineal,  $L, e$  son parámetros de fabricación y configuración del actuador y  $\epsilon$  denota la constante dieléctrica del medio entre los electrodos. Debido en parte a la diminutas dimensiones del dispositivo, en el proceso de fabricación existen pequeñas desviaciones del electrodo móvil desde el punto medio entre los electrodos fijos ( $\hat{x} = 0$ ). Si se asume una desviación con magnitud  $\hat{u} > 0$ , se puede comprobar que la ecuación en la forma

$$m\hat{x}'' + c\hat{x}' + k\hat{x} = \frac{\epsilon(Le)\mathcal{V}^2(s)}{2} \left( \frac{1}{(d-(\hat{x}+\hat{u}))^2} - \frac{1}{(d+(\hat{x}+\hat{u}))^2} \right). \quad (3)$$

Por medio del cambio de variables

$$\hat{x} = xd - \hat{u}, \quad s = t\mathcal{T}, \quad \mathcal{T} = \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (4)$$

la ecuación (3) puede escribirse en la forma

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x - u = \frac{4\beta V^2(t)x}{(1-x^2)^2}, \quad x \in ]-1, 1[, \quad u \in [0, 1[, \quad (5)$$

$$\text{con } \gamma = \frac{c}{\mathcal{T}k} = \frac{c}{\sqrt{mk}}, \quad u = \frac{\hat{u}}{d}, \quad V(t) = \mathcal{V}(t\mathcal{T}) \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\epsilon Le}{2kd^3}.$$

En este documento, vamos a considerar una fuente de voltaje tipo DC-AC,  $V(t)$  de la forma

$$V(t) = v_0 + \delta v(t), \quad (6)$$

con  $v_0 \in \mathbb{R}^+$  (DC-fuente de voltaje directo) y  $v(t) \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$  de promedio cero. El voltaje  $V$  se asume no negativo, en consecuencia  $\delta \in [0, -v_0/v_{\min}[$  en donde:

$$v_{\max} := \max_{t \in [0, T]} v(t), \quad v_{\min} := \min_{t \in [0, T]} v(t).$$

Los MEMS con retraso temporal aparecen frecuentemente en aplicaciones prácticas de ingeniería de control. Una de las técnicas para mejorar el desempeño de este tipo de dispositivos es el uso de controladores realimentados con retraso en el tiempo introducido por Pyragas [11]. La señal de salida de este tipo de controlador es un valor retrasado de la salida del sistema al que se le sustrae la salida actual del mismo.

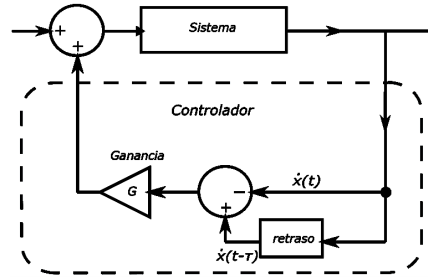


Figura 2: Esquema del controlador de velocidad realimentado.

Queremos aplicar este controlador realimentado con retraso  $\tau \geq 0$  en la velocidad al actuador tipo peine (5) modificando la señal de entrada del voltaje, tal como sugiere el esquema de la figura anterior, es decir

$$V(t) \rightarrow V(t, \varphi(\hat{x}(t), \hat{x}_\tau(t))), \quad \text{con } \varphi(\hat{x}(t), \hat{x}_\tau(t)) = G(\hat{x}(t-\tau) - \hat{x}(t)).$$

El parámetro  $G \in \mathbb{R}$  se identifica como la “ganancia” del controlador el cual mide el efecto del controlador en la dinámica del sistema a través de la diferencia entre dos valores de la velocidad en dos tiempos distintos. En este caso, la ecuación (5) queda en la forma:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x - u = \frac{4\beta V^2(t, \varphi(\hat{x}(t), \hat{x}_\tau(t)))x}{(1-x^2)^2}, \quad x \in ]-1, 1[, \quad u \in [0, 1[, \quad (7)$$

Se considera el estudio analítico y numérico de la dinámica de la ecuación diferencial (7) junto con una adecuada formulación del teorema de la función implícita en espacios de Banach (ver [1], [9], [6], [15]). De manera más precisa, se desea dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

**P1** ¿Existen soluciones periódicas con signo constante para (7) para pequeños valores del retardo  $\tau$ ? De ser positiva la pregunta anterior ¿Qué tan grande puede ser el valor del retraso?.

**P2** ¿Qué condiciones sobre los parámetros de ganancia  $G$  y retardo  $\tau$  garantizan la estabilidad de los estados de equilibrio de (7) cuando se asume una fuente de voltaje constante  $V(t) = v_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Si se asume una fuente de voltaje  $V(t) = v_0 + \delta v(t)$ , con  $v(t)$  una función  $T$ -periódica,  $v_0 = O(1)$ ,  $\delta = O(\epsilon^3)$ , con  $\epsilon$ -pequeño, por medio de un análisis de perturbación con la técnica de escalas múltiples queremos dar respuesta a la siguiente pregunta

**P3** Dado un estado de equilibrio  $\hat{x}$  del modelo autónomo asociado a (7) y  $y(t) = x(t) - \hat{x}$  una perturbación con  $x(t)$  solución de (7) ¿Cuál es la respuesta dinámica del actuador (7) a pequeñas perturbaciones  $y = O(\epsilon)$  de los estados de equilibrio cuando se asume una ganancia  $G = O(\epsilon^2)$ ?

## II. PRELIMINARES

**Teorema 1.** Sea  $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  y considere la ecuación diferencial funcional no lineal

$$\dot{x}(t) = f(x_t). \quad (8)$$

Diremos que la función constante  $x(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$  es una solución de equilibrio para (8) si y solo si  $f(\hat{x}_0) = 0$ , en donde  $\hat{x}_0 \in C$  es la función constante  $\hat{x}_0(t) = x_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Al sistema lineal

$$\dot{z}(t) = \mathcal{L}(z_t), \quad (9)$$

se le conoce como el sistema linealizado (o sistema variacional) alrededor del equilibrio  $\hat{x}_0$  de la ecuación diferencial funcional no lineal (8) en donde  $\mathcal{L} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un operador lineal y acotado (ver [3], [5], [12]). Sea  $\Delta(\lambda) := \det(\lambda I - L_\lambda)$  y considere la ecuación característica  $\Delta(\lambda) = 0$  correspondiente al sistema lineal (9). Suponga que

$$-\sigma := \max_{\Delta(\lambda)=0} \operatorname{Re}(\lambda) < 0.$$

Entonces  $\hat{x}_0$  es localmente asintóticamente estable para (8). De hecho se verifica que

- Existe  $K > 0$  tal que

$$|z(t, \phi)| \leq K e^{-\sigma t} \|\phi\|, \quad t \geq 0, \quad \phi \in C,$$

con  $z(t, \phi)$  una solución de (9)  $\dot{z}(t) = L(z_t)$  con condición inicial  $z_0 = \phi \in C$ .

- Existe  $b > 0$  tal que si  $\|\phi - \hat{x}_0\| < b$  entonces

$$\|x_t(\phi) - \hat{x}_0\| \leq K \|\phi - \hat{x}_0\| e^{-\sigma t/2}$$

para  $t > 0$ , con  $x(t)$  solución de (8) con condición inicial  $x_0 = \phi \in C$ .

Si por el contrario  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  para algún  $\lambda$  tal que  $\Delta(\lambda) = 0$ , entonces  $\hat{x}_0$  es inestable.

**Teorema 2** (Teorema de la Función Implícita en Espacios de Banach). Sean  $X, Y$  y  $Z$  espacios de Banach, y sean  $U \subset X$ ,  $V \subset Y$  conjuntos abiertos y una función  $f : U \times V \rightarrow Z$  de clase  $C^k$ . Además suponga que  $f(x_0, y_0) = 0$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) : Y \rightarrow Z$  es un isomorfismo. Entonces existe una vecindad  $U_0$  de  $x_0$  y una única función denominada  $\phi$  de clase  $C^k$ , la cual cumple que:

i)  $\phi(x_0) = y_0$  y  $f(x, \phi(x)) = 0$ ,  $\forall x \in U_0$ .

ii) Para cada  $x \in U_0$ , se satisface

$$D\phi(x) = - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) \right)^{-1} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x)) \right).$$

**Teorema 3** (Teorema de la aplicación abierta). Sean  $E$  y  $W$  espacios de Banach y  $L : E \rightarrow W$  un operador lineal, continuo y sobreyectivo. Entonces  $L$  es una aplicación abierta.

**Teorema 4** (Alternativa de Fredholm). Considere el sistema lineal de ecuaciones

$$\dot{X} = A(t)X + R(t), \quad (10)$$

con  $A(t) \in \mathbb{M}_{m \times m}(\mathbb{C})$  y  $R(t) \in \mathbb{R}^m$  ambas funciones continuas y  $T$ -periódicas.

1. Si la ecuación homogénea  $\dot{X} = A(t)X$  no admite soluciones  $T$ -periódicas no triviales entonces existe una única solución  $T$ -periódica de (10) para toda función  $R = R(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ .

2. Si la ecuación homogénea admite soluciones  $T$ -periódicas no triviales entonces (10) admite soluciones  $T$ -periódicas si y solo si

$$\int_0^T \langle R(t), Y(t) \rangle dt = 0,$$

para toda solución  $T$ -periódica  $Y(t)$  de la ecuación adjunta  $\dot{Y} = -A^*Y$ , en donde  $A^* = A^{tr}$  es la matriz adjunta de  $A$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto interno en  $\mathbb{R}^m$ .

**Lema 1.** Para el modelo de Comb-drive desplazado

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x - u = \frac{4\beta V^2(t)x}{(1-x^2)^2}, \quad x \in ]-1, 1[, \quad (11)$$

para cada  $u \in [0, 1[$  se definen

$$\vartheta_{\min} := 4\beta V_{\min}^2, \quad \vartheta_{\max} := 4\beta V_{\max}^2,$$

con

$$\vartheta_*(u) = (1 - \zeta(u)^2)(5\zeta(u)^2 - 4u\zeta(u) - 1).$$

en donde las cantidades  $\zeta(u)$  y  $\psi(u)$  están dadas por

$$\zeta(u) = \frac{u^{1/3}}{4} \left( u^{2/3} + \psi(u) + \frac{u^{4/3}}{\psi(u)} \right) \quad \text{y} \quad \psi(u) = \left( u^2 + 4u\sqrt{u^2 + 4} + 8 \right)^{1/3}.$$

Considere la ecuación (11) con  $u \in ]0, 1[$  fijo. Asuma que

$$0 < \vartheta_{\min} \leq \vartheta_{\max} \leq \vartheta_*(u),$$

con  $\vartheta_*(u)$  dado en (12) y defina  $\phi(x, u) = (x - u)(1 - x^2)^2$ . Entonces, existen tres súper-soluciones constantes  $\delta_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  que satisfacen

$$\phi(\delta_0, u) = \vartheta_{\max}\delta_0, \quad \phi(\delta_i, u) = \vartheta_{\min}\delta_i, \quad i = 1, 2,$$

y tres sub-soluciones  $\xi_j$ ,  $j = 0, 1, 2$  que satisfacen

$$\phi(\xi_0, u) = \vartheta_{\min}\xi_0, \quad \phi(\xi_i, u) = \vartheta_{\max}\xi_i, \quad i = 1, 2.$$

Más aún,

$$-1 < \xi_0 \leq \delta_0 < 0, \quad \text{y} \quad 0 < \delta_1 \leq \xi_1 < \zeta(u) < \xi_2 \leq \delta_2 < 1.$$

**Teorema 5.** Sea  $u \in [0, 1[$  fijo. Bajo los supuestos del Lema 1 y las condiciones

$$M := 1 - \vartheta_{\min} < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \quad \text{y} \quad \gamma \leq \gamma^* := \max_{L \in [M, \pi^2/T^2]} \frac{L - M}{\sqrt{L}} \cot\left(\frac{\sqrt{L}T}{2}\right).$$

Entonces existen al menos tres soluciones  $T$ -periódicas no triviales  $\hat{\rho}(t)$ ,  $\hat{\psi}_1(t)$  y  $\hat{\psi}_2(t)$  de (11) tales que

$$\xi_0 \leq \hat{\rho}(t) \leq \delta_0, \quad \delta_1 \leq \hat{\psi}_1(t) \leq \xi_1 \quad \text{y} \quad \xi_2 \leq \hat{\psi}_2(t) \leq \delta_2,$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Más aún,

- Si  $u = 0$  entonces  $\hat{\psi}_1(t) = 0$  y  $\hat{\rho}(t) = -\hat{\psi}_2(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- Bajo las condiciones (13) y para  $u \ll 1$ , las únicas soluciones positivas,  $T$ -periódicas no triviales de (11) son  $\hat{\psi}_1(t)$  y  $\hat{\psi}_2(t)$  y la única solución negativa,  $T$ -periódica no trivial es  $\hat{\rho}(t)$ .
- Si  $\gamma \leq \gamma^*$  y  $u \ll 1$  entonces  $\hat{\rho}(t)$  y  $\hat{\psi}_2$  son inestables, mientras que si  $\gamma \leq \min\{\gamma^*, \gamma^{**}\}$  con

$$\gamma^{**} = 2\sqrt{1 - \vartheta_{\max} s'(\xi_1)}, \quad s(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2},$$

$\hat{\psi}_1(t)$  es localmente asintóticamente estable.

### III. RESULTADOS

Iniciamos nuestro análisis considerando el caso  $\delta = 0$ , en cuyo caso tenemos la ecuación autónoma con retraso

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x - u = \frac{4\beta(v_0 + G(\hat{x}_\tau - \hat{x}))^2 x}{(1 - x^2)^2}, \quad x \in ]-1, 1[, \quad u \in [0, 1]. \quad (14)$$

**Proposición 1.** Para cada  $u \in [0, 1]$  fijo, suponga que  $0 < v_0 < \sqrt{\frac{\vartheta_*(u)}{4\beta}}$  con  $\vartheta_*(u)$  definido anteriormente. La ecuación diferencial (14) admite dos equilibrios  $\hat{x}_1, \hat{x}_2$  en  $]0, 1[$  con el orden  $0 < \hat{x}_1 < (2u - \sqrt{4u^2 + 5})/5 < \hat{x}_2 < 1$ . Más aún, si  $\tau = 0$  el equilibrio  $\hat{x}_2$  es inestable, por otro lado si se cumple que  $0 < \gamma < 2\sqrt{\frac{-4\hat{x}_1^3 + 3u\hat{x}_1^2 + u}{\hat{x}_1(1 - \hat{x}_1^2)}}$  el equilibrio  $\hat{x}_1$  es localmente asintóticamente estable.

**Corolario 1.** Considere el actuador electrostático tipo Comb-drive desplazado

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x - u = \frac{4\beta v_0^2 x}{(1 - x^2)^2}, \quad x \in ]-1, 1[, \quad (15)$$

con  $0 < v_0 < \sqrt{\frac{\vartheta_*(u)}{4\beta}}$  entonces existen exactamente dos soluciones de equilibrio  $\hat{x}_1(u), \hat{x}_2(u) \in ]0, 1[$  con  $0 < \hat{x}_1 < (2u + \sqrt{4u^2 + 5})/5 < \hat{x}_2 < 1$ . Más aún,  $\hat{x}_2(u)$  es un equilibrio tipo silla y  $\hat{x}_1(u)$  es un equilibrio tipo centro cuyo periodo mínimo de oscilación (periodo del problema linealizado asociado) esta dado por

$$\hat{\mathcal{T}} = 2\pi/\hat{\omega}, \quad \text{con} \quad \hat{\omega}^2 = 1 - \frac{4\beta v_0^2(1 + 3\hat{x}_1^2(u))}{(1 - \hat{x}_1^2(u))^3}.$$

Hacemos el siguiente cambio de variables

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x} \Rightarrow x_{1\tau}(t) = x(t - \tau), \quad x_{2\tau}(t) = \dot{x}(t - \tau). \quad (16)$$

En consecuencia, la ecuación (14) queda en la forma

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{4\beta(v_0 + G(x_{2\tau} - x_2))^2 x_1}{(1 - x_1^2)^2} - \gamma x_2 - x_1 + u \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

**Teorema 6.** Sea  $X_* = (\hat{x}_1, 0)$  el punto de equilibrio del sistema (17) con  $\hat{x}_1$  dado en la Proposición 1. Se definen

$$a = \frac{4\hat{x}_1^3 - u\hat{x}_1^2 - u}{\hat{x}_1(1 - \hat{x}_1^2)}, \quad g = \frac{2(\hat{x}_1 - u)G}{v_0} \quad \text{y} \quad \chi = -\frac{a^2 + \gamma^2 + 1 - \sqrt{(a^2 + \gamma^2 + 1)^2 - 4a^2}}{2a}.$$

Entonces  $Z_* = (\hat{x}_1, 0)$  es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable para todo  $0 \leq \tau < \tau_0$  con

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{\chi}|a|}{|g| \max\left\{1, \frac{1-a}{\gamma}\right\} (\max\{1, |a| + |\gamma + g|\} + |g|)}. \quad (18)$$

**Teorema 7.** Sea  $\tau \in \mathcal{I} \subseteq [0, \hat{\mathcal{T}}]$  y  $Z_* = (\hat{x}_1, 0)$  el punto de equilibrio de (17) con  $\hat{x}_1$  dado en la Proposición 1,

además  $0 < \gamma < 2\sqrt{\frac{-4\hat{x}_1^3 + 3u\hat{x}_1^2 + u}{\hat{x}_1(1 - \hat{x}_1^2)}}$ . Para cada  $\tau \in \mathcal{I}$ , sea  $\kappa = \kappa(\tau)$  la solución de la ecuación

$$\kappa \left( \kappa - \frac{\gamma \operatorname{sen}(\kappa\tau)}{1 - \cos(\kappa\tau)} \right) = \frac{-4\hat{x}_1^3 + 3u\hat{x}_1^2 + u}{\hat{x}_1(1 - \hat{x}_1^2)},$$

en el dominio  $\{(\tau, \kappa) : 0 < \kappa\tau < 2\pi\}$ . Si la ganancia del controlador satisface la condición

$$G > -\frac{\eta}{1 - \cos(\kappa\tau)}, \quad \text{con} \quad \eta = \frac{\gamma(1 - \hat{x}_1^2)^2}{8\beta v_0 \hat{x}_1},$$

entonces  $X_* = (\hat{x}_1, 0)$  es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable del sistema (17). Más aún, el mínimo valor de  $G$  donde se garantiza estabilidad asintótica es  $G_{\min} = -\eta/2$ .

**Teorema 8.** Sea  $\epsilon > 0$  fijo y pequeño. Para el set de parámetros

$$\begin{aligned} \xi &= \gamma + \frac{8\beta v_0 G \hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^2}, \quad g = -\frac{8\beta v_0 G \hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^4}, \quad \hat{\omega} = \sqrt{\frac{-4\hat{x}_1^3 + 3u\hat{x}_1^2 + u}{\hat{x}_1(1 - \hat{x}_1^2)}}, \\ \hat{\omega}_2 &= -\frac{24\beta v_0^2(1 + \hat{x}_1^2)\hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^4}, \quad \hat{\omega}_3 = -\left(\frac{1}{(1 + \hat{x}_1)^5} + \frac{1}{(1 - \hat{x}_1)^5}\right) \quad \text{y} \\ \alpha &= \frac{8\beta v_0^2 \delta \hat{x}_1}{(1 - \hat{x}_1^2)^2}. \end{aligned}$$

Considere la ecuación diferencial con retraso

$$\ddot{y} + \epsilon^2(\xi \dot{y} + g \dot{y}_\tau) + \hat{\omega}^2 y + \hat{\omega}_2 y^2 + \hat{\omega}_3 y^3 = \alpha v((\hat{\omega} + \epsilon^2 \rho)t) \epsilon^3, \quad (19)$$

en donde  $v(s)$  es una función  $2\pi$ -periódica y con promedio  $\bar{v} = 0$ . Entonces, (19) admite una solución  $T$ -periódica  $y_*(t, \epsilon)$  con expansión asintótica de la forma

$$\begin{aligned} y_*(t, \epsilon) &= 2\epsilon k_* \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \rho_*\right) + 2\epsilon^2 \frac{\hat{\omega}_2}{3\hat{\omega}^2} \left(k_* \cos\left(\frac{4\pi}{T}t - 2\rho_*\right) - 3k_*^2\right) \\ &+ \epsilon^3 \left(\frac{\hat{\omega}_2^2}{12\hat{\omega}^4} + \frac{\hat{\omega}_2^2 \hat{\omega}_3}{12\hat{\omega}^4}\right) k_*^3 \cos\left(\frac{6\pi}{T}t - 3\rho_*\right) + O(\epsilon^3), \end{aligned}$$

cuya frecuencia de oscilación satisface  $2\pi/T - \hat{\omega} = O(\epsilon)$ , siendo  $\hat{\omega}$  la frecuencia natural del oscilador lineal  $\ddot{y} + \hat{\omega}^2 y = 0$ . Más aún,  $y_*(t, \epsilon)$  es localmente estable si se verifica la condición

$$\xi + g \cos(\hat{\omega}\tau) > 0, \quad \Leftrightarrow \quad G(1 - \cos(\hat{\omega}\tau)) + \frac{\gamma(1 - \hat{x}_1^2)^2}{8\beta v_0 \hat{x}_1} > 0,$$

Utilizando el cambio de variable (16) la ecuación (7) se puede escribir en la forma  $\dot{X}(t) = H(t, X(t), X_\tau(t), G)$ , siendo

$$H(t, X, X_\tau, G) = \left( \begin{array}{c} \dot{x} \\ u - x - \gamma \dot{x} + \frac{4\beta(\tilde{v}(t) + G(\hat{x}_\tau - \hat{x}))^2 x}{(1 - x^2)^2} \end{array} \right), \quad (20)$$

en donde  $\tilde{v}(t) = v_0 + \delta v(t)$ ,  $X(t) = (x(t), \dot{x}(t))^{tr}$  y  $X_\tau(t) = X(t - \tau)$ . La función  $H: \mathbb{R} \times \Omega \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida en  $\Omega = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \in ]-1, 1[ \}$ .

**Teorema 9.** Sean  $\Psi_j(t)$ ,  $j \in \{0, 1, 2\}$  las soluciones  $T$ -periódicas de (11) con  $u \ll 1$ . Entonces, para cada  $j \in \{0, 1, 2\}$  fijo, existe  $\hat{\delta} > 0$ , y una única función  $X_G(t) = X(t, G)$  con  $G \in J = ]-\hat{\delta}, \hat{\delta}[$  y  $X(\cdot, G) \in U$  con  $U \subset C_T^1$  un entorno de  $\Psi_j(t)$ , la cual es  $T$ -periódica en  $t$  y es solución de (7) para todo  $G \in J$ , es decir,

$$\star \quad \dot{X}_G(t) = H(t, X(t), X_\tau(t), G), \quad X_\tau(t + T) = X_\tau(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } G \in J.$$

$$\star \quad X_0(t) = \Psi_j(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \text{ con } \Psi_j \in \{\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2\}.$$

**Teorema 10.** Sea  $\Psi_j(t) = (\hat{\psi}_j(t), \dot{\hat{\psi}}_j(t))^{tr}$  con  $j \in \{0, 1, 2\}$ , las soluciones  $T$ -periódicas de

(11) con  $u \ll 1$ , para la cual se verifica  $0 \leq \delta_j \leq \hat{\psi}_j(t) \leq \xi_j$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Suponga que

$$\frac{1}{4}(\gamma + b^*)^2 + \frac{1}{2}(\hat{b}^*)^2 \leq 1 - \frac{4\beta V_{\max}^2(1+3\xi_1^2)}{(1-\xi_1^2)^3} \quad \text{y} \quad 1 - \frac{4\beta V_{\min}^2(1+3\delta_1^2)}{(1-\delta_1^2)^3} \leq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2,$$

en donde  $b^*$  y  $\hat{b}^*$  están dados por

$$b^* = \frac{2G(\xi_1 - u)\xi_1}{V_{\max}(1-\xi_1^2)}, \quad \text{y} \quad \hat{b}^* := 8G\beta \left( \frac{\|\hat{V}\|_{\infty}\xi_1}{(1-\xi_1^2)^3} + \frac{V_{\max}(1+5\xi_1^2)}{(1-\xi_1^2)^4} \Lambda(\delta_1, \xi_1) \right),$$

Entonces existe un  $\hat{\delta} > 0$ , y una única función  $X_{\tau}(t) = X(t, \tau)$  con  $\tau \in I = ]-\hat{\delta}, \hat{\delta}[$  y  $X(\cdot, \tau) \in U$  con  $U \subset C_T^1$  un entorno de  $\Psi_1(t)$ , la cual es  $T$ -periódica en  $t$  y es solución de (7) para todo  $\tau \in J$ , es decir,

- ★  $\dot{X}_{\tau}(t) = H(t, X(t), X_{\tau}(t), \tau)$ ,  $X_{\tau}(t+T) = X_{\tau}(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $\tau \in I$ .
- ★  $X_0(t) = \Psi_1(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

#### IV. VALIDACIÓN NUMÉRICA Y CONCLUSIONES

Para finalizar hemos tomado de [4] los siguientes valores de referencia para los parámetros físicos que conforman el modelo Comb-drive desplazado (11)

- $\epsilon = 8,85 \times 10^{-12}$ ,  $Le = 1,6 \times 10^{-9}$ ,  $d = 3,5 \times 10^{-6}$ ,  $c = 1,78 \times 10^{-6}$ ,  $m = 3,5 \times 10^{-11}$ ,  $k = 0,17$ . Fijamos un desplazamiento  $u = 0,05$  por lo que se llega al conjunto de parámetros  $\beta \approx 9,7135 \times 10^{-4}$ ,  $\gamma \approx 0,7297$ ,  $\xi_+ \approx 0,4677$ ,  $\vartheta_* \approx 0,7032$ ,  $\nu_{\text{pull}} \approx 13,4529$  y el equilibrio  $0 < \hat{x}_1 < \xi_+$  está dado por la raíz del polinomio

$$p(x) := \phi(x, 0,05) - \vartheta x = (x - 0,05)(1 - x^2)^2 - 4\beta\nu_0^2 x.$$

La siguiente tabla presenta los valores del equilibrio  $\hat{x}_1$  y los parámetros descritos en los teoremas (6) y (7) para distintos valores de  $\nu_0$  fijando una ganancia  $G = -50$ .

$\nu_0$	$\hat{x}_1$	$\tau_0$	$-\eta/2$
2.5	0.051	3.000	-364.897
5	0.055	1.340	-168.465
7.5	0.064	0.737	-96.864
10	0.082	0.377	-56.210
13	0.162	0.032	-21.024

Tabla I: Valores asociados a los parámetros presentados en los Teoremas (6) y (7), con el set de parámetros físicos anteriormente descritos (Caso  $G = -50$ ).

Se utilizarán los valores fijos para el voltaje  $\nu_0 = 2,5, 13$  para caracterizar sus soluciones en el caso sin retraso y en un caso  $\tau > 0$ , es decir consideramos los sistemas

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{38,8539 \times 10^{-4} (2,5 - 50(z_{2\tau} - z_2))^2 z_1}{(1 - z_1^2)^2} - 0,7297 z_2 - z_1 + 0,05 \end{aligned} \right\}, \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{38,8539 \times 10^{-4} (13 - 50(z_{2\tau} - z_2))^2 z_1}{(1 - z_1^2)^2} - 0,7297 z_2 - z_1 + 0,05 \end{aligned} \right\}. \quad (22)$$

Se utilizará el paquete `jitcdde` del lenguaje de programación Python (ver [7]) con el fin de generar una

aproximación visual de las soluciones de los sistemas (21) y (22), usando el vector  $[\hat{x}_1 + t_1, \hat{x}_1 + t_2]$  como condición inicial.

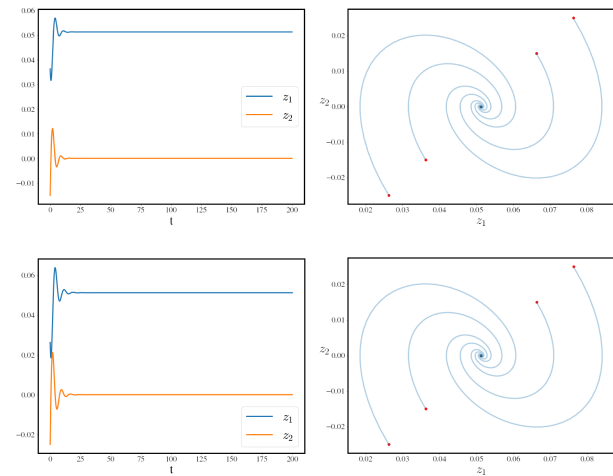


Figura 3: En la izquierda las soluciones  $z_1$  y  $z_2$  del sistema (21) a lo largo del tiempo  $t$ , a la derecha un plano fase con cuatro soluciones con los valores  $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_2 \in \{-0,25, -0,15, 0,15, 0,25\}$ . Caso  $\tau = 0$  en la fila superior y el caso  $\tau = 1,75$  en la fila inferior.

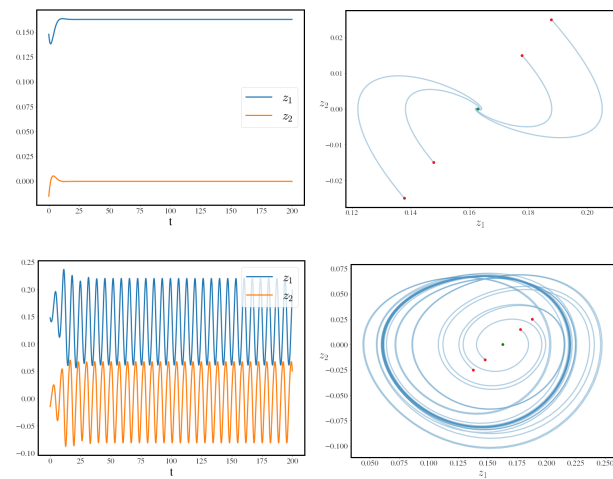


Figura 4: A la izquierda se observan las soluciones  $z_1$  y  $z_2$  del sistema (22) a lo largo del tiempo  $t$ , a la derecha un plano fase con cuatro soluciones con los valores  $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_2 \in \{-0,25, -0,15, 0,15, 0,25\}$ . Caso  $\tau = 0$  en la fila superior y el caso  $\tau = 1,75$  en la fila inferior.

No es posible caracterizar soluciones con valores para el retraso  $\tau$  mayores a 2, esto nos dice algo sobre la sensibilidad que tiene el sistema (22) con los valores que puede tomar el retraso  $\tau$ , además se ha dicho que el sistema (22) la ganancia fija esta por debajo al mínimo impuesto en el Teorema 7 esto se relaciona con la incapacidad de determinar soluciones

con un retraso  $\tau$  alto. Comparando los resultados obtenidos en las soluciones a los sistemas (21) y (22) evidenciamos un mayor efecto de oscilación alrededor del equilibrio estable a fuentes de voltaje de valor cercanas al voltaje crítico y a valores del retraso  $\tau$  también altos, dicho retraso  $\tau$  se mantiene en valores menores que en casos con fuentes de voltajes más lejanas al voltaje crítico.

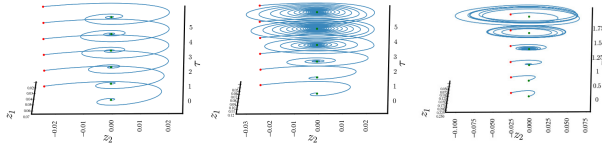


Figura 5: Planos fases de las soluciones asociadas a diferentes fuentes de voltaje  $v_0$  a lo largo del eje  $\tau$  con  $v_0 \in \{5, 10, 13\}$ .

Evidenciamos que al aumentar el retraso y la fuente de voltaje constante las soluciones oscilan cada vez más del equilibrio. Con esto cerramos la validación numérica de nuestros resultados principales. Un primer criterio (Teorema 6) brinda un valor explícito y computable del retraso en términos de los parámetros de construcción del dispositivo  $\beta$ ,  $\gamma$ , el voltaje de corriente directa  $v_0$  y la velocidad del controlador  $|G|$ . Los resultados numéricos muestran que en el caso sin retraso ( $\tau = 0$ ), las soluciones que convergen al equilibrio más rápido que aquellas con retardo  $\tau > 0$ , y en particular estas últimas presentan una mayor amplitud respecto que las primeras. Cabe aclarar que las validaciones numéricas que se han hecho, muestran que nuestro resultado analítico es correcto pero esta lejos de estimar de forma óptima una cota superior para el retraso, en la cual se garantiza la estabilidad del equilibrio  $\hat{x}_1$ . El segundo criterio (Teorema 7), establece una relación funcional entre la ganancia  $G \in \mathbb{R}$  y el retraso  $\tau \in [0, 2\pi/\hat{\omega}]$  ( $\hat{\omega}$  es la frecuencia de oscilación natural del dispositivo cerca del equilibrio estable), que brinda condiciones suficientes para que el equilibrio  $\hat{x}_1$  sea asintóticamente estable para todo  $\tau \in [0, 2\pi/\hat{\omega}]$ . En este caso, se logró determinar explícitamente una cota mínima y negativa para  $G$  (mínimo feedback), en términos de los parámetros de construcción del dispositivo  $\beta$ , el voltaje de corriente directa  $v_0$  y el coeficiente de amortiguamiento  $\gamma$ . Cabe resaltar que esta cota mínima  $G_{\min}$  y si criterio de estabilidad asintótica dado por

$$G > G_{\min} := \frac{-\gamma(1-x^2)^2}{16\beta v_0 \hat{x}_1}, \quad \forall \tau \in [0, 2\pi/\hat{\omega}]$$

guarda una cercana relación con la condición de estabilidad de la solución  $T$ -periódica del problema perturbado obtenido por medio del método de múltiples escalas, al asumir como una pequeña perturbación del equilibrio  $\hat{x}_1$ , asumiendo pequeños efectos del controlador realimentado, pequeña amplitud de la fuente de voltaje periódico y pequeña constante

de amortiguamiento. Dicha condición de estabilidad establece que

$$G(1 - \cos \hat{\omega} \tau) + \frac{\gamma(1 - \hat{x}_1^2)^2}{8\beta v_0 \hat{x}_1} > 0 \Leftrightarrow G(1 - \cos(\hat{\omega} \tau)) + 2G_{\min} > 0,$$

por lo que esta condición de estabilidad de la solución periódica implica la condición de estabilidad del equilibrio dada en el Teorema 7. Finalmente, se ha mostrado que para pequeños valores de  $G$  y cualquier valor de  $\tau$  existe exactamente 3 soluciones periódicas (cuya estabilidad persiste). Se propone para futuras investigaciones las siguientes cuestiones: ¿Que efectos tendría un retraso  $\tau$  no constante?, dichos retrasos se pueden pensar como funciones dependientes del tiempo  $t$  en los sistemas trabajados en este documento. Aquí no se profundizó en la posibilidad de integrar funciones históricas que hagan las veces de condiciones iniciales para los sistemas trabajados en el documento, para solucionar los sistemas (21) y (22) hemos usado el vector  $[\hat{x}_1 + \tilde{t}_1, 0 + \tilde{t}_2]$  como condición inicial, ¿como cambian dichas soluciones al implementar una condición inicial no constante?

#### REFERENCIAS

- [1] Pablo Amster, *Topological methods in the study of boundary value problems*, 01 2014.
- [2] Juan P. Berón V., *Existence, uniqueness and stability of periodic solutions of Liénard type equations*, (2020).
- [3] O. Diekmann, S.A. van Gils, S.M. Verduyn Lunel, and H.-O. Walther, *Delay equations: Functional-, complex-, and nonlinear analysis*, Springer, 1995.
- [4] Alexander Gutiérrez and Pedro Torres, *Nonautonomous saddle-node bifurcation in a canonical electrostatic Mems*, International Journal of Bifurcation and Chaos **23** (2013), 50088–.
- [5] J.K. Hale and S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Springer, 1993.
- [6] Steven G. Krantz and Harold R. Parks, *The implicit function theorem, history, theory and applications*, (1992), 163.
- [7] Ettore Messina, *Solving delay differential equations using numerical methods in Python*, <https://computationalmindset.com/en/mathematics/solving-delay-differential-equations-in-python-using-numerical-methods.html>, 2022, accessed: 2023-01-27.
- [8] Harvey C. Nathanson, William E. Newell, Robert A Wickstrom, and J. R. Davis, *The resonant gate transistor*, IEEE Transactions on Electron Devices **14** (1967), 117–133.
- [9] A.H. Nayfeh, *Introduction to perturbation techniques*, Wiley Classics Library, Wiley, 2011.
- [10] Daniel Núñez, Oscar Perdomo, and Andrés Rivera, *On the stability of periodic solutions with defined sign in Mems via lower and upper solutions*, Nonlinear Analysis: Real World Applications (2019).
- [11] Kestutis Pyragas, *Continuous control of chaos by self-controlling feedback*, Physics Letters A **170** (1992), no. 6, 421–428.
- [12] Hal L. Smith, *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*, Texts in Applied Mathematics (2011), 1–185.
- [13] Johan S. Sánchez V., *Existencia y estabilidad de soluciones periódicas en un actuador electrostático tipo peine con electrodo móvil desplazado*, (2018).
- [14] M.I. Younis, *MEMS linear and nonlinear statics and dynamics*, Microsystems, Springer US, 2011.
- [15] Eberhard Zeidler, *Applied functional analysis. Main principles and their applications*, Springer-Verlag, 1995.
- [16] Wen-Ming Zhang, Han Yan, Zhi-Ke Peng, and Guang Meng, *Electrostatic pull-in instability in MEMS/NEMS: A review*, Sensors and Actuators A: Physical **214** (2014), 187–218.